1
2
3

MAT35B - ALGÈBRE L3A

Premier Semestre — 2022-2023

Soutien d'Algèbre L3A

Justifier toutes les réponses

---

1. Soit G un groupe avec élément neutre 1_G.

(a) Montrer que l'on définit une action de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(G)$ sur G en posant $\varphi \bullet g = \varphi(g)$ pour $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(G)$ et $g \in G$.

(b) Montrer que l'action précédente se restreint en une action de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(G)$ sur l'ensemble $G \setminus \{1_G\}$.

(c) Soit G le groupe sous-jacent d'un $\Bbbk$-espace vectoriel, où $\Bbbk$ est un corps. Montrer que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(G)$ agit transitivement sur $G \setminus \{1_G\}$.

(d) Montrer que, si $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(G)$ agit transitivement sur $G \setminus \{1_G\}$, alors tous les éléments de $G \setminus \{1_G\}$ ont le même ordre.

(e) On suppose désormais que $G \neq \{1_G\}$ et que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(G)$ agit transitivement sur $G \setminus \{1_G\}$. Soit $d \in \mathbb{N}_{\geq 2} \sqcup \{\infty\}$ l'ordre de tout élément $g \in G \setminus \{1_G\}$.

(i) Montrer que, si d est fini, alors d est premier.

(ii) Montrer que, si G est fini, $\mathscr{Z}(G) \neq \{1_G\}$, où $\mathscr{Z}(G)$ designe le centre de G. En déduire que G est abélien dans ce cas.

(iii) Montrer que, si G est abélien et d est fini, l'application $\rho : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times G \to G$ donnée par $\rho(\bar{n}, g) = g^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $g \in G$ est bien définie et induit une structure de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$-espace vectoriel sur G.

⋆ (iv) Montrer que, si G est abélien et $d = \infty$, il existe une application $\rho : \mathbb{Q} \times G \to G$ qui induit une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel sur G.

(f) Utiliser les items précédents pour montrer que tout groupe fini non trivial G sur lequel $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(G)$ agit transitivement est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ avec $p, n \in \mathbb{N}^*$ et p premier.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier. On écrira $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soient E un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathrm{L}(E)$ un endomorphisme linéaire de E.

(a) Trouver la factorisation de $X^p - X$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_p[X]$.

(b) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $u^p = u$.

(c) Montrer que u est trigonalisable si et seulement si $u^p - u$ est nilpotent.

3. Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ trois nombres premiers avec $p < q < r$, et soit G un groupe d'ordre pqr. On notera $N_i = \#(\{H \leq G : H\ i\text{-sous-groupe de Sylow de } G\})$ pour $i \in \{p, q, r\}$.

Suite à la page suivante →

(a) Montrer que $N_p = 1$ ou $N_p \geq q$.

(b) Montrer que $N_r = 1$ ou $N_r = pq$.

(c) Montrer que

$$1 + N_p(p-1) + N_q(q-1) + N_r(r-1) \leq pqr. \tag{1}$$

(d) Utiliser l'item précédent pour montrer que G n'est pas simple.

4. Soit $A = \{P \in \mathbb{Q}[X] : P(0) \in \mathbb{Z}\}$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.

(a) Montrer que A est un anneau intègre et que $A^\times = \{\pm 1\}$.

(b) Montrer que $P \in A$ et $P(0) = 0$, alors $m \in \mathbb{Z}$ divise P pour tout $m \in \mathbb{Z}$ non nul.

(c) Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$ est un nombre premier, alors p est irréductible dans A.

(d) Déduire des question précédentes que X possède une infinité de diviseurs irréductibles deux à deux non associés.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = (X/2^n)$ l'idéal de A engendré par $X/2^n$. Soit $I = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Montrer que I est un idéal de A.

(f) Montrer que $X/2^{n+1} \in I_{n+1} \setminus I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(g) On suppose qu'il existe $P \in A$ tel que $I = (P)$.

(i) Montrer que qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $I \subseteq I_{n_0}$.

(ii) Obtenir une contradiction et en déduire que I n'est pas principal.