MAT366

Deuxième semestre — 2019–2020

Fiche 0: Calcul de primitives

Révision sur les fonctions élémentaires

1. *La fonction exponentielle.* La fonction exponentielle est définie comme la (seule) fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable qui satisfait que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

(a) Soit f comme ci-dessus. Montrer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = f(x)^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x)f(-x)$.

(b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable qui satisfait que $g' = g$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = Cf(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire l'unicité de f.
Indication : considérer la fonction $x \mapsto g(x)/f(x)$.

(c) En déduire que $f''(x) = f'(x) = f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, f est strictement croissante et concave.

(d) Montrer que $f(x + y) = f(x)f(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$f(nx) = f(x)^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Indication : considérer la fonction $g(x) = f(x + y)$, avec y fixe.

(e) On définit $e = f(1)$. Noter que $e = f(1) > f(0) = 1$. On écrira en plus $f(x) = e^x$. Montrer que la série dans

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{EXP}$$

converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ et définit par conséquent une fonction différentiable exp. Comme $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$, elle coïncide avec la fonction exponentielle. Cela démontre l'existence. En particulier,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{E}$$

Solution. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice.

2. *Les fonctions trigonométriques.* Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont définies comme les (seules) fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiables qui satisfont que $f' = g$, $g' = -f$, $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$, respectivement.

(a) Soient f et g comme ci-dessus. Montrer que $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x)^2 + g(x)^2$.

(b) Soient $f_1, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonction différentiables qui satisfont que $f_1' = g_1$, $g_1' = -f_1$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f_1 = bf - ag \text{ et } g_1 = af + bg. \tag{1}$$

En déduire l'unicité de f et de g, que l'on appelle *sinus* et *cosinus*, et que l'on note sin et cos, respectivement.
Indication : montrer que les dérivées des fonctions $fg_1 - f_1g$ et $ff_1 + gg_1$ valent zéro. Après, calculer la différence entre le produit de la première expression par f et le produit de la deuxième par g.

(c) Montrer que $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : utiliser (1) avec $f_1(x) = \cos(-x)$ et $g_1(x) = \sin(-x)$.

(d) Montrer que

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
Indication : utiliser (1) avec $f_1(x) = \sin(x+y)$ et $g_1(x) = \cos(x+y)$, où y est fixe.

(e) Montrer que les séries dans

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{SC}$$

convergent uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ et définissent par conséquent des fonctions différentiables SIN et COS. Elles vérifient les conditions $\mathsf{SIN}' = \mathsf{COS}$, $\mathsf{COS}' = -\mathsf{SIN}$, $\mathsf{SIN}(0) = 0$ et $\mathsf{COS}(0) = 1$, donc elles coïncident avec les fonctions sinus et cosinus, respectivement. Cela démontre l'existence.

Solution. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice.

3. *La définition de π.* On définit $\pi \in \mathbb{R}$ comme le plus petit nombre positif qui satisfait que $\cos(\pi/2) = 0$. Le but de cet exercice est de démontrer que ce nombre existe.

(a) Supposons qu'il n'existe aucun $x > 0$ tel que $\cos(x/2) = 0$. Comme $\cos(0) = 1$, $\cos(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$. En déduire que sin (resp., cos) est une fonction strictement croissante (resp., décroissante) sur $\mathbb{R}_{>0}$.

(b) On fixe $a > 0$. D'après l'item précédent, $0 < \cos(a) < 1$. Noter que

$$0 < \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) < \cos^2(a)$$

et en particulier $\cos(2^n a) < (\cos(a))^{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(\cos(2^n a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et, en conséquence, $(\sin(2^n a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

(c) Montrer que $\cos(x)$ (resp., $\sin(x)$) converge vers 0 (resp., 1) quand x tend vers $+\infty$. En particulier, il existe $b > 0$ tel que $\cos(b) < 1/4$ et $\sin(b) > 1/2$. En déduire que $\cos(2b) = \cos^2(b) - \sin^2(b) < 0$, pour trouver un absurde. Conclure qu'il existe $x > 0$ tel que $\cos(x/2) = 0$.

(d) Noter que l'ensemble $\mathcal{P} = \{x > 0 : \cos(x/2) = 0\}$ est non vide et minoré. On définit $\pi = \inf \mathcal{P}$. Montrer que $\pi \in \mathcal{P}$.

Solution. La solution suit directement des indications détaillées dans l'exercice.

Primitives basiques

4. *Primitives usuelles.* Compléter le tableau suivant

fonction f	une primitive de f	ensemble de définition
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$		
$1/x$		
$1/(ax+b),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$1/(a^2+x^2),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$1/\sqrt{a^2-x^2},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\cos(\omega x + a),\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\sin(\omega x + a),\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\cosh(\omega x + a),\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\sinh(\omega x + a),\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\tan(\omega x + a),\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		
$\tanh(\omega x + a),\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$		

Solution.

fonction f	une primitive de f	ensemble de définition
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\mathbb{R}_{>0}$ ($\mathbb{R}$, si $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, et $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, si $\alpha \in \mathbb{Z}_{<-1}$)
$1/x$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$1/(ax+b),\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\ln(\lvert ax+b\rvert)$	$\mathbb{R}\setminus\{-b/a\}$
$1/(a^2+x^2),\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\arctan(x/a)/a$	$\mathbb{R}$
$1/\sqrt{a^2-x^2},\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\arcsin(x/\lvert a\rvert)$	$]-\lvert a\rvert, \lvert a\rvert[$
$e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$e^{\lambda x}/\lambda$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\sin(\omega x+a)/\omega$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\cos(\omega x+a)/\omega$	$\mathbb{R}$
$\cosh(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\sinh(\omega x+a)/\omega$	$\mathbb{R}$
$\sinh(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\cosh(\omega x+a)/\omega$	$\mathbb{R}$
$\tan(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\ln(\lvert\cos(\omega x+a)\rvert)/\omega$	$]-\frac{\pi+2a}{2\omega}, \frac{\pi-2a}{2\omega}[$
$\tanh(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\ln(\cosh(\omega x+a))/\omega$	$\mathbb{R}$

5. *Fractions rationnelles.* La méthode est de décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. On est donc ramené à calculer des intégrales de l'un de ces deux types :

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx, \quad \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}dx, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } c^2-4d<0.$$

6. *Polynômes en sinus et cosinus.* La méthode est de linéariser sauf dans le cas de $\cos^m(x)\sin^n(x)$ avec $m \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}$ impair. Dans ce cas on fait un changement de variables. Écrire les formules générales.

Solution. Si m est impair de la forme $m = 2m'+1$ avec $m' \in \mathbb{N}$, alors

$$\int \cos^m(x)\sin^n(x)dx = \int \cos^{2m'}(x)\sin^n(x)\cos(x)dx = \int \left(1-\sin^2(x)\right)^{m'}\sin^n(x)\cos(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{m'}(-1)^k\binom{m'}{k}\int \sin^{n+2k}(x)\cos(x)dx = \sum_{k=0}^{m'}(-1)^k\binom{m'}{k}\frac{\sin^{n+2k+1}(x)}{n+2k+1}.$$

De façon analogue, si n est impair avec $n = 2n' + 1$ et $n' \in \mathbb{N}$, on a

$$\int \cos^m(x)\sin^n(x)dx = \int \cos^m(x)\sin^{2n'}(x)\sin(x)dx = \int \left(1-\cos^2(x)\right)^{n'} \cos^m(x)\sin(x)dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n'}(-1)^k \binom{n'}{k} \int \cos^{m+2k}(x)\sin(x)dx = \sum_{k=0}^{n'}(-1)^{k+1}\binom{n'}{k}\frac{\cos^{m+2k+1}(x)}{m+2k+1}.$$

7. *Intégration par parties.* Écrire la formule.

Solution. Si f et g sont deux fonctions définies sur (un intervalle de) $\mathbb{R}$ de classe C^1, alors

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

8. *Changement de variables.*

(a) Écrire le théorème.

(b) Écrire le cas particulier des fractions rationnelles en sinus et cosinus (règles de *C. Bioche*).

(c) Donner des primitives de $\sqrt{x^2+1}$, de $\sqrt{x^2-1}$ et de $\sqrt{1-x^2}$, en utilisant les changements de variable $x = \sinh(u)$ ou $x = \cosh(u)$ ou $x = \sin(u)$.

Solution. Il s'agit des résultats du cours.

Calcul de primitives

Pour chaque exercice suivant on calculera une formule exacte pour les primitives des fonctions données et on donnera leur domaine de définition.

9. Calculer les primitives suivantes :
(a) $\int x\sqrt{x^2+4}dx$, (b) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$, (c) $\int xe^{-x^2}dx$.

Solution. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

(a) $\int x\sqrt{x^2+4}dx = 3\sqrt{(x^2+4)^3}/4 + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(b) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \sqrt[3]{(x^2+1)^2} + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(c) $\int xe^{-x^2}dx = -e^{-x^2}/2 + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

10. Calculer
(a) $\int \frac{dx}{x^2+16}$, (b) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$, (c) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$, (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, (e) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, (f) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$.

Solution. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

(a) $\int \frac{dx}{x^2+16} = \arctan(x/4)/4 + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(b) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \arctan(e^x) + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(c) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \arcsin(x^2) + C$, avec domaine de définition $]-1,1[$.

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}_{<1}$.

(e) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}_{>0}$ (appliquer la substitution $u = \sqrt{x}$).

(f) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}} = \arcsin(e^x/4) + C$, avec domaine de définition $\mathbb{R}_{<\ln(4)}$ (appliquer la substitution $u = e^x$).

11. Calculer
(a) $\int x^n \ln(x)dx$ ($n \in \mathbb{Z}$), (b) $\int e^{-x}\cos^2(x)dx$, (c) $\int \arctan(\sqrt{1-x^2})dx$.

Solution. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

(a) Si $n \neq -1$,

$$\int x^n \ln(x)dx = \frac{x^{n+1}\big((n+1)\ln(x)-1\big)}{(n+1)^2} + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}_{>0}$ (appliquer une intégration par parties avec $u = \ln(x)$ et $v' = x^n$, *i.e.* $v = x^{n+1}/(n+1)$). Si $n = -1$,

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}_{>0}$ (appliquer la substitution $u = \ln(x)$).

(b) Si l'on utilise $\cos^2(x) = (1+\cos(2x))/2$, on trouve que

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cos^2(x)dx &= \frac{1}{2}\Big(\int e^{-x}dx + \int e^{-x}\cos(2x)dx\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(-e^{-x} + \mathrm{Re}\Big(\int e^{x(-1+2i)}dx\Big)\Big)\\ &= \frac{e^{-x}}{2}\Big(-1 + \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{(-1+2i)x}}{-1+2i}\Big)\Big) + C = \frac{e^{-x}}{2}\Big(-1 - \frac{\cos(2x)-2\sin(2x)}{5}\Big) + C\\ &= -\frac{e^{-x}}{10}\big(5+\cos(2x)-2\sin(2x)\big) + C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(c) Si l'on fait une intégration par parties avec $u = \arctan(\sqrt{1-x^2})$ et $v' = 1$ (*i.e.* $v = x$), on trouve

$$\int \arctan(\sqrt{1-x^2})dx = x\arctan(\sqrt{1-x^2}) + \int \frac{x^2 dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Si l'on fait la substitution $x = \sqrt{2}z/\sqrt{1+2z^2}$ (*i.e.* $z = x/\sqrt{2-2x^2}$) , la dernière intégrale devient

$$\int \frac{x^2 dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2}\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)(1+2z^2)} = \sqrt{2}\int dz\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{2z^2+1}\right)$$
$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arctan}(z) - \mathrm{arctan}(\sqrt{2}z) + C$$
$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2-2x^2}}\right) - \mathrm{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C.$$

Si l'on utilise l'identité $\mathrm{tan}(\mathrm{arcsin}(x)) = x/\sqrt{1-x^2}$, alors

$$\int \mathrm{arctan}(\sqrt{1-x^2})dx = \sqrt{2}\,\mathrm{arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2-2x^2}}\right) + x\,\mathrm{arctan}(\sqrt{1-x^2}) - \mathrm{arcsin}(x) + C$$

avec domaine de définition $]-1,1[$.

12. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}.$$

Solution. C'est clair que, si $n \neq 1$, alors

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{(n-1)}} + C,$$

et si $n = 1$, alors

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \ln(|x-a|) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, où $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

13. En utilisant la décomposition en éléments simples, calculer les primitives suivantes :
(a) $\int \frac{x^3 dx}{x^2+1}$, (b) $\int \frac{dx}{x(1+x)^2}$, (c) $\int \frac{dx}{4x^2-3x+2}$, (d) $\int \frac{x^2 dx}{x^4-1}$, (e) $\int \frac{(x-1)dx}{(1+x)^3(x-2)}$.

Solution. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

(a) C'est clair que

$$\int \frac{x^3 dx}{x^2+1} = \int x dx - \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$$

(b) On voit que

$$\int \frac{dx}{x(1+x)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + \frac{1}{(x+1)} + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(c) C'est clair que

$$\int \frac{dx}{4x^2-3x+2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-\frac{3}{8})^2+\frac{23}{64}} = \frac{2\arctan\left(\frac{8x-3}{\sqrt{23}}\right)}{\sqrt{23}} + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(d) On voit que

$$\int \frac{x^2dx}{x^4-1} = \int \left(\frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)}\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) + 2\arctan(x)\Big) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(e) On voit que

$$\int \frac{(x-1)dx}{(1+x)^3(x-2)} = \int \left(-\frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{3(x+1)^2} + \frac{1}{9(x-2)}\right)dx$$
$$= \frac{1}{9}\Big(-\frac{6}{x+1} + \ln(|x-2|) + \ln(|x+1|)\Big) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

14. Calculer
(a) $\int \frac{dx}{49-4x^2}$, (b) $\int \frac{(5x-12)dx}{x(x-4)}$, (c) $\int \frac{(37-11x)dx}{(x+1)(x-2)(x-3)}$, (d) $\int \frac{(2x^2-15x+33)dx}{(x+1)(x-5)}$, (e) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1}$, (f) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$.

Solution. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

(a) C'est clair que

$$\int \frac{dx}{49-4x^2} = \frac{1}{28}\int \left(\frac{1}{7+2x} + \frac{1}{7-2x}\right)dx = \frac{1}{28}\ln\left(\left|\frac{2x+7}{2x-7}\right|\right) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\pm 7/2\}$.

(b) On voit que

$$\int \frac{(37-11x)dx}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \int \left(-\frac{5}{x-2} + \frac{4}{x+1} + \frac{1}{x-3}\right)dx$$
$$= -5\ln(|x-2|) + \ln(|x-3|) + 4\ln(|x+1|) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 3\}$.

(c) C'est clair que

$$\int \frac{(2x^2-15x+33)dx}{(x+1)(x-5)} = \int \left(2 + \frac{4}{3(x-5)} - \frac{25}{3(x+1)}\right)dx$$
$$= 2x + \frac{4}{3}\ln(|x-5|) - \frac{25}{3}\ln(|x+1|) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$.

(d) On voit que

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1} &= \int \left(\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{3}{2(x^2+x+1)}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{6}{(2x+1)^2+3}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+x+1) - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(e) Si l'on fait la substitution $y = x+2$, on voit que

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \int \frac{dx}{\left((x+2)^2+1\right)^2} &= \int \frac{dy}{(y^2+1)^2} \\ &= \int \frac{1+y^2}{(y^2+1)^2}dy - \int \frac{y^2dy}{(y^2+1)^2} = \arctan(y) - \int \frac{y^2dy}{(y^2+1)^2}.\end{aligned}$$

La dernière intégrale peut se calculer à partir d'une intégration par parties avec $u = y$ et $v' = -y/(y^2+1)^2$ (*i.e.* $v = 1/(2(y^2+1))$)

$$-\int \frac{y^2dy}{(y^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y^2+1} - \arctan(y)\right).$$

Finalement, la primitive est

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x^2+4x+5} + \arctan(x+2)\right) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

15. Calculer
(a) $\int \sin^3(x)dx$, (b) $\int \frac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}dx$, (c) $\int \sin(x/2)\cos(x/3)dx$, (d) $\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx$,
(f) $\int \frac{dx}{a+b\cos(x)}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > |b| > 0$.

Solution. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

(a) D'après l'exercice **6**, on voit que

$$\int \sin^3(x)dx = \frac{1}{3}\left(\cos^3(x) - 3\cos(x)\right) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(b) C'est clair que

$$\int \frac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}dx = \frac{1}{2+\cos(x)} + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(c) On voit que

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx = \int \left(\sin\left(\frac{x}{6}\right) + \sin\left(\frac{5x}{6}\right)\right)\frac{dx}{2} = -\frac{3}{5}\left(5\cos\left(\frac{x}{6}\right) + \cos\left(\frac{5x}{6}\right)\right) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}$, où l'on a utilisé l'identité

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big)/2.$$

(*d*) Si l'on fait la substitution $y = \tan(x)$, alors $\sin^2(x) = y^2/(1+y^2)$ et $dx = dy/(1+y^2)$. Cela implique que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx = \int \frac{1}{1+2y^2}dy &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}y)+C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\big(\sqrt{2}\tan(x)\big)+C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $]-\pi/2,\pi/2[$.

(*e*) Si l'on fait la substitution $y = \tan(x/2)$ (*i.e.* $\cos(x) = (1-y^2)/(1+y^2)$), alors $dx = 2dy/(1+y^2)$ et

$$\int \frac{dx}{a+b\cos(x)} = \int \frac{2dy}{(a+b)+(a-b)y^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan(x/2)\right)+C,$$

avec domaine de définition $]-\pi,\pi[$.

16. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer
(a) $\int \cos^n(\theta)d\theta$, (b) $\int \sin^n(\theta)d\theta$.

Solution. Voir l'exercice **16** de la fiche 1.

17. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $I_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ via

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

telle que $I_n(0) = 0$. Noter que $I_0(x) = x$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$I_n(x) = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}(x).$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On voit bien que

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)^n} - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^n} = I_{n-1}(x) - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^n}.$$

Pour la dernière intégrale on procède par intégration par parties avec $u = x$ et $v' = -x/(1+x^2)^n$ (*i.e.* $v = 1/(2(n-1)(1+x^2)^{n-1})$) pour obtenir

$$-\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Cela implique le résultat demandé.

18. *Primitives de fonctions du type* $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Par un changement de variables, se ramener a une forme canonique du type $f(x, \sqrt{x^2+1})$, $f(x, |x-1|)$, $f(x, \sqrt{x^2-1})$ ou $f(x, \sqrt{1-x^2})$, puis effectuer un autre changement de variables avec les fonctions sinus/cosinus trigonométriques ou hyperboliques.
Calculer
(a) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$, (b) $\int \sqrt{x^2-3x+2}dx$,
(c) $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$, (d) $\int \sqrt{-x^2+x+1}dx$.

Solution. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

(a) La substitution $x = 2y/(1+y^2)$ (*i.e.* $y = x/(1+\sqrt{1-x^2})$) nous dit que

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = 2\int \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{2}{1-y} + C = \frac{2(\sqrt{1-x^2}+1)}{\sqrt{1-x^2}+1-x} + C,$$

avec domaine de définition $]-1,1[$.

(b) La substitution $x - 3/2 = y/2$ nous dit que

$$\int \sqrt{x^2-3x+2}dx = \int \sqrt{y^2-1}dy = \frac{y}{2}\sqrt{y^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(|y+\sqrt{y^2-1}|\right) + C$$
$$= \frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2-3x+2} - \frac{1}{8}\ln\left(|2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}|\right) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\,]1,2[$.

(c) La substitution $x + 1/2 = \sqrt{3}y/2$ nous dit que

$$\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \int \sqrt{y^2+1}dy = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(|y+\sqrt{y^2+1}|\right) + C$$
$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}$.

(d) La substitution $x - 1/2 = \sqrt{5}y/2$ nous dit que

$$\int \sqrt{-x^2+x+1}dx = \int \sqrt{1-y^2}dy = \frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}\arcsin(y) + C$$
$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{-x^2+x+1} - \frac{5}{8}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) + C,$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\,](1-\sqrt{5})/2, (1+\sqrt{5})/2[$.

19. Calculer
(a) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(x-1)^2}$, (b) $\int \frac{x\sqrt{x}dx}{(x+1)^2}$.

Solution. Dans les résultats suivants $C \in \mathbb{R}$ dénote une constante quelconque.

(*a*) On utilise la substitution $y = \sqrt{x}$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}dx}{(x-1)^2} &= 2\int \frac{y^2 dx}{(y^2-1)^2}\\ &= 2\int \left(\frac{1}{4(y+1)^2} - \frac{1}{4(y+1)} + \frac{1}{4(y-1)^2} + \frac{1}{4(y-1)}\right)dy\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) - \frac{2y}{y^2-1}\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|\right) - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}\right) + C,\end{aligned}$$

avec domaine de définition $\mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$.

(*b*) On utilise la substitution $y = \sqrt{x}$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sqrt{x}dx}{(x+1)^2} = 2\int \frac{y^4 dx}{(y^2+1)^2} &= 2\int \left(1 + \frac{1}{(y^2+1)^2} - \frac{2}{(y^2+1)}\right)dy\\ &= 2y + \left(\frac{y}{1+y^2} + \arctan(y)\right) - 4\arctan(y) + C\\ &= \frac{\sqrt{x}(2x+3)}{1+x} - 3\arctan(\sqrt{x}) + C,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'exercice **17**. Le domaine de définition respectif est $\mathbb{R}_{>0}$.

20. (*a*) Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)e^{ax}$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et a un réel, est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax} + C$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et C est une constante.

(*b*) Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)\cos(\alpha x)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et α un réel, est de la forme $x \mapsto Q_1(x)\cos(\alpha x) + Q_2(x)\sin(\alpha x) + C$, où Q_1 et Q_2 sont des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ et C est une constante.

Solution.

(*a*) On procède par récurrence sur le degré de P. Si $\deg(P) \leq 0$, alors $P = c \in \mathbb{R}$ et on pose $Q(x) = c/a$. On suppose que l'énoncé est vrai pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à $d \in \mathbb{N}^*$. On va le démontrer pour le cas où P a degré d. Comme $(Q(x)e^{ax} + C)' = (Q'(x) + aQ(x))e^{ax}$, il suffit de montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'(x) + aQ(x) = P(x)$. Soit $P = cx^d + \bar{P}$, avec $c \neq 0$ et $\bar{P}$ de degré strictement inférieur à d. On pose $R = cx^d/a$. C'est clair que $R' + aR - P$ est un polynôme de degré strictement inférieur à d. Par l'hypothèse de la récurrence, on sait qu'il existe un polynôme T tel que $T' + aT = R' + aR - P$. Alors $Q = R - T$ satisfait la propriété demandée.

(*b*) Le même argument que celui donné pour l'item précédent est aussi valable dans ce cas.