MAT35B - L3A ALGÈBRE
Premier semestre — 2022-2023
Fiche 5: Produits semi-directs

1. (*a*) Soient K un corps et E un K-espace vectoriel. Soient F un sous-espace vectoriel de E et $p : E \to E/F$ la projection canonique. Montrer que pour tout supplémentaire S de F, la restriction $p|_S : S \to E/F$ est un isomorphisme.

(*b*) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Soit $p : G \to G/H$ la projection canonique. Peut-on toujours trouver un sous-groupe K de G tel que la restriction $p|_K : K \to G/H$ soit un isomorphisme ?

(*c*) Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G avec H distingué dans G. Soit $p : G \to G/H$ la projection canonique. Montrer que la restriction $p|_K : K \to G/H$ est un isomorphisme si et seulement si $G = H \rtimes K$.

2. Soit $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{k}$ et $\hat{k}$ les classes de k dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, respectivement.

(*a*) Soit $H_1 = \langle(\bar{2}, \hat{1})\rangle$. Existe-t-il un sous-groupe K de G tel que $G = H_1 \rtimes K$?

(*b*) Soit $H_2 = \langle(\bar{2}, \hat{0})\rangle$. Existe-t-il un sous-groupe K de G tel que $G = H_2 \rtimes K$?

3. (*a*) Montrer que les groupes $\mathbb{A}_4$ et $\mathbb{S}_4$ sont des produits semi-directs non triviaux.

(*b*) Qu'en est-il pour le groupe $\mathbb{S}_n$ avec $n \geq 5$?

(*c*) Qu'en est-il pour le groupe $\mathbb{A}_n$ avec $n \geq 5$?

4. (*a*) Donner un exemple de produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes_\rho \mathbb{R}$ avec $\rho : \mathbb{R} \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(\mathbb{R})$ non trivial.

(*b*) Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec p premier, à quelle condition peut-on définir un produit semi-direct $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes_\rho (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ avec $\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ non trivial ?

5. On considère les matrices suivantes

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$. On indique ci-dessous les produits non triviaux suivants, où l'élément de la rangée indexée par $M \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ et la colonne indexée par $N \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ est $M \times N$:

$\times$	M_1	M_2	M_3
M_1	$-M_0$	M_3	$-M_2$
M_2	$-M_3$	$-M_0$	M_1
M_3	M_2	$-M_1$	$-M_0$

(*a*) En déduire que l'ensemble $Q = \{\pm M_0, \pm M_1, \pm M_2, \pm M_3\}$ est un sous-groupe non abélien de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$.

(*b*) Montrer que tous les sous-groupes de Q sont distingués dans Q.

(*c*) Peut-on écrire Q comme produit semi-direct interne de deux sous-groupes non triviaux ?

6. On fixe un entier $n \geq 3$. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble $P_n = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$, où pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A_k est le point d'affixe $e^{2i\pi k/n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On note D_n le sous-groupe de $\mathsf{O}(\mathbb{R}^2)$ des isométries de $\mathbb{R}^2$ qui laissent l'ensemble P_n globalement invariant.

(a) En utilisant l'action naturelle du groupe D_n sur l'ensemble P_n, montrer que D_n est fini et $|\mathsf{D}_n| = 2n$.

(b) On note $H = \mathsf{D}_n \cap \mathsf{SO}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $|\mathsf{D}_n| = 2|H|$.

(c) Soient $s \in \mathsf{D}_n \setminus \mathsf{SO}(\mathbb{R}^2)$ et $K = \langle s \rangle$. Montrer que $\mathsf{D}_n = H \rtimes K$.

(d) Montrer que pour toute rotation r on a $srs^{-1} = r^{-1}$.

(e) En déduire que le produit $\mathsf{D}_n = H \rtimes K$ n'est pas direct.

(f) Dans le cas où $n = 6$, le groupe D_6 contient $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ et une rotation r d'ordre 3. Montrer que $\mathsf{D}_6 = H_1 \rtimes K_1$, où $H_1 = \langle r \rangle$, $K_1 = \langle -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, s \rangle$ et $s \in \mathsf{O}(\mathbb{R}^2) \setminus \mathsf{SO}(\mathbb{R}^2)$.

7. Soient H et K deux groupes et φ un morphisme de groupes de K dans $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(H)$. Montrer que le produit semi-direct $H \rtimes_\varphi K$ est abélien si et seulement si H et K sont abéliens et φ est trivial.

8. Soit E un K-espace vectoriel. On appelle T le groupe de translations de E, c'est-à-dire des applications de E dans E de la forme $\tau_c : x \mapsto x + c$ avec $c \in E$. On définit le groupe affine par

$$\mathsf{GA}(E) = \left\{ f \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(E) : \text{ il existe } g \in \mathsf{GL}(E) \text{ et } t \in \mathsf{T} \text{ tels que } f = t \circ g \right\}.$$

Pour $v \in E$, on pose $K_v = \{ f \in \mathsf{GA}(E) : f(v) = v \}$.

(a) Montrer que $\mathsf{GA}(E)$ est un groupe et $GL(E)$ et T des sous-groupes de $\mathsf{GA}(E)$.

(b) Montrer que $\mathsf{GA}(E) = \mathsf{T} \rtimes K_v$ pour tout $v \in E$. Ce produit est-il direct ?

9. Montrer qu'un groupe abélien fini est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

10. Quels sont les sous-groupes de Sylow de $\mathbb{A}_4$? de $\mathbb{S}_4$?

11. Soit G un groupe d'ordre 63.

(a) Montrer que G contient un unique sous-groupe d'ordre 7, qu'on notera H, et qu'il admet un sous-groupe K d'ordre 9.

(b) Montrer que G est produit semi-direct interne de H et K.

(c) Montrer que ce produit interne est direct si et seulement si K est l'unique sous-groupe d'ordre 9 dans G.

(d) Lorsque ce produit interne n'est pas direct, combien y a-t-il de sous-groupes d'ordre 9 dans G ?

(e) Construire un morphisme de groupe non trivial θ de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ vers $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ et en déduire un groupe d'ordre 63 ayant exactement 7 sous-groupes d'ordre 9.

12. Soient H et K deux groupes, et $\varphi, \psi : K \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(H)$ deux morphismes de groupes.

(a) On suppose qu'il existe un automorphisme $\alpha \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(K)$ tel que $\varphi = \psi \circ \alpha$. Montrer que l'application $f : H \times K \to H \times K$ définie par $f(h,k) = (h, \alpha(k))$ induit un isomorphisme de groupes de $H \rtimes_\varphi K$ vers $H \rtimes_\psi K$.

(b) Montrer que si H' est un sous-groupe isomorphe à H et K' est un sous-groupe isomorphe à K, alors $H \rtimes_\varphi K$ est isomorphe à un produit semi-direct $H' \rtimes_{\varphi'} K'$. **Indication :** construire un morphisme φ' de K' dans $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(H')$ à l'aide d'un isomorphisme f_H de H vers H', d'un isomorphisme f_K de K vers K' et de φ.

(c) Soient $\sigma \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(H)$ et $\alpha \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(K)$ tels que $\mathsf{Ad}_\sigma \circ \varphi = \psi \circ \alpha$, où l'on dénote $\mathsf{Ad}_\sigma : \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(H) \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(H)$ le morphisme de groupes qui associe $\sigma \circ \theta \circ \sigma^{-1}$ à $\theta \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(H)$. Montrer que l'application $F : H \times K \to H \times K$ définie par $f(h,k) = (\sigma(h), \alpha(k))$ induit un isomorphisme de groupes de $H \rtimes_\varphi K$ vers $H \rtimes_\psi K$.

13. Soient p et q deux entiers premiers avec $p < q$. On se propose de faire la liste des groupes d'ordre pq à isomorphisme près. Soit G un groupe d'ordre pq.

(a) Montrer que G contient un unique q-Sylow Q et que Q est distingué dans G.

(b) Soit P un p-Sylow de G. Montrer que $G = Q \rtimes P$.

(c) Montrer que $|\mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(Q)| = q - 1$ et décrire les éléments de $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Gr}}(Q)$.

(d) Montrer que si p ne divise pas $q-1$, alors $G = Q \times P$ et G est cyclique.

(e) Montrer que si p divise $q-1$, alors il existe exactement deux groupes d'ordre pq à isomorphisme près.

14. On se propose de faire la liste des groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.

(a) Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que le groupe G contient un sous-groupe distingué d'ordre 3 ou un sous-groupe distingué d'ordre 4.

(b) Utiliser l'item précédent pour montrer qu'il existe exactement cinq groupes d'ordre 12 à isomorphisme près. Reconnaître $\mathbb{A}_4$ et D_6.