UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
LICENCE DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION MATHÉMATIQUES
L3B : CALCUL INTÉGRAL ET PROBABILITÉS
CORRIGÉ EXAMEN SESSION 1

Notations : Dans tout ce qui suit, si $A \subset X$ est une partie d'un ensemble X, on désigne par $\mathbb{I}_A$ la fonction caractéristique (ou indicatrice) de A. D'autre part si T est une variable aléatoire on note $\mathbb{E}(T)$ son espérance mathématique.

Exercice 1

On considère la fonction 2π-périodique ϕ qui sur $[-\pi, +\pi]$ coïncide avec $x \mapsto x^2$.

(1) Calculer les coefficients de Fourier de ϕ.

(2) En déduire la valeur de

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Solution

(1) La fonction ϕ est continue 2π-périodique. Son n-ème coefficient de Fourier est par définition

$$c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi(t) e^{-int} dt.$$

On calcule donc pour $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_n(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t^2 e^{-int} dt, \\
&\overset{IPP}{=} \frac{1}{2\pi} [t^2 \frac{e^{-int}}{-in}]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{2}{2\pi in} \int_{-\pi}^{+\pi} t e^{-int} dt, \\
&= \frac{1}{\pi in} \int_{-\pi}^{+\pi} t e^{-int} dt \\
&\overset{IPP}{=} \frac{1}{\pi in} [t \frac{e^{-int}}{-in}]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{1\pi i^2 n^2} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int} dt. \\
&= \frac{1}{\pi in} [t \frac{e^{-int}}{-in}]_{-\pi}^{+\pi} \\
&= \frac{-2\pi}{\pi n^2} = -\frac{2}{n^2}.
\end{aligned}$$

D'un autre coté $c_0(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} [\frac{t^3}{3}]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{\pi^2}{3}$.

(2) L'égalité de Parseval valide pour ϕ continue par morceaux 2π -péridique est la relation :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(\phi)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\phi(t)|^2 dt.$$

On calcule $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\phi(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t^4 dt = \frac{1}{2\pi}[\frac{t^5}{5}]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{\pi^4}{5}$.

D'où $\frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{\pi^4}{5}$. Puis $8\zeta(4) = \frac{4\pi^4}{45}$ et :

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2

Soit Z une variable aléatoire gaussienne centrée de variance 1, c'est à dire une variable aléatoire réelle dont la densité de probabilité est donnée par :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(|Z|^n)$ est fini.

(2) Établir une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(Z^n)$ et $\mathbb{E}(Z^{n+2})$.

(3) Calculer $\mathbb{E}(Z^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Indication : on pourra vérifier que $\displaystyle\prod_{k=0}^{m-1}(2k+1) = \frac{(2m)!}{2^m m!}$.

Solution

(1) Dire que $\mathbb{E}(|Z|^n)$ est fini revient à dire, dans le cas d'une v.a. de densité de probabilité continue p, que l'intégrale impropre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^n p(t) dt$$

est absolument convergente ou mëme seulement convergente puisque l'intégrand est positif.

On a $e^{-t^2/2} = o(e^{-t})$ et $|t|^n = o(e^{t/2})$ donc $|t^n|e^{-t^2/2} = o(e^{-t/2})$ et l'intégrale impropre définissant $\mathbb{E}(|Z|^n)$ est bien convergente.

Donc $\mathbb{E}(|Z|^n) < +\infty$.

(2) $\mathbb{E}(Z^{n+2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Integrant par parties : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = [-t^{n+1}e^{-\frac{t^2}{2}}]_{-\infty}^{+\infty} + (n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Ou encore $\mathbb{E}(Z^{n+2}) = (n+1)\mathbb{E}(Z^n)$.

(3) Si n est impair $\mathbb{E}(Z^n) = 0$. Si $n = 2m$ est pair, la relation précédente donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^{2m}) &= (2m-1)(2m-3)\ldots 1.\mathbb{E}(|Z|^0) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1}(2k+1) \\ &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \end{aligned}$$

On a utilisé que $\mathbb{E}(|Z|^0) = \mathbb{E}(1) = 1$ ce qui traduite que la densité p est bien une densité de probabilités.

La relation suggérée dans l'énoncé se prouve par récurrence sur $m \geq 1$. C'est clair pour $m = 1$, où la relation suggérée se spécifie à $1 = 2/2$. Pour passer de m a $m+1$ il suffit d'observer que :

$$\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}(m+1)!} / \frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m+2)(2m+1)}{2(m+1)} = 2m+1.$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne standard

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

On pose $B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$. On se propose de calculer $V_n(R) = Vol(B_n(R))$.

(1) Calculer $V_1(R)$ et, en utilisant un changement de coordonnées polaires, $V_2(R)$.

(2) Montrer que $V_n(R) = V_n(1)R^n$.

(3) Soit $G \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ On considère la fonction

$$g_k = \sum_{i=0}^{k-1} G(\frac{i}{k})\mathbb{I}_{\{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \frac{i}{k} < \|x\| \leq \frac{i+1}{k}\}}.$$

Montrer que $(g_k)_{k \geq 1}$ est une suite de fonctions Riemann-Intégrables qui converge uniformément sur $B_n(1)$ vers la fonction continue g définie par $g(x) = G(\|x\|)$.

(4) Montrer que

$$\int_{B_n(1)} g = nV_n(1) \int_0^1 G(u)u^{n-1}du.$$

Indication : on pouura utiliser le théorème des accroissements finis.

(5) Soit $\alpha > 0$. Calculer $\int_{B_n(R)} \|x\|^\alpha dx_1 \ldots dx_n$ en fonction de $V_n(1), n, R, \alpha$.

(6) Montrer que

$$V_{n+2}(1) = \pi \int_{B_n(1)} (1 - \|x\|^2)dx_1 \ldots dx_n.$$

(7) En déduire la relation de récurrence $V_{n+2}(1) = \frac{2\pi}{n+2}V_n(1)$.

(8) Montrer que $V_{2m}(1) = \frac{\pi^m}{m!}$ et que $V_{2m+1}(1) = \frac{2^{2m+1}m!}{(2m+1)!}\pi^m$ pour $m \in \mathbb{N}$.

Solution

R est bien sûr un réel positif.

(1) $B_1(R) = [-R, +R]$ et en dimension 1 volume signifie longueur. De là $V_1(R) = 2R$.

$$\begin{aligned}V_2(R) &= \int_{B_2(R)} 1.dxdy \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} 2\pi \\ &= \pi R^2.\end{aligned}$$

(2) L'homothétie m_R de rayon R établit un C^1-difféomorphisme de $B_n(1)$ sur $B_n(R)$ donc on peut utiliser la formule du changement de variable sous les intégrales multiples. On a $|det(Jac(m_R))| = |det(R.I_n)| = R^n$. Donc :

$$V_n(R) = \int_{B_n(R)} 1 = \int_{B_n(1)} |det(Jac(m_R))| = V_n(1)R^n.$$

(3) On sait puisqu'on l'a vu en cours que les boules fermées sont cubables donc comme les cubables sont stables par différence les parties $E_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{i}{k} < \|x\| \leq \frac{i+1}{k}\}$ sont cubables. Donc leur indicatrice est Riemann-intégrable. Donc g_k qui est une combinaison linéaire d'indicatrice de parties Riemann-intégrable est R-intégrable aussi.

Les parties $E_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{i}{k} < \|x\| \leq \frac{i+1}{k}\}$ forment une partition de $B_n(1)$. Si $x \in B_n(1)$ on note $i(x)$ l'unique entier tel que $x \in E_{i(x)}$. On observe que $|g(x) - g_k(x)| \leq |G(\|x\|) - G(\frac{i(x)}{k})|$.

La fonction G étant continue sur $[0, 1]$ elle y est uniformément continue et donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|t - t'| < \delta$ implique $|G(t) - G(t')| < \epsilon$.

Si $k > \frac{1}{\delta}$ on a donc $\|g_k - g\|_\infty \leq \epsilon$. Par suite $(g_k)_{k\geq 1}$ converge uniformément vers g.

(4) Il s'ensuit que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_n(1)} g_k = \int_{B_n(1)} g.$$

Calculons pour $i \leq k-1$ l'intégrale $I_{i,k,n} := \int_{B_n(1)} \mathbb{I}_{\{x\in\mathbb{R}^n \mid \frac{i}{k} < \|x\| \leq \frac{i+1}{k}\}}$. On a

$$\mathbb{I}_{\{x\in\mathbb{R}^n \mid \frac{i}{k} < \|x\| \leq \frac{i+1}{k}\}} = \mathbb{I}_{B_n(\frac{i+1}{k})} - \mathbb{I}_{B_n(\frac{i}{k})},$$

donc $I_{i,k,n} = \int_{B_n(1)} \mathbb{I}_{B_n(\frac{i+1}{k})} - \mathbb{I}_{B_n(\frac{i}{k})} = \int_{B_n(1)} \mathbb{I}_{B_n(\frac{i+1}{k})} - \int_{B_n(1)} \mathbb{I}_{B_n(\frac{i}{k})} = V_n(\frac{i+1}{k}) - V_n(\frac{i}{k})$. Avec la question précédente, on trouve

$$I_{i,k,n} = V_n(1)((\frac{i+1}{k})^n - (\frac{i}{k})^n).$$

Par linéarité de l'intégrale, il suit que

$$\int_{B_n(1)} g_k = S_k = V_n(1).\sum_{i=0}^{k-1} G(\frac{i}{k}).((\frac{i+1}{k})^n - (\frac{i}{k})^n).$$

Par le théorème des accroissements finis $((\frac{i+1}{k})^n - (\frac{i}{k})^n) = n\frac{1}{k}(c_i)^{n-1}$ avec $\frac{i}{k} < c_i < \frac{i+1}{k}$.

Donc $\frac{S_k}{nV_n(1)} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} G(\frac{i}{k})c_i^{n-1}$. $\frac{S_k}{nV_n(1)}$ est presque égal à la somme de Riemann pour la fonction $u \mapsto u^{n-1}g(u)$ donnée par $S_k' = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} G(c_i)c_i^{n-1}$.

En fait, par uniforme continuité de G pour tout $\epsilon > 0$ si $k > \frac{1}{\delta}$ la différence est plus petite que $\epsilon\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} c_i^{n-1}$ qui est de la forme ϵT_k ou T_k est une somme de Riemann pour $u \mapsto u^{n-1}$. T_k tend vers une limite finie et est donc bornée en valeur absolue par M. Par suite si $k > \frac{1}{\delta}$ on a : $|\frac{S_k}{nV_n(1)} - S_k'| \leq M\epsilon$ donc $\lim_{k\to\infty} \frac{S_k}{nV_n(1)} - S_k' = 0$.

Or $\lim_{k\to\infty} S_k' = \int_0^1 u^{n-1}G(u)du$. D'où le résultat.

(5) Pour $R = 1$ on a par la question précédente

$$\int_{B_n(1)} \|x\|^\alpha dx_1 \dots dx_n = nV_n(1)\int_0^1 u^{\alpha+n-1}du = \frac{nV_n(1)}{n+\alpha}.$$

Le changement de variable de (2) donne : $\int_{B_n(1)} \|x\|^\alpha dx_1 \dots dx_n = \frac{nV_n(1)}{n+\alpha}R^{n+\alpha}$.

(6) On applique Fubini en utilisant $\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$. Cela donne :

$$Vol(B_{n+2}(1)) = \int_{B_n(1)} Aire(B_{n+2}(1) \cap x \times \mathbb{R}^2)dx_1 \dots dx_n$$

Comme $B_{n+2}(1) \cap x \times \mathbb{R}^2$ est un disque de $\mathbb{R}^2$ de rayon $\sqrt{1 - \|x\|^2}$, son aire est $\pi(1 - \|x\|^2)$.

(7) Les questions precedentes donnent : $V_{n+2}(1) = \pi V_n(1)(1 - \frac{n}{n+2})$

(8) Posons $a_m = V_{2m}(1)$. On a $a_{m+1} = \frac{2\pi}{2m+2}a_m = \pi a_m/(m+1)$. C'est à dire $a_m = \pi^{m-1}a_1/m!$ et $V_{2m}(1) = \frac{\pi^m}{m}$.

De même pour V_{2m+1}.

Problème

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On pose $S_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$.

On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{k|X_1|}) < +\infty$ et que X_1 est une variable ayant une densité de probabilité continue.

Première Partie

(1) Montrer que $\mathbb{E}(e^{sX_1}) < +\infty$ pour tout $s \in [-k, k]$.

(2) Montrer que $s \mapsto \mathbb{E}(e^{sX_1})$ est de classe C^1 sur $]-k, k[$ et calculer sa dérivée en 0.

(3) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\mathbb{E}(X_1) = 0$. On fixe $1 > \epsilon > 0$ et $s \in]0, k[$. Montrer que :

$$P(\{e^{s(X_1+\ldots+X_n)} \geq e^{ns\epsilon}\}) \leq e^{-ns\epsilon}\mathbb{E}(e^{sX_1})^n.$$

(4) Montrer qu'il existe $s \in]0, k[$ tel que $e^{-s\epsilon}\mathbb{E}(e^{sX_1}) < 1$. En déduire qu'il existe $1 > q > 0$ tel que :

$$0 \leq P(\{S_n > \epsilon\}) \leq q^n.$$

(5) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(\{|S_n| > \epsilon\}) < +\infty$.

Seconde Partie

On considère une suite de membres $(A_n)_{n\geq 1}$ de la tribu $\mathcal{F}$.

(1) On considère pour $M \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire $N_M = \sum_{n=1}^{M} \mathbb{I}_{A_n}$. Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$N_M(\omega) := Card(\{1 \leq i \leq M \mid \omega \in A_i\}).$$

(2) Montrer que pour tout $L \in \mathbb{N}^*$ on a $P(N_M \geq L) \leq L^{-1} \sum_{n=1}^{M} P(A_n)$.

(3) Montrer que $B_L = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \{N_M \geq L\} \in \mathcal{F}$ et que :

$$\omega \in B_L \Leftrightarrow Card(\{i \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_i\}) \geq L.$$

(4) En déduire que si $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$ on a $\lim_{L\to\infty} P(B_L) = 0$

(5) Montrer qu'il existe $\Omega' \in \mathcal{F}$ tel que $P(\Omega') = 1$ et

$$\forall \omega \in \Omega' \quad Card(\{i \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_i\}) < +\infty.$$

(6) Conclure que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = \mathbb{E}(X_1)$ est dans $\mathcal{F}$ et que sa probabilité vaut 1 [1].

Solution

(I.1) Pour $|s| \leq k$ on a $0 \leq e^{sX_1} \leq e^{k|X_1|}$. Donc $0 \leq \mathbb{E}(e^{sX_1}) \leq \mathbb{E}(e^{k|X_1|}) < +\infty$.

(I.2) Soit p la densité de probabilité de X_1. On a

$$\mathbb{E}(e^{sX_1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} p(t) dt.$$

On a $\frac{\partial}{\partial s} e^{st} p(t) = t e^{st} p(t)$ donc

$$|\frac{\partial}{\partial s} e^{st} p(t)| \leq |t| e^{(k-\epsilon)|t|} p(t) \leq c_\epsilon e^{k|t|} p(t)$$

pour un certain $c_\epsilon > 0$ si du moins $|s| \leq k - \epsilon$ où on a introduit un $\epsilon > 0$ auxiliaire.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|t|} p(t) dt = \mathbb{E}(e^{k|X_1|}) < +\infty$, nous avons exactement la condition de domination du thérorme de dérivation sous le signe $\int$ des intégrales impropres donné en cours comme corollaire du théorème de convergence dominée.

Il suit que $s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} p(t) dt$ est dérivable sur $] - k + \epsilon, k + \epsilon[$ de dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbb{E}(e^{sX_1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{st} p(t) dt = \mathbb{E}(X_1 e^{sX_1})$$

1. Et non S_n/n comme dans l'énoncé distribué.

Le théorème de continuité sous le signe $\int$ s'applique encore à cause de la condition de domination $|te^{st}p(t)| \leq c'_\epsilon e^{k-\frac{\epsilon}{2}|t|}p(t)$ pour $|s| \leq k-\epsilon$ et donc cette dérivée est continue donc la fonction considérée est bien de classe C^1. En particulier posant $s=0$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}(e^{sX_1})|_{s=0} = \mathbb{E}(X_1).$$

(I.3) On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff pour la v.a. Y :

$$\forall \lambda > 0 \quad P(\{|Y| \geq \lambda\}) \leq \lambda^{-1}\mathbb{E}(|Y|).$$

On applique ceci avec $Y = e^{s(X_1+\ldots+X_n)} > 0$ $\lambda = e^{ns\epsilon}$:

$$P(\{e^{s(X_1+\ldots+X_n)} \geq e^{ns\epsilon}\}) \leq e^{-ns\epsilon}\mathbb{E}(Y).$$

Maintenant $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(e^{sX_1}\ldots e^{sX_n})$. Les X_i étant indépendants les e^{sX_i} le sont aussi. Or si on a n v.a. indépnedantes $Y_1,\ldots,Y_n$ $\mathbb{E}(Y_1\ldots Y_n) = E(Y_1)\ldots E(Y_n)$. Donc $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(e^{sX_1})\ldots\mathbb{E}(e^{sX_n})$. Mais comme les X_i sont iodentiquement distribuées $\forall i \quad \mathbb{E}(e^{sX_i}) = \mathbb{E}(e^{sX_1})$. Donc $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(e^{sX_1})^n$.

L'inégalité demandée s'ensuit immédiatement.

(I.4) On observe d'abord que comme $s > 0$,

$$S_n > \epsilon \leftrightarrow e^{s(X_1+\ldots+X_n)} > e^{ns\epsilon}\}.$$

Comme $P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$, $P(e^{s(X_1+\ldots+X_n)} > e^{ns\epsilon}) \leq P(e^{s(X_1+\ldots+X_n)} \geq e^{ns\epsilon})$.

De là, avec la question précédente, $P(S_n > \epsilon) \leq (e^{-s\epsilon}\mathbb{E}(e^sX_1))^n$ pour tout $0 < s < k$.

Comme $\frac{\partial}{\partial s}e^{-s\epsilon}\mathbb{E}(e^{sX_1})|_{s=0} = -\epsilon + \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}(e^{sX_1})|_{s=0} \overset{\mathbb{E}(X_1)=0}{=} -\epsilon < 0$, il suit qu'il existe $k > s_0 > 0$ tel que $e^{-s_0\epsilon}\mathbb{E}(e^{s_0X_1}) = q < e^{-s\epsilon}\mathbb{E}(e^{sX_1})|_{s=0} = 1$.

Donc il existe $1 > q > 0$ tel que :

$$0 \leq P(\{S_n > \epsilon\}) \leq q^n.$$

(I.5) Avec $-X_i$ on obtient qu'il existe $1 > q_- > 0$ tel que :

$$0 \leq P(\{S_n < -\epsilon\}) \leq q_-^n.$$

Comme $P(\{|S_n| > \epsilon\}) = P(\{S_n < -\epsilon\}) + P(\{S_n > \epsilon\})$ il suit que $P(\{|S_n| > \epsilon\})$ est borné par la somme de deux suites géométriques de raison < 1 et donc que la série $\sum P(\{|S_n| > \epsilon\})$ converge absolument. Ce qui est la conclusion recherchée.

(II.1)

On calcule $N_m(\omega) = \sum_{n=1}^M \mathbb{I}_{A_n}(\omega) = \sum_{n=1,\omega\in A_n}^M 1 = Card(\{1 \leq i \leq M \ |\omega \in A_i\})$.

(II.2) L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff assure que :

$$P(N_M \geq L) \leq L^{-1}\mathbb{E}(N_M).$$

Mais $\mathbb{E}(N_M) = \displaystyle\sum_{n=1}^M \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A_n}) = \sum_{n=1}^M P(A_n)$. L'inégalité recherchée s'ensuit.

(II.3) Comme les v.a. deéfinies sur $(\Omega,\mathcal{F})$ forment un espace vectoriel et que $\mathbb{A}_\ltimes \in \mathbb{F}$ donc $\mathbb{I}_{A_n}$ est une v.a. deéfinie sur $(\Omega,\mathcal{F})$ N_m est une v.a. deéfinie sur $(\Omega,\mathcal{F})$ en particulier $\{N_M \geq L\} = N_M^{-1}([L,+\infty[) \in \mathbb{F}$. B_L étant union dénombrable de membres de la tribu $\mathcal{F}$ il suit que $B_L \in \mathcal{F}$.

Si $\omega \in B_L$ il existe $M > 0$ tel que $\omega \in \{N_M \geq L\}$ et donc

$$Card(\{i \in \mathbb{N} \,|\omega \in A_i\}) \geq Card(\{1 \leq i \leq M \,|\omega \in A_i\}) \geq L.$$

Si $Card(\{i \in \mathbb{N} \,|\omega \in A_i\}) \geq L$ comme on déduit qu'il existe $i_1 < i_2 < \ldots < i_L$ tel que $\omega \in A_{i_j}$. En particulier $Card(\{1 \leq i \leq i_L \,|\omega \in A_i\}) \geq L$. C'est à dire $N_{i_L}(\omega) \geq L$. Donc $\omega \in \{N_{i_L} \geq L\}$ puis $\omega \in B_L$.

(II.4) Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$. On a $P(\{N_M \geq L\}) \leq L^{-1}S$ indépndamment de M. Il suit que $\lim_{L\to\infty} P(\{N_M \geq L\}) \leq L^{-1}S$. Mais comme B_L est une union croissante des $N_M \geq L$ on a $P(B_L) = \lim_{L\to\infty} P(\{N_M \geq L\})$ en raison d'un corollaire de l'additivité dénombrable vu en cours.

Donc $B(B_L) \leq L^{-1}S$.

En particulier $\lim_{L\to\infty} P(B_L) = 0$.

(II.5) $E = \cap_{L>0} B_L = \cap_{n\in\mathbb{N}*} B_n \in \mathcal{F}$. On $E \subset B_L$ donc $P(E) \leq P(B_L)$. La question précédente donne $P(E) = 0$.

On pose $\Omega' = E^c$. Alors $\Omega' \in \mathcal{F}$ et $P(\Omega') = 1$. Mais par (II.3) $\omega \in E$ si et seulement si $Card(\{i \in \mathbb{N} \,|\omega \in A_i\}) = +\infty$.

(II.6) Quitte a changer X_i en $X_i - \mathbb{E}(X_1)$ on peut supposer $\mathbb{E}(X_1) = 0$.

Fixons $q \in \mathbb{N}^*$ et posons $\epsilon = 1/q > 0$. Par (I.5) $\sum_{n=1}^{+\infty} P(|S_n| > 1/q) < +\infty$.

Il existe alors Ω'_q tel que $P(\Omega'_q) = 1$ et tel que si $\omega \in \Omega'_q$ on a $|S_n(\omega)| > 1/q$ pour seulement un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$. En particulier $\exists N(\omega) > 0 \; n \geq N(\omega) \Rightarrow |S_n(\omega)| \leq 1/q$.

On a $\Omega^* = \cap_{q\in\mathbb{N}^*} \Omega'_q \in \mathcal{F}$ $P(\Omega^*) = 1$. Si $\omega \in \Omega^*$ on a :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \exists N(\omega) > 0 \; n \geq N(\omega) \Rightarrow |S_n(\omega)| \leq 1/q,$$

c'est à dire $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0$.

En remarquant que Ω' construit au (II.5) est exactement l'ensemble de ω vérifiant $Card(\{i \in \mathbb{N} \,|\omega \in A_i\}) < +\infty$ on voit aussi que Ω^* est l'ensemble des ω tels que $S_n(\omega)$ tend vers 0.

Remarque : le résultat (II.5) est appelé lemme de Borel-Cantelli et (II.6) la loi forte des grands nombres.