MAT35B - L3A ALGÈBRE

Premier semestre — 2023-2024

Fiche 4: Actions de groupes

1. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

(a) Montrer qu'on définit une G action de G sur $G/H = \{gH,\ g \in G\}$ par translation à gauche en posant $g \cdot C = gC = \{gx : x \in C\}$ pour tous $g \in G$ et $C \in G/H$.

(b) Montrer que cette action est transitive.

(c) Soit $a \in G$. Quel est le stabilisateur de aH ?

2. Soit G un groupe. On suppose que G possède un sous-groupe H d'indice fini m.

(a) Montrer que H contient un sous-groupe K distingué dans G, d'indice au plus $m!$ dans G.

(b) Qu'en déduit-on si G est d'ordre strictement plus grand que $m!$?

(c) Quel résultat retrouve-t-on si $m = 2$?

(d) On suppose que G est fini d'ordre n. Soit p le plus petit diviseur premier de n. Montrer que si H est d'indice p dans G, alors H est distingué dans G.

3. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Soient $x \in X$, $S_x = \mathsf{Stab}(x)$ et p_x la projection canonique de G sur G/S_x.

(a) Soit $f_x : G \to \mathsf{Orb}(x)$ l'application définie par $f_x(g) = g.x$. Montrer qu'il existe une unique application $\bar{f}_x : G/S_x \to \mathsf{Orb}(x)$ telle que $f_x = \bar{f}_x \circ p_x$ et que cette application $\bar{f}_x$ est bijective.

(b) Le groupe G agit d'une part sur G/S_x et d'autre part sur $\mathsf{Orb}(x)$. Montrer que $\bar{f}_x(g \cdot C) = g \cdot \bar{f}_x(C)$ pour tous $g \in G$ et $C \in G/S_x$.

(c) En déduire que $S_{a \cdot x} = \mathsf{Stab}(aS_x) = aS_x a^{-1}$, pour tout $a \in G$.

(d) Quel est le noyau du morphisme $\phi_x : G \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(\mathsf{Orb}(x))$ associé à l'action de G sur $\mathsf{Orb}(x)$?

4. Soit G un groupe. On note $\mathsf{Subgr}(G)$ l'ensemble de ses sous-groupes.

(a) Montrer qu'on définit une action de G sur $\mathsf{Subgr}(G)$ par conjugaison en posant $g \cdot H = gHg^{-1}$, pour tous $g \in G$ et $H \in \mathsf{Subgr}(G)$.

(b) Cette action peut-elle être transitive ?

(c) Quels sont les points fixes pour cette action ?

5. Soient K un corps et E un K-espace vectoriel. On considère l'action naturelle de $\mathsf{GL}(E)$ sur E, définie par $g \cdot v = g(v)$, pour tous $g \in \mathsf{GL}(E)$ et $v \in E$.

(a) Montrer que cette action possède précisément deux orbites : $\{\mathbf{0}_E\}$ et $E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$.

(b) Montrer que cette action de groupe fournit un morphisme injectif de $\mathsf{GL}(E)$ dans $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(E \setminus \{\mathbf{0}_E\})$.

(c) En prenant $E = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, en déduire un isomorphisme entre $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\mathbb{S}_3$.

6. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on considère l'action naturelle de $\mathsf{O}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^3$. Soit $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

(*a*) Montrer que l'orbite de v est $S(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}, \|v\|) = \{w \in \mathbb{R}^3 : \|w\| = \|v\|\}$.

(*b*) Établir une bijection entre $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \cap \mathsf{Stab}(v)$ et $\mathsf{Stab}(v) \setminus \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$, et montrer que $\mathsf{Stab}(v) \setminus \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ ne contient que des réflexions.

(*c*) Soit $P = (\mathbb{R}v)^\perp$. Montrer que les groupes $\mathsf{Stab}(v)$ et $\mathsf{O}(P)$ sont isomorphes.

(*d*) Soit H le sous-groupe de $\mathsf{O}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{1\times 2}} \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2\times 1}} & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathsf{O}_2(\mathbb{R})$. Déduire des questions précédentes une bijection entre la sphère de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et de rayon $\|v\|$, et l'ensemble quotient $\mathsf{O}_3(\mathbb{R})/H$.

7. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble S des 8 sommets d'un cube centré en $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ (pour fixer les idées, on peut prendre les points de coordonnées ± 1). On note G le sous-groupe de $\mathsf{O}(\mathbb{R}^3)$ des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laissent l'ensemble S globalement invariant, $G^+ = G \cap \mathsf{SO}(\mathbb{R}^3)$ et $G^- = G \setminus \mathsf{SO}(\mathbb{R}^3)$.

(*a*) Utiliser l'action naturelle du groupe G sur S pour montrer que G est fini.

(*b*) En utilisant la symétrie centrale de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, montrer que $|G^-| = |G^+|$.

(*c*) On cherche à compter les éléments de G^+.

- (i) Donner des exemples d'isométries qui appartiennent à G^+.
- (ii) Le groupe G^+ agit sur l'ensemble des sommets du cube. Montrer que cette action est transitive, déterminer le stabilisateur d'un sommet et en déduire que G^+ contient exactement 24 isométries.
- (iii) Faire la liste de toutes les isométries de G^+.

(*d*) Puisque G^+ est un groupe d'ordre 24 on peut se demander s'il est isomorphe à $\mathbb{S}_4$. Pour cela on cherche à faire agir G^+ sur un ensemble de 4 éléments attenant au cube. Soit D l'ensemble des 4 grandes diagonales du cube. L'action naturelle de G sur D fournit un morphisme $\phi : G^+ \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(D)$.

- (i) Montrer que chaque transposition de $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(D)$ a un antécédent par ϕ.
- (ii) En déduire que le morphisme ϕ est surjectif, et enfin qu'il est bijectif.

(*e*) Construire un isomorphisme de groupe de $G^+ \times \{\pm \mathsf{id}_{\mathbb{R}^3}\}$ sur G.

(*f*) Soient S_1 l'ensemble des sommets d'un parallélépipède centré en $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et G_1 le sous-groupe de $\mathsf{GL}(\mathbb{R}^3)$ des isomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui laissent l'ensemble S_1 globalement invariant. Montrer que les groupes G et G_1 sont conjugués dans $\mathsf{GL}(\mathbb{R}^3)$.

⋆ **8.** *Isométries d'un tétraèdre régulier.* Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. On considère les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 donnés par

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*a*) Calculer les produits scalaires $\langle v_i, v_j \rangle$. Que vaut $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$?

(*b*) Soit $\sigma \in \mathbb{S}_4$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u_\sigma \in \mathsf{L}(E)$, telle que $u_\sigma(v_j) = v_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in [\![1, 4]\!]$. Montrer que $u_\sigma \in \mathsf{O}(E)$.

(*c*) Montrer que l'application $\sigma \mapsto u_\sigma$ est un isomorphisme entre $\mathbb{S}_4$ et le groupe des isométries vectorielles préservant $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

(d) Donner la nature de u_σ en fonction de la structure de σ. Que vaut $\det u_\sigma$?

9. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble fini X. On note X/G l'ensemble des orbites sous cette action. Pour $g \in G$ on note $\mathsf{Fix}(g)$ l'ensemble des éléments de X qui sont fixés par g. En calculant de deux façons différentes le cardinal de l'ensemble $S = \{(g,x) \in G \times X : g.x = x\}$, montrer la formule de Burnside

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathsf{Fix}(g)|.$$

10. Soient X et Y deux ensembles, G un groupe agissant sur X au moyen du morphisme de groupes $\phi : G \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(X)$.

(a) Montrer qu'on définit une action de $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(X)$ sur Y^X par $\sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$, pour tous $\sigma \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(X)$ et $f \in Y^X$.

(b) Montrer que l'on définit une action de G sur Y^X par $g \bullet f = f \circ \phi(g)^{-1}$, pour tous $g \in G$ et $f \in Y^X$.

(c) Soient $g \in G$ et $f \in Y^X$. Montrer que $g \bullet f = f$ si et seulement si f est constante sur chaque orbite de $\phi(g)$.

11. Dans $\mathbb{R}^3$, on fixe un cube centré en $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$. Soit S l'ensemble des sommets et X l'ensemble des faces du cube. On fixe un ensemble Y de $n \in \mathbb{N}^*$ couleurs. On note G le sous-groupe de $\mathsf{O}(\mathbb{R}^3)$ des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laissent l'ensemble S globalement invariant.

(a) Montrer que le groupe G agit sur l'ensemble X.

(b) On appelle coloriage du cube toute application de X dans Y. Montrer que G agit sur l'ensemble des coloriages du cube.

(c) En utilisant la formule de Burnside, on va compter le nombre de coloriages possibles du cubes à rotation du cube près, c'est-à dire le nombre des orbites de l'action de $G^+ = G \cap \mathsf{SO}(\mathbb{R}^3)$ sur l'ensemble des coloriages.

- (i) Déterminer $|\mathsf{Fix}(r)|$ pour chaque rotation r appartenant à G^+.
- (ii) Conclure en utilisant la formule de Burnside.

12. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et G un groupe fini agissant linéairement sur E, *i.e.* pour tout $g \in G$, l'application $\rho_g : E \to E$ donnée par $v \mapsto g \cdot v$ est linéaire. On obtient ainsi un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathsf{GL}(E)$. Soient

$$F = \{v \in E : g \cdot v = v, \text{ pour tout } g \in G\} \text{ et } \pi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g).$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que π est un projecteur sur F. En déduire que $\mathsf{Tr}(\pi) = \dim(F)$.

13. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. À tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$ on associe l'endomorphisme $u_\sigma \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$u_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et P_σ la matrice de u_σ dans $\mathscr{B}$.

(a) Calculer $u_\sigma(e_j)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$. En déduire les coefficients de P_σ et montrer que u_σ est inversible.

(b) Montrer que l'application $\sigma \mapsto u_\sigma$ est un morphisme de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Calculer $\det(u_\sigma)$.

(d) Quels sont les vecteurs fixes de l'action correspondante de $\mathbb{S}_n$ sur $\mathbb{R}^n$?

(e) Déterminer le polynôme caractéristique de u_σ en fonction du type de σ. On se ramènera au cas où chaque orbite de σ est constituée d'entiers consécutifs.

⋆ **14.** *Sous-groupes finis du groupe spécial orthogonal en dimension* 3. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et G un sous-groupe fini de $\mathsf{SO}(E)$ d'ordre $n \neq 1$. Pour tout $g \in G \setminus \{\mathsf{id}_E\}$, on note $D_g = \mathsf{Ker}(g - \mathsf{id}_E)$ l'axe de la rotation g. On note S la sphère unité de E et

$$F = \bigcup_{g \in G \setminus \{\mathsf{id}_E\}} (D_g \cap S).$$

(a) Montrer que F est fini et que tout élément de G induit une permutation de F.

(b) Soient $O_1, \ldots, O_s$ les orbites de l'action de G sur F rangées par cardinaux croissants. Pour $x \in F$, on note S_x le stabilisateur de x. Montrer que l'ordre de S_x est constant sur chaque orbite O_k. Dans la suite, on note n_k cette constante.

(c) En calculant le cardinal de $D = \{(g, x) \in (G \setminus \{\mathsf{id}_E\}) \times F : g(x) = x\}$ de deux manières différentes, montrer que

$$2n - 2 = ns - \sum_{k=1}^{s} |O_k| \text{ et } 2 - \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{s} \Big(1 - \frac{1}{n_k}\Big).$$

(d) Montrer que l'on est dans l'un des cinq cas suivants :

(C.1) $s = 2$ et $n_1 = n_2 = n$;

(C.2) $s = 3$, n pair et $(n_1, n_2, n_3) = (n/2, 2, 2)$;

(C.3) $s = 3$, $n = 12$ et $(n_1, n_2, n_3) = (3, 3, 2)$;

(C.4) $s = 3$, $n = 24$ et $(n_1, n_2, n_3) = (4, 3, 2)$;

(C.5) $s = 3$, $n = 60$ et $(n_1, n_2, n_3) = (5, 3, 2)$.

Indication : montrer que $s \in \{2, 3\}$ et lorsque $s = 3$ montrer que $n_3 = 2$ et $n_2 \in \{2, 3\}$.

(e) Dans les deux premiers cas, montrer l'existence d'une droite stable par tous les éléments de G.

Remarque : on peut montrer que G est l'ensemble des rotations préservant un polygone régulier à n sommets dans le premier cas, et l'ensemble des isométries préservant un polygone régulier à $n/2$ sommets dans le deuxième. Les trois derniers cas sont plus difficiles. On peut montrer que dans ces cas, G est l'ensemble des rotations de E préservant un polyèdre régulier et que G est isomorphe à $\mathbb{A}_4$, $\mathbb{S}_4$ ou $\mathbb{A}_5$.

15. Soient X un ensemble fini et K un corps. Pour tout $x \in X$, on note δ_x l'application de X dans K qui associe 1 à x et 0 à tous les autres éléments de X.

(a) Montrer que $(\delta_x)_{x \in X}$ est une base du K-espace vectoriel K^X.

(b) Soient G un groupe agissant sur l'ensemble X et $\phi : G \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(X)$ le morphisme de groupes associé. Montrer que l'action du groupe G sur K^X définie par $g \cdot f = f \circ \phi(g)^{-1}$, pour tous $g \in G$ et $f \in K^X$, est linéaire. On notera $\rho : G \to \mathsf{GL}(K^X)$ le morphisme de groupes associé.

(*c*) Pour tout $g \in G$, on note $\mathsf{Fix}(g)$ l'ensemble des points fixes de $\phi(g)$. Montrer que $|\mathsf{Fix}(g)| = \mathsf{Tr}(\rho(g))$.

(*d*) Soit $F = \{v \in K^X : g \cdot v = v$ pour tout $g \in G\}$. Montrer qu'une application $f : X \to K$ appartient à F si et seulement si elle est constante sur chaque orbite de l'action de G sur X.

(*e*) En déduire que la dimension de F est $|X/G|$, où X/G désigne l'ensemble des orbites de l'action de G sur X.

(*f*) Retrouver la formule de Burnside, *i.e.*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathsf{Fix}(g)|.$$

16. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ et l'espace vectoriel A_n des applications polynomiales de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$.

(*a*) Définir une action linéaire non triviale du groupe $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ sur A_n.

(*b*) Soient G un sous-groupe de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ et $F = \{v \in A_n : g\cdot v = v$ pour tout $g \in G\}$. Montrer qu'une application polynomiale $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ appartient à F si et seulement si elle est constante sur chaque orbite de l'action de G sur $\mathbb{C}^n$.

(*c*) Lorsque $G = \{\pm \mathsf{id}_{\mathbb{C}^n}\}$, déterminer F.

17. Soit p un entier premier. On se propose de faire la liste des groupes d'ordre p^2 à isomorphisme près.

(*a*) Soit G un groupe. On suppose que le quotient de G par son centre est un groupe cyclique. Montrer que le groupe G est abélien.

(*b*) Soit G un groupe d'ordre p^2.

 (i) En utilisant l'action de G sur lui-même par conjugaison, montrer que le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre.

 (ii) Montrer que le groupe G est abélien.

 (iii) Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

18. *Petit théorème de Fermat.* Soient p un nombre premier et $a \in \mathbb{N}^*$. Soient A un ensemble à a éléments et $E = A^p$. On note $\gamma = (1 \quad 2 \quad \cdots \quad p) \in \mathbb{S}_p$.

(*a*) Montrer que la formule $\sigma\cdot(x_1,\dots,x_p) = (x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(p)})$ définit une action de $\langle\gamma\rangle$ sur E.

(*b*) Décrire l'orbite d'un élément $(x_1,\dots,x_p) \in E$.

(*c*) À l'aide de l'équation aux orbites, en déduire que $a^p \equiv a \pmod p$.

19. *Lemme de Cauchy.* Soit G un groupe fini d'ordre n et soit p un diviseur premier de n. On note $E = \{(x_1,\dots,x_p) \in G^p : x_1\cdots x_p = 1_G\}$ et $\gamma = (1 \quad 2 \quad \cdots \quad p) \in \mathbb{S}_p$.

(*a*) Montrer que la formule $\sigma\cdot(x_1,\dots,x_p) = (x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(p)})$ définit une action de $\langle\gamma\rangle$ sur E.

(*b*) Décrire l'orbite d'un élément $(x_1,\dots,x_p) \in E$.

(*c*) À l'aide de l'équation aux orbites, montrer que p divise le nombre de solutions de l'équation $x^p = 1_G$ dans G.

(*d*) En déduire que G possède au moins un sous-groupe d'ordre p.