UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
LICENCE DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION MATHÉMATIQUES
L3B : CALCUL INTÉGRAL ET PROBABILITÉS
PARTIEL
6 MARS 2020
DURÉE : 2 HEURES

Documents, téléphones portables, calculatrices, ordinateurs, tablettes interdits. Une attention particulière sera portée au soin et à la précision de la rédaction. L'exercice 4 contient des questions de cours.

Exercice 1

Existence et calcul de :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+\frac{k}{n}).$$

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel. On considère la fonction 2π-périodique ϕ qui sur $[-\pi, +\pi[$ coïncide avec $x \mapsto e^{\alpha x}$.

(1) Montrer que ϕ est continue par morceaux et décrire ses points de discontinuité.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $c_n(\phi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(3) En déduire la valeur de

$$S(\alpha) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}.$$

Exercice 3

(1) Soit $x > 0$ un réel. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ est absolument convergente.

(2) Montrer que la fonction $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$$

est de classe C^1.

(3) Montrer que F vérifie $F' - F = -1/x$.

(4) Montrer que

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0.$$

(5) En déduire que

$$F(x) = e^x . \int_x^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{u}.$$

Exercice 4

Dans cet exercice, si $A \subset X$ est une partie de l'ensemble $X = [0,1]$, on désigne par $\mathbb{I}_A$ la fonction caractéristique (ou indicatrice) de A. On désigne par $\mathcal{A} =< INT >$ l'algèbre de Boole engendrée par les intervalles.

(1) Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?
   (a) une réunion finie d'intervalles contenus dans $[0,1]$ est dans $\mathcal{A}$.
   (b) Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les réunions finies disjointes d'intervalles contenus dans $[0,1]$.
   (c) $\{\frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est un élément de $\mathcal{A}$.

(2) Rappeler la définition d'une fonction en escalier sur X relativement à $\mathcal{A}$

(3) Montrer que $\mathbb{I}_A$ est une fonction en escalier sur X relativement à $\mathcal{A}$ si et seulement si $A \in \mathcal{A}$. Indication : On pourra calculer $\mathbb{I}_A^{-1}(1)$.

(4) Soit $\rho : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction continue positive. Montrer que la fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mu(A) = \int_0^1 \rho . \mathbb{I}_A$$

est une mesure booléenne finie. A quelle condition est-ce une mesure de probabilité ?