
MAT35B - L3A ALGÈBRE

Premier semestre — 2022-2023

Fiche 7: Dualité et réduction d'endomorphismes

Espace vectoriel dual

- ★ 1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{k} , et \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . On notera $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Montrer que ${}^t(P^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'^*\mathcal{B}^*}$. En déduire que toute base de E^* est la duale d'une base de E .
2. Soient E et F deux \mathbb{k} -espaces vectoriels de dimension finie, et b une forme bilinéaire sur $E \times F$. On définit les applications linéaires $\ell_b : E \rightarrow F^*$ et $\nu_b : F \rightarrow E^*$ via $\ell_b(x) = b(x, \cdot) \in F^*$ et $\nu_b(y) = b(\cdot, y) \in E^*$, respectivement, pour tous $x \in E$ et $y \in F$.
- Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . On note $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_m^*)$ et $\mathcal{B}'^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ les bases duales, et A la matrice de coefficients $a_{i,j} = b(e_i, f_j)$ pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (a) Déterminer la matrice de ν_b dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{B}'^* , et celle de ℓ_b dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}^* .
- (b) En déduire que ℓ_b est bijective, si et seulement si ν_b est bijective, si et seulement si A est inversible. On dit dans ce cas que b est **non dégénérée**.
3. Soit E un espace vectoriel. On rappelle que, étant donné des parties $\Phi \subseteq E^*$ et $S \subseteq E$, on définit le **sous-espace vectoriel orthogonal** à Φ et le **sous-espace vectoriel orthogonal** à S par

$$\Phi^\perp = \{v \in E : \phi(v) = 0 \text{ pour tout } \phi \in \Phi\}$$

et

$$S^\perp = \{\phi \in E^* : \phi(v) = 0 \text{ pour tout } v \in S\},$$

respectivement.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ des formes linéaires sur un \mathbb{k} -espace vectoriel E . On note f l'application de E dans \mathbb{k}^ℓ définie par $f(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_\ell(x))$ pour tout $x \in E$ et $F = \text{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\varphi_\ell)$.

- (a) Montrer que la famille $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}$ est libre si et seulement si f est surjective. **Indication** : montrer l'équivalence des négations et noter que f n'est pas surjective si et seulement si son image est contenue dans un hyperplan de \mathbb{k}^ℓ .
- (b) On suppose que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}$ est libre. Soit (c_1, \dots, c_ℓ) la base canonique de \mathbb{k}^ℓ . D'après la question précédente, on peut choisir des antécédents e_1, \dots, e_ℓ de c_1, \dots, c_ℓ par f . Montrer que $E = F \oplus \text{Vect}_{\mathbb{k}}\langle\{e_1, \dots, e_\ell\}\rangle$. En déduire que, étant donné $\psi \in E^*$, $\psi \in \text{Vect}_{\mathbb{k}}\langle\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}\rangle$ si et seulement si l'on a l'inclusion $\text{Ker}(\psi) \supseteq \text{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\varphi_\ell)$.

- (c) Soit $\Phi \subseteq E^*$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'inclusion $\Phi \subseteq (\Phi_\perp)^\perp$ est une égalité.
- (d) Montrer que l'équivalence $\psi \in \langle \{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\} \rangle$ si et seulement si

$$\text{Ker}(\psi) \supseteq \text{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\varphi_\ell)$$

reste vraie même si $(\varphi_1, \dots, \varphi_\ell)$ n'est pas libre.

- (e) Trouver un \mathbb{k} -espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel Φ de E^* pour lequel l'inclusion $\Phi \subseteq (\Phi_\perp)^\perp$ est stricte.

Indication : pour $n \in \mathbb{N}$, noter φ_n l'application qui associe à un polynôme $P \in \mathbb{k}[X]$ le coefficient de X^n dans P , et ψ l'application qui associe $P(1)$ à un polynôme $P \in \mathbb{k}[X]$.

4. Soient E un \mathbb{k} -espace vectoriel F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

- (a) Montrer que $F = (F^\perp)_\perp$.
Indication : si $x \in E \setminus F$, utiliser un supplémentaire de $F + \mathbb{k}.x$ dans E pour construire une forme linéaire nulle sur F mais pas en x .
- (b) Montrer que F est de codimension finie si et seulement si F est une intersection finie d'hyperplans de E . De combien d'hyperplans a-t-on besoin ?
- (c) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- (d) Montrer que $(F \cap G)^\perp \supseteq F^\perp + G^\perp$. Qu'en déduit-on si E est de dimension finie ?
- (e) On suppose que E est de dimension finie. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F , qu'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) une base de E . En déduire une base de F^\perp .

5. Soient E un \mathbb{k} -espace vectoriel et $u \in L(E)$.

- (a) Soient F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F est stable par u si et seulement si F^\perp est stable par ${}^t u$.
Indication : la démonstration par équivalences est possible, en utilisant les égalités $F = (F^\perp)_\perp$.
- (b) On suppose que E est de dimension finie. Soit Φ un sous-espace vectoriel de E^* . Montrer que Φ est stable par ${}^t u$ si et seulement si Φ_\perp est stable par u .
- (c) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E . Montrer que l'hyperplan donné par $\text{Ker}(\varphi)$ est stable par u si et seulement si φ est un vecteur propre de l'endomorphisme ${}^t u$.

6. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et C un convexe fermé de E . À toute forme linéaire non nulle ϕ sur E et à tout réel β , on associe le demi-espace fermé $D_{\phi, \beta} = \{x \in E : \phi(x) \leq \beta\}$ et l'hyperplan affine $H_{\phi, \beta} = \{x \in E : \phi(x) = \beta\}$.

- (a) Montrer que $D_{\phi, \beta}$ est une partie convexe de E . Quelle est sa frontière ?
- (b) Montrer que C est l'intersection de demi-espaces fermés qui le contiennent.
Indication : munir E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $x \in E \setminus C$ et $C \neq \emptyset$, introduire la forme linéaire $\langle x - p_C(x), \cdot \rangle$, où $p_C(x)$ est la projection de x sur C .
- (c) Un point $c \in C$ est dit **extrémal** dans C si $C \setminus \{c\}$ est convexe. Montrer que c est extrémal si et seulement si, étant donnés $a, b \in C$, $(a + b)/2 = c$ implique $a = b = c$.
- (d) Soit $c \in C$. Montrer que s'il existe une forme linéaire non nulle ϕ sur E telle que $\phi(x) < \phi(c)$ pour tout $x \in C \setminus \{c\}$, alors c est extrémal dans C .
- (e) Dans cette question, on suppose que C est une intersection finie des demi-espaces fermés D_{ϕ_i, β_i} pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Étant donné $c \in C$, on définit l'ensemble

$I_c = \{i \in \llbracket 1, m \rrbracket : \phi_i(c) = \beta_i\}$. Montrer que $c \in C$ est extrémal dans C si et seulement si $(\phi_i)_{i \in I_c}$ engendre E^* .

- (f) Déterminer les points extrémaux du polyèdre de \mathbb{R}^2 défini par les inéquations $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + 2x_2 \leq 3$ et $2x_1 + x_2 \leq 3$.

Dual de l'espace vectoriel de matrices*

- * 7. Soient \mathbb{k} un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in M_n(\mathbb{k})$, on note ϕ_A la forme linéaire sur $M_n(\mathbb{k})$ définie par $\phi_A(M) = \text{Tr}(AM)$ pour $M \in M_n(\mathbb{k})$.
- (a) Calculer $\phi_{\iota_A}(M)$ en fonction des coefficients de A et de M .
- (b) Montrer que l'application $A \mapsto \phi_A$ est un isomorphisme de $M_n(\mathbb{k})$ vers $M_n(\mathbb{k})^*$ et que la forme bilinéaire b sur $M_n(\mathbb{k})$ définie par $b(M, N) = \text{Tr}(MN)$ est non dégénérée.
- (c) Quelles sont les formes linéaires sur $M_n(\mathbb{k})$ vérifiant $\phi(MN) = \phi(NM)$ pour tout M et N dans $M_n(\mathbb{k})$?

Double dual d'un espace vectoriel*

- * 8. Soit E un \mathbb{k} -espace vectoriel. On note $\iota_E : E \rightarrow E^{**} = (E^*)^*$ l'application donnée par $\iota_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$ pour tous $x \in E$ et $\varphi \in E^*$. Montrer que pour tout $u \in L(E)$, ${}^t({}^t u) \circ \iota_E = \iota_E \circ u$. En déduire que si E est de dimension finie, ${}^t({}^t u) = \iota_E \circ u \circ \iota_E^{-1}$.

Polynômes et endomorphismes

9. Soit \mathbb{k}, \mathbb{K} deux corps avec $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{K}$ et soit $A \in M_n(\mathbb{k})$. On rappelle que le **polynôme minimal** $\mu_{A, \mathbb{k}}$ de A dans $\mathbb{K}[X]$ est le générateur unitaire de l'idéal

$$I_{A, \mathbb{k}} = \{P \in \mathbb{K}[X] : P(A) = \mathbf{0}_{M_n(\mathbb{k})}\}$$

de $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbf{0}_{M_n(\mathbb{k})}$ désigne la matrice nulle de $M_n(\mathbb{k})$. Montrer que $\mu_{A, \mathbb{R}} = \mu_{A, \mathbb{C}}$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

10. Trouver deux matrices carrées non semblables de même polynôme minimal et de même polynôme caractéristique.

11. Soient \mathbb{k} un corps, E un \mathbb{k} -espace vectoriel, $f \in L(E)$ un endomorphisme linéaire, et P, Q deux polynômes de $\mathbb{k}[X]$. On pose

$$D = \text{PGCD}(P, Q) \text{ et } M = \text{PPCM}(P, Q).$$

Montrer que

$$\text{Ker}(D(f)) = \text{Ker}(P(f)) \cap \text{Ker}(Q(f)) \text{ et } \text{Ker}(M(f)) = \text{Ker}(P(f)) + \text{Ker}(Q(f)).$$

Réduction d'endomorphismes

12. Soient \mathbb{k} un corps, E un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme linéaire. On rappelle que, étant donné $v \in E$, le sous-espace vectoriel

$$E_{u,v} = \{P(u)(v) : P \in \mathbb{k}[X]\} = \text{Vect}_{\mathbb{k}} \left\langle \{u^k(v) : k \in \mathbb{N}\} \right\rangle$$

est appelé le **sous-espace cyclique associé** à v . On notera $I_{u,v}$ le noyau de l'application linéaire $\text{ev}_{u,v} : \mathbb{k}[X] \rightarrow E$ définie par $\text{ev}_{u,v}(P) = P(u)(v)$ pour tout $P \in \mathbb{k}[X]$.

- Montrer que $u(E_{u,v}) \subseteq E_{u,v}$ pour tout $v \in E$.
- Montrer que $I_{u,v}$ est un idéal de $\mathbb{k}[X]$ non réduit à $\{0\}$. Le **polynôme minimal** de u en v est le générateur unitaire $\mu_{u,v}$ de cet idéal.
- Soit d le degré de $\mu_{u,v}$. Montrer que $(v, u(v), \dots, u^{d-1}(v))$ est une base de $E_{u,v}$. Quelle est la dimension de $E_{u,v}$?
- Soit $u_v : E_{u,v} \rightarrow E_{u,v}$ l'endomorphisme linéaire donné par la restriction $u|_{E_{u,v}}$ de u . Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u_v , et redémontrer ainsi le théorème de Cayley-Hamilton pour u .
Indication : montrer que, étant donné $P \in \mathbb{k}[X]$, $P(u_v) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E_{u,v})}$ si et seulement si $P(u)(v) = \mathbf{0}_E$, et calculer la matrice de u_v dans la base donnée par $(v, u(v), \dots, u^{d-1}(v))$.
- Montrer que si $P \in \mathbb{k}[X]$, alors

$$P(u)(E_{u,v}) = E_{u,P(u)(v)} \text{ et } \mu_{u,v} = \text{PGCD}(P, \mu_{u,v}), \mu_{u,P(u)(v)}.$$

- Déterminer $E_{u,v}$ et $\mu_{u,v}$ si
 - $v = \mathbf{0}_E$;
 - v est un vecteur propre de u ;
 - il existe un entier $r > 1$ et des vecteurs propres v_1, \dots, v_r de u associés à des valeurs propres distinctes tels que $v = v_1 + \dots + v_r$.
- Montrer que si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , $I_{u,\mathbb{k}}$ est l'intersection des I_{u,e_k} et $\mu_{u,\mathbb{k}}$ est le PPCM des μ_{u,e_k} .
- Soit $\mu_{u,\mathbb{k}} = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mu_{u,\mathbb{k}}$, i.e. les polynômes P_k sont irréductibles et unitaires, P_i et P_j sont premiers entre eux pour $i \neq j$, et $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$.
 - Construire des vecteurs $v_1, \dots, v_r \in E$ tels que $\mu_{u,v_k} = P_k^{\alpha_k}$ pour tout k .
 - Montrer que les sous-espaces E_{u,v_k} sont en somme directe.
Indication : utiliser les noyaux $\text{Ker}(P_k^{\alpha_k}(u))$.
 - Soit $v = v_1 + \dots + v_r$. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mu_{u,v} = \mu_{u,\mathbb{k}}$. Retrouver ainsi que le $\deg(\mu_{u,\mathbb{k}}) \leq n$ sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.
- On dit que u est **cyclique** s'il existe $v \in E$ tel que $E_{u,v} = E$. Montrer que u est cyclique si et seulement si $\mu_{u,\mathbb{k}} = \chi_u$.
- Montrer que si u est cyclique et si F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors l'endomorphisme induit $u_F = u|_F : F \rightarrow F$ est cyclique.
Indication : fixer un vecteur $v \in E$ tel que $E_{u,v} = E$ et montrer que l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{k}[X] : P(u)(v) \in F\}$ est un idéal de $\mathbb{k}[X]$.

13. Soient E un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice d , i.e. d est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$.

- Montrer qu'il existe $a \in E$ et $\varphi \in E^*$ tels que $\varphi(u^{d-1}(a)) \neq 0$.
- Montrer que $\{a, u(a), \dots, u^{d-1}(a)\}$ et $\{\varphi, \varphi \circ u, \dots, \varphi \circ u^{d-1}\}$ sont libres.
- On note F et Φ le sous-espace vectoriel engendré par ces familles. Montrer que F et Φ_{\perp} sont stables par u et supplémentaires.
- En déduire par récurrence sur la dimension de E qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de Jordan nilpotents sur la diagonale, i.e. de la forme

$$J_{d'} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{d'}(\mathbb{k}),$$

avec $0 < d' \leq d$.

14. Soit E un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'on dispose d'un polynôme P annulateur de u , unitaire et scindé qu'on décompose en facteurs irréductibles de la forme

$$P = (X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_r)^{m_r}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note $E_i = \text{Ker}(u - \alpha_i \text{id}_E)^{m_i}$.

- Montrer que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$.
Indication : utiliser le théorème de décomposition des noyaux.
- Soient $p_1, \dots, p_r : E \rightarrow E$ les projections associées à la décomposition d'espaces vectoriels $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$. Montrer que chaque E_i est stable par u , et en déduire que u commute avec chaque projection p_i .
- On note $u|_{E_i} : E_i \rightarrow E_i$ l'endomorphisme induit par u sur E_i . Montrer que $u|_{E_i} - \alpha_i \text{id}_{E_i}$ est nilpotent. En utilisant l'exercice précédent, en déduire que dans une base convenable u admet une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de Jordan sur la diagonale (i.e. de la forme $J_{d'} + \alpha_i I_{d'}$, avec $0 < d' \leq m_i$).
- Soient $d = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r$ et $v = u - d$. Montrer que d est diagonalisable, v est nilpotent, d et v commutent.

15. Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ admettant un polynôme annulateur scindé est trigonalisable.

16. Soient E un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et χ_u le polynôme caractéristique de u . On se propose de montrer que si u est trigonalisable alors χ_u est scindé et $\chi_u(u) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$. Pour cela, on prend une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure et on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u dans \mathcal{B} . Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $F_k = \langle \{e_1, \dots, e_k\} \rangle$.

- Que vaut χ_u ?
- Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(u - a_{k,k} \text{id}_E)(F_k) \subseteq F_{k-1}$.
- Conclure.

Calcul de formes de Jordan

17. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f ait une forme réduite de Jordan.

18. Soit $\mathbb{C}[X]_{\leq 4}$ l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à 4 à coefficients complexes et soit $f : \mathbb{C}[X]_{\leq 4} \rightarrow \mathbb{C}[X]_{\leq 4}$ l'application linéaire définie par $f(P) = 2P(X+1) - P(X+2)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]_{\leq 4}$. Trouver une base de $\mathbb{C}[X]_{\leq 4}$ dans laquelle la matrice de f ait une forme réduite de Jordan.

19. Soit \mathbb{k} un corps de caractéristique zéro et soient a et b dans \mathbb{k} . Donner la décomposition de Dunford de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

20. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le polynôme minimal μ_{f, e_i} associé au vecteur e_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
- En déduire le polynôme minimal $\mu_{f, \mathbb{R}}$ et le polynôme caractéristique χ_f .
- Soit $\psi : \mathbb{R}[X] \rightarrow L(\mathbb{R}^3)$ le morphisme d'anneaux défini par $\psi(P) = P(f)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - Quel est le noyau de ψ ?
 - On note $B = \text{Im}(\psi)$. C'est clairement un sous-anneau et aussi un sous-espace vectoriel de $L(\mathbb{R}^3)$. Quelle est sa dimension comme espace vectoriel sur \mathbb{R} ?
 - L'anneau B est-il intègre ?
 - L'endomorphisme f est-il un élément inversible de l'anneau B ?
- Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 2X + 2)$ est isomorphe au corps \mathbb{C} .
- Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\gamma : B \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tel que $\gamma(f) = (i - 1, 5)$.
- Vérifier que γ est \mathbb{R} -linéaire et bijective.

21. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

- Soit $f : E \rightarrow E$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calculer le polynôme minimal μ_{f,e_i} associé au vecteur e_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
(ii) En déduire le polynôme minimal $\mu_{f,\mathbb{R}}$ et le polynôme caractéristique χ_f .
- (b) Soit $h : E \rightarrow E$ un endomorphisme linéaire vérifiant $h^3 + h = \mathbf{0}_{L(E)}$.
- (i) Quelles sont les différentes possibilités pour le polynôme minimal $\mu_{h,\mathbb{R}}$ et pour le polynôme caractéristique χ_h d'un tel endomorphisme ?
(ii) Un tel endomorphisme h peut-il être injectif ?
(iii) Quelles sont les différentes possibilités pour la dimension du noyau de $h^2 + \text{id}_E$?
(iv) Montrer que la matrice de h dans la base \mathcal{B} est ou bien nulle ou bien semblable à la matrice A .
22. (a) Soit $S = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, et $r = p/q$. Montrer que si r est racine de S , alors q divise a_d et que p divise a_0 dans \mathbb{Z} .
(b) On fixe désormais $S = X^3 + X + 1$. Montrer que le polynôme S est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
(c) On note L l'anneau quotient $\mathbb{Q}[X]/(S)$. Montrer que L est un corps.
(d) On considère le \mathbb{Q} -espace vectoriel $E_1 = \mathbb{Q}^3$, et un endomorphisme linéaire $f : E_1 \rightarrow E_1$ tel que $f^3 + f + \text{id}_{E_1} = \mathbf{0}_{L(E_1)}$. Quel est le polynôme minimal de f ?
(e) Montrer que l'on peut définir une structure de L -espace vectoriel sur E_1 en définissant une loi externe par $\bar{P} \cdot v = P(f)(v)$, pour tout $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $v \in E_1$.
(f) Montrer qu'il existe une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel E_1 dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (g) Quelle est la dimension de E_1 en tant que L -espace vectoriel ?
(h) On considère le \mathbb{Q} -espace vectoriel $E_2 = \mathbb{Q}^6$ et un endomorphisme $f : E_2 \rightarrow E_2$ tel que $h^3 + h + \text{id}_{E_2} = \mathbf{0}_{L(E_2)}$. Quel est le polynôme minimal de h ?
(i) Montrer que l'on peut définir une structure de L -espace vectoriel sur E_2 en définissant une loi externe par $\bar{P} \cdot v = P(h)(v)$, pour tout $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $v \in E_2$.
(j) Quelle est la dimension de E_2 en tant que L -espace vectoriel ?
(k) Montrer que tout endomorphisme g du \mathbb{Q} -espace vectoriel E_2 vérifiant l'identité $g^3 + g + \text{id}_{E_2} = \mathbf{0}_{L(E_2)}$ est un conjugué de h .
23. Soit $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer μ_{f,e_1} .
(b) En déduire $\mu_{f,\mathbb{C}}$ et χ_f .
(c) Calculer le polynôme dérivé χ'_f .
(d) Calculer le PGCD des polynômes χ_f et χ'_f .
(e) En déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Endomorphismes des espaces euclidiens*

- * 24. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit j l'application de E dans E^* définie par $j(x) = \langle x, \cdot \rangle$.

- (a) Montrer que j est un isomorphisme de E sur E^* .
 (b) Soit \mathcal{B} une base de E . À quelle condition la base $j(\mathcal{B})$ est-elle duale de \mathcal{B} ?
 (c) Montrer que pour tout sous-espace F de E , l'orthogonal $F^\perp \subseteq E^*$ de F dans E^* coïncide avec l'image par j de l'orthogonal

$$F^{\perp, b} = \{w \in E : \langle w, v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in F\}$$

de F dans E .

- (d) Soit $u \in L(E)$. Montrer que l'adjoint de u relatif à b est donné par

$$u^*(x) = j^{-1}(j(x) \circ u),$$

pour tout $x \in E$, et que ${}^t u = j \circ u^* \circ j^{-1}$. Dans une base orthonormée de E , quelle relation y a-t-il entre la matrice de u^* et celle de u ?

- * 25. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ le produit scalaire. Pour tous vecteurs x, y, z , on note $[x, y, z]$ le produit mixte de x, y, z , défini comme le déterminant de (x, y, z) dans n'importe quelle base orthonormée directe de E . Noter que cela ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe. On rappelle que l'application de E^3 dans \mathbb{R} donnée par $(x, y, z) \mapsto [x, y, z]$ est trilinéaire alternée, donc antisymétrique. Pour tous vecteurs u et v de E , il existe un unique vecteur noté $u \wedge v$ tel que la forme linéaire $[u, v, \cdot]$ soit égale au produit scalaire par $u \wedge v$, i.e. $[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$ pour tous $u, v, w \in E$.

- (a) Montrer que si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe, alors $e_1 \wedge e_2 = e_3$.
Indication : montrer que les formes linéaires $\langle e_1 \wedge e_2, \cdot \rangle$ et $\langle e_3, \cdot \rangle$ sont égales.

- (b) Montrer que l'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ de E^2 dans E est bilinéaire.

- (c) Soient u et v de E . Montrer que

(i) $v \wedge u = -u \wedge v$;

(ii) $u \wedge v$ est orthogonal à u et v ;

(iii) si u et v sont colinéaires, $u \wedge v = \mathbf{0}_E$;

(iv) si u et v ne sont pas colinéaires, $u \wedge v \neq \mathbf{0}_E$ et $[u, v, u \wedge v] > 0$ (i.e. $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E);

(v) si l'on suppose que u et v ne sont pas nuls, montrer que l'on peut trouver une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) et un réel $\theta \in [0, \pi]$ tels que $\|u\|^{-1}u = e_1$ et $\|v\|^{-1}v = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$.

Calculer $\langle u, v \rangle$ pour vérifier que θ est l'écart angulaire entre u et v et montrer que $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(\theta)$.

- * 26. Soit E un espace euclidien. Soit u un endomorphisme symétrique positif (i.e. $\langle x, u(x) \rangle > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$). On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u et E_1, \dots, E_r les sous-espaces propres associés.

- (a) Montrer que les valeurs propres de u sont positives.

- (b) Montrer que E_1, \dots, E_r sont orthogonaux deux-à-deux et de somme E .

- (c) On note $p_1, \dots, p_r : E \rightarrow E$ les projecteurs associés à la décomposition d'espaces vectoriels $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$. Montrer qu'ils sont symétriques et non négatifs (i.e. $\langle x, p_i(x) \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$).
- (d) En déduire un endomorphisme symétrique positif dont le carré est u .
- (e) Soit v un endomorphisme symétrique positif dont le carré est u . Montrer que v est l'endomorphisme de la question précédente.
- Indication :** montrer que les E_i sont stables par v , et montrer que les endomorphismes induits sont des homothéties.