UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
LICENCE DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION MATHÉMATIQUES
L3B : CALCUL INTÉGRAL ET PROBABILITÉS
PARTIEL
6 MARS 2020
DURÉE : 2 HEURES

Documents, téléphones portables, calculatrices, ordinateurs, tablettes interdits. Une attention particulière sera portée au soin et à la précision de la rédaction. L'exercice 4 contient des questions de cours.

Exercice 1

Existence et calcul de :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+\frac{k}{n}).$$

Il s'agit d'une somme de Riemann pour la fonction continue $f(x) = \ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0,1]$ attachée à une subdivision régulière de pas $1/n$. Ce pas tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc la suite considérée converge vers :

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = [(x+1)\ln(1+x) - x]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel. On considère la fonction 2π-périodique ϕ qui sur $[-\pi, +\pi[$ coïncide avec $x \mapsto e^{\alpha x}$.

(1) Montrer que ϕ est continue par morceaux et décrire ses points de discontinuité.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $c_n(\phi),\ n \in \mathbb{Z}$.

(3) En déduire la valeur de

$$S(\alpha) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}.$$

1) La fonction est manifestement continue sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et présnte une discontinuité en $\pi + 2k\pi$ car la limite à gauche y est $e^{\alpha\pi} > 1$ tandis que la limite à droite est $e^{-\alpha\pi} < 1$.

2) $c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}[\frac{e^{(\alpha-in)x}}{\alpha-in}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi})}{2\pi(\alpha-in)} = (-1)^n\frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi(\alpha-in)}$.

3) La formule de Parseval donne l'absolue convergence et le calcul de la série double :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha x}dx = \frac{\sinh(2\alpha\pi)}{2\pi\alpha}$$

Cela fournit
$$\frac{\sinh^2(\alpha\pi)}{\pi^2}(2S(\alpha)+\frac{1}{\alpha^2})=\frac{\sinh(2\alpha\pi)}{2\pi\alpha}.$$
Puis :
$$S(\alpha)=\frac{1}{2}(\frac{\sinh(2\alpha\pi)\pi^2}{2\pi\alpha\sinh^2(\alpha\pi)}-\frac{1}{\alpha^2}).$$

Exercice 3

(1) Soit $x>0$ un réel. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ est absolument convergente.
(2) Montrer que la fonction $F:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par
$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}dt$$
est de classe C^1.
(3) Montrer que F vérifie $F'-F=-1/x$.
(4) Montrer que
$$\lim_{x\to\infty}F(x)=0.$$
(5) En déduire que
$$F(x)=e^x.\int_x^{+\infty}e^{-u}\frac{du}{u}.$$

1) Cette integrale a la forme $\int_0^{+\infty}f(t,x)dt$ avec $|f(t,x)|\le e^{-tx}$. Comme $x>0$ $\int_0^{+\infty}e^{-tx}dt<\infty$. Donc l'integrale est absolument convergente.

2) La fonction $(t,x)\mapsto f(t,x)$ est de classe C^1. Fixons $x_0>0$. On a pour $x>x_0$ $|f(t,x)|\le e^{-tx_0}$ et $|\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)|\le e^{-tx_0}$. Par suite la condition de domination du théorème de dérivation sous le signe intégral est satisfaite uniformément en $x>x_0$. Donc F est de classe C^1 sur $]x_0+\infty[$.

3) Ce théorème donne :
$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{-te^{-xt}}{1+t}dt$$
Donc
$$F'(x)-F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{(-1-t)e^{-xt}}{1+t}dt=-\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=-\frac{1}{x}.$$

4) Comme $\lim_{x\to\infty}f(t,x)=0$ pour tout $t>0$, la même condition de domination qu'a la question 2 permet d'appliquer le theoreme de convergence dominée et d'obtenir que $F(x)\to 0$ quand $x\to\infty$.

5) $\frac{d}{dx}e^x.\int_x^{+\infty}e^{-u}\frac{du}{u}=e^x.\int_x^{+\infty}e^{-u}\frac{du}{u}-e^x\frac{e^{-x}}{x}$.
Donc $x\mapsto e^x.\int_x^{+\infty}e^{-u}\frac{du}{u}$ est une solution particuliere de $y'-y=1/x$.
Donc $F(x)=Ae^x+e^x.\int_x^{+\infty}e^{-u}\frac{du}{u}=F_A(x)$ pour un certain $A\in\mathbb{R}$.
Mais $0\le e^x.\int_x^{+\infty}e^{-u}\frac{du}{u}\le e^x\frac{1}{x}\int_x^{+\infty}e^{-u}du=1/x\to 0$ quand $x\to\infty$.

Si $A \neq 0$ il n'est pas possible que $F_A(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. Donc $A = 0$ grace a la question 4).

Exercice 4

Dans cet exercice, si $A \subset X$ est une partie de l'ensemble $X = [0,1]$, on désigne par $\mathbb{I}_A$ la fonction caractéristique (ou indicatrice) de A. On désigne par $\mathcal{A} =< INT >$ l'algèbre de Boole engendrée par les intervalles.

(1) Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?
   (a) une réunion finie d'intervalles contenus dans $[0,1]$ est dans $\mathcal{A}$.
   (b) Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les réunions finies disjointes d'intervalles contenus dans $[0,1]$.
   (c) $\{\frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est un élément de $\mathcal{A}$.
(2) Rappeler la définition d'une fonction en escalier sur X relativement à $\mathcal{A}$
(3) Montrer que $\mathbb{I}_A$ est une fonction en escalier sur X relativement à $\mathcal{A}$ si et seulement si $A \in \mathcal{A}$. Indication : On pourra calculer $\mathbb{I}_A^{-1}(1)$.
(4) Soit $\rho : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction continue positive. Montrer que la fonction $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\mu(A) = \int_0^1 \rho.\mathbb{I}_A$$
est une mesure booléenne finie. A quelle condition est-ce une mesure de probabilité ?

1) a et b sont vraies, c est fausse.
2) $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(X,\mathbb{R})$ ssi il existe $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$ et $\lambda_1, \ldots \lambda_N$ tels que
$$f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}.$$
3) Le cas $N = 1$ $\lambda_1 = 1$ donne $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{I}_A \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(X,\mathbb{R})$.

Un lemme du cours nous dit que si $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(X,\mathbb{R})$ $f^{-1}(1) \in \mathcal{A}$. Or $\mathbb{I}_A^{-1}(1) = A$. Donc $A \in \mathcal{A} \Leftarrow \mathbb{I}_A \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}(X,\mathbb{R})$.

4) Tout d'abord veérifions que μ est bien définie. En effet le produit d'une fonction en escalier par une fonction continue est continue par morceaux donc $\rho\mathbb{I}_A$ est continue par morceaux.

Il faut vérifier que $\mu(A) \geq 0$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \emptyset$. Le premier point résulte de $\rho \geq 0$.

Pour le second cas, observons que si A et B sont disjoints $\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B$. Donc, par linearite de $\int$:
$$\mu(A \cup B) = \int_0^1 \rho\mathbb{I}_{A\cup B} = \int_0^1 \rho(\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B) = \int_0^1 \rho\mathbb{I}_A + \int_0^1 \rho\mathbb{I}_B = \mu(A) + \mu(B)$$

C'est une probabilité booléenne ssi $\int_0^1 \rho = 1$.