
MAT35B - L3A ALGÈBRE
Premier semestre — 2022-2023

Fiche 4: Actions de groupes

1. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G .
 - (a) Montrer qu'on définit une G action de G sur $G/H = \{gH, g \in G\}$ par translation à gauche en posant $g \cdot C = gC = \{gx : x \in C\}$ pour tous $g \in G$ et $C \in G/H$.
 - (b) Montrer que cette action est transitive.
 - (c) Soit $a \in G$. Quel est le stabilisateur de aH ?
2. Soit G un groupe. On suppose que G possède un sous-groupe H d'indice fini m .
 - (a) Montrer que H contient un sous-groupe K distingué dans G , d'indice au plus $m!$ dans G .
 - (b) Qu'en déduit-on si G est d'ordre strictement plus grand que $m!$?
 - (c) Quel résultat retrouve-t-on si $m = 2$?
 - (d) On suppose que G est fini d'ordre n . Soit p le plus petit diviseur premier de n . Montrer que si H est d'indice p dans G , alors H est distingué dans G .
3. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . Soient $x \in X$, $S_x = \text{Stab}(x)$ et p_x la projection canonique de G sur G/S_x .
 - (a) Soit $f_x : G \rightarrow \text{Orb}(x)$ l'application définie par $f_x(g) = g \cdot x$. Montrer qu'il existe une unique application $\tilde{f}_x : G/S_x \rightarrow \text{Orb}(x)$ telle que $f_x = \tilde{f}_x \circ p_x$ et que cette application \tilde{f}_x est bijective.
 - (b) Le groupe G agit d'une part sur G/S_x et d'autre part sur $\text{Orb}(x)$. Montrer que $\tilde{f}_x(g \cdot C) = g \cdot \tilde{f}_x(C)$ pour tous $g \in G$ et $C \in G/S_x$.
 - (c) En déduire que $S_{a \cdot x} = \text{Stab}(aS_x) = aS_x a^{-1}$, pour tout $a \in G$.
 - (d) Quel est le noyau du morphisme $\phi_x : G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Ens}}(\text{Orb}(x))$ associé à l'action de G sur $\text{Orb}(x)$?
4. Soit G un groupe. On note $\text{Subgr}(G)$ l'ensemble de ses sous-groupes.
 - (a) Montrer qu'on définit une action de G sur $\text{Subgr}(G)$ par conjugaison en posant $g \cdot H = gHg^{-1}$, pour tous $g \in G$ et $H \in \text{Subgr}(G)$.
 - (b) Cette action peut-elle être transitive?
 - (c) Quels sont les points fixes pour cette action?
5. Soient K un corps et E un K -espace vectoriel. On considère l'action naturelle de $\text{GL}(E)$ sur E , définie par $g \cdot v = g(v)$, pour tous $g \in \text{GL}(E)$ et $v \in E$.
 - (a) Quelles sont les orbites de cette action?
 - (b) Montrer que cette action de groupe fournit un morphisme injectif de $\text{GL}(E)$ dans $\text{Aut}_{\text{Ens}}(E \setminus \{\mathbf{0}_E\})$
 - (c) En prenant $E = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, en déduire un isomorphisme entre $\text{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et \mathbb{S}_3 .
6. On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique et on considère l'action naturelle de $\text{O}_3(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^3 . Soit $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

- (a) Quelle est l'orbite de v ?
- (b) Établir une bijection entre $SO_3(\mathbb{R}) \cap \text{Stab}(v)$ et $\text{Stab}(v) \setminus SO_3(\mathbb{R})$, et montrer que $\text{Stab}(v) \setminus SO_3(\mathbb{R})$ ne contient que des réflexions.
- (c) Soit $P = (\mathbb{R}v)^\perp$. Montrer que les groupes $\text{Stab}(v)$ et $O(P)$ sont isomorphes.
- (d) Soit H le sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{1 \times 2}} \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in O_2(\mathbb{R})$. Dédurre des questions précédentes une bijection entre la sphère de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et de rayon $\|v\|$, et l'ensemble quotient $O_3(\mathbb{R})/H$.

7. Dans \mathbb{R}^3 , on considère l'ensemble S des 8 sommets d'un cube centré en $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ (pour fixer les idées, on peut prendre les points de coordonnées ± 1). On note G le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^3)$ des isométries de \mathbb{R}^3 qui laissent l'ensemble S globalement invariant, $G^+ = G \cap SO(\mathbb{R}^3)$ et $G^- = G \setminus SO(\mathbb{R}^3)$.

- (a) Utiliser l'action naturelle du groupe G sur S pour montrer que G est fini.
- (b) En utilisant la symétrie centrale de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, montrer que $|G^-| = |G^+|$.
- (c) On cherche à compter les éléments de G^+ .
- Donner des exemples d'isométries qui appartiennent à G^+ .
 - Le groupe G^+ agit sur l'ensemble des sommets du cube. Montrer que cette action est transitive, déterminer le stabilisateur d'un sommet et en déduire que G^+ contient exactement 24 isométries.
 - Faire la liste de toutes les isométries de G^+ .
- (d) Puisque G^+ est un groupe d'ordre 24 on peut se demander s'il est isomorphe à \mathbb{S}_4 . Pour cela on cherche à faire agir G^+ sur un ensemble de 4 éléments attaché au cube. Soit D l'ensemble des 4 grandes diagonales du cube. L'action naturelle de G sur D fournit un morphisme $\phi : G^+ \rightarrow \text{Aut}_{\text{Ens}}(D)$.
- Montrer que chaque transposition de $\text{Aut}_{\text{Ens}}(D)$ a un antécédent par ϕ .
 - En déduire que le morphisme ϕ est surjectif, et enfin qu'il est bijectif.
- (e) Construire un isomorphisme de groupe de $G^+ \times \{\pm \text{id}_{\mathbb{R}^3}\}$ sur G .
- (f) Soient S_1 l'ensemble des sommets d'un parallélépipède centré en $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et G_1 le sous-groupe de $GL(\mathbb{R}^3)$ des isomorphismes de \mathbb{R}^3 qui laissent l'ensemble S_1 globalement invariant. Montrer que les groupes G et G_1 sont conjugués dans $GL(\mathbb{R}^3)$.

8. *Isométries d'un tétraèdre régulier.* Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E . On considère les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 donnés par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer les produits scalaires $\langle v_i, v_j \rangle$. Que vaut $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$?
- (b) Soit $\sigma \in \mathbb{S}_4$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u_\sigma \in L(E)$, telle que $u_\sigma(v_j) = v_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Montrer que $u_\sigma \in O(E)$.
- (c) Montrer que l'application $\sigma \mapsto u_\sigma$ est un isomorphisme entre \mathbb{S}_4 et le groupe des isométries vectorielles préservant $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

(d) Donner la nature de u_σ en fonction de la structure de σ . Que vaut $\det u_\sigma$?

9. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble fini X . On note X/G l'ensemble des orbites sous cette action. Pour $g \in G$ on note $\text{Fix}(g)$ l'ensemble des éléments de X qui sont fixés par g . En calculant de deux façons différentes le cardinal de l'ensemble $S = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$, montrer la formule de Burnside

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

10. Soient X et Y deux ensembles, G un groupe agissant sur X au moyen du morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Ens}}(X)$.

- Montrer qu'on définit une action de $\text{Aut}_{\text{Ens}}(X)$ sur Y^X par $\sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$, pour tous $\sigma \in \text{Aut}_{\text{Ens}}(X)$ et $f \in Y^X$.
- Montrer que l'on définit une action de G sur Y^X par $g \bullet f = f \circ \phi(g)^{-1}$, pour tous $g \in G$ et $f \in Y^X$.
- Soient $g \in G$ et $f \in Y^X$. Montrer que $g \bullet f = f$ si et seulement si f est constante sur chaque orbite de $\phi(g)$.

11. Dans \mathbb{R}^3 , on fixe un cube centré en $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$. Soit S l'ensemble des sommets et X l'ensemble des faces du cube. On fixe un ensemble Y de $n \in \mathbb{N}^*$ couleurs. On note G le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^3)$ des isométries de \mathbb{R}^3 qui laissent l'ensemble S globalement invariant.

- Montrer que le groupe G agit sur l'ensemble X .
- On appelle coloriage du cube toute application de X dans Y . Montrer que G agit sur l'ensemble des coloriages du cube.
- En utilisant la formule de Burnside, on va compter le nombre de coloriages possibles du cube à rotation du cube près, c'est-à-dire le nombre des orbites de l'action de $G^+ = G \cap \text{SO}(\mathbb{R}^3)$ sur l'ensemble des coloriages.
 - Déterminer $|\text{Fix}(r)|$ pour chaque rotation r appartenant à G^+ .
 - Conclure en utilisant la formule de Burnside.

12. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et G un groupe fini agissant linéairement sur E , i.e. pour tout $g \in G$, l'application $\rho_g : E \rightarrow E$ donnée par $v \mapsto g \cdot v$ est linéaire. On obtient ainsi un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$. Soient

$$F = \{v \in E : g \cdot v = v, \text{ pour tout } g \in G\} \text{ et } \pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g).$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que π est un projecteur sur F . En déduire que $\text{Tr}(\pi) = \dim(F)$.

13. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. À tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$ on associe l'endomorphisme $u_\sigma \in \text{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$u_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n et P_σ la matrice de u_σ dans \mathcal{B} .

- Calculer $u_\sigma(e_j)$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En déduire les coefficients de P_σ et $\det(u_\sigma)$.
- Montrer que l'application $\sigma \mapsto u_\sigma$ est un morphisme de \mathbb{S}_n dans $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$.

- (c) Quels sont les vecteurs fixes de l'action correspondante de S_n sur \mathbb{R}^n ?
 (d) Déterminer le polynôme caractéristique de u_σ en fonction du type de σ . On se ramènera au cas où chaque orbite de σ est constituée d'entiers consécutifs.

14. Sous-groupes finis du groupe spécial orthogonal en dimension 3. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et G un sous-groupe fini de $SO(E)$ d'ordre $n \neq 1$. Pour tout $g \in G \setminus \{\text{id}_E\}$, on note $D_g = \text{Ker}(g - \text{id}_E)$ l'axe de la rotation g . On note S la sphère unité de E et

$$F = \bigcup_{g \in G \setminus \{\text{id}_E\}} (D_g \cap S).$$

- (a) Montrer que F est fini et que tout élément de G induit une permutation de F .
 (b) Soient O_1, \dots, O_s les orbites de l'action de G sur F rangées par cardinaux croissants. Pour $x \in F$, on note S_x le stabilisateur de x . Montrer que l'ordre de S_x est constant sur chaque orbite O_k . Dans la suite, on note n_k cette constante.
 (c) En calculant le cardinal de $D = \{(g, x) \in (G \setminus \{\text{id}_E\}) \times F : g(x) = x\}$ de deux manières différentes, montrer que

$$2n - 2 = ns - \sum_{k=1}^s |O_k| \text{ et } 2 - \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_k}\right).$$

- (d) Montrer que l'on est dans l'un des cinq cas suivants :

- (C.1) $s = 2$ et $n_1 = n_2 = n$;
 (C.2) $s = 3$, n pair et $(n_1, n_2, n_3) = (n/2, 2, 2)$;
 (C.3) $s = 3$, $n = 12$ et $(n_1, n_2, n_3) = (3, 3, 2)$;
 (C.4) $s = 3$, $n = 24$ et $(n_1, n_2, n_3) = (4, 3, 2)$;
 (C.5) $s = 3$, $n = 60$ et $(n_1, n_2, n_3) = (5, 3, 2)$.

Indication : montrer que $s \in \{2, 3\}$ et lorsque $s = 3$ montrer que $n_3 = 2$ et $n_2 \in \{2, 3\}$.

- (e) Dans les deux premiers cas, montrer l'existence d'une droite stable par tous les éléments de G .

Remarque : on peut montrer que G est l'ensemble des rotations préservant un polygone régulier à n sommets dans le premier cas, et l'ensemble des isométries préservant un polygone régulier à $n/2$ sommets dans le deuxième. Les trois derniers cas sont plus difficiles. On peut montrer que dans ces cas, G est l'ensemble des rotations de E préservant un polyèdre régulier et que G est isomorphe à \mathbb{A}_4 , \mathbb{S}_4 ou \mathbb{A}_5 .

15. Soient X un ensemble fini et K un corps. Pour tout $x \in X$, on note δ_x l'application de X dans K qui associe 1 à x et 0 à tous les autres éléments de X .

- (a) Montrer que $(\delta_x)_{x \in X}$ est une base du K -espace vectoriel K^X .
 (b) Soient G un groupe agissant sur l'ensemble X et $\phi : G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Ens}}(X)$ le morphisme de groupes associé. Montrer que l'action du groupe G sur K^X définie par $g \cdot f = f \circ \phi(g)^{-1}$, pour tous $g \in G$ et $f \in K^X$, est linéaire. On notera $\rho : G \rightarrow \text{GL}(K^X)$ le morphisme de groupes associé.
 (c) Pour tout $g \in G$, on note $\text{Fix}(g)$ l'ensemble des points fixes de $\phi(g)$. Montrer que $|\text{Fix}(g)| = \text{Tr}(\rho(g))$.

- (d) Soit $F = \{v \in K^X : g \cdot v = v \text{ pour tout } g \in G\}$. Montrer qu'une application $f : X \rightarrow K$ appartient à F si et seulement si elle est constante sur chaque orbite de l'action de G sur X .
- (e) En déduire que la dimension de F est $|X/G|$, où X/G désigne l'ensemble des orbites de l'action de G sur X .
- (f) Retrouver la formule de Burnside, *i.e.*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

16. On considère l'espace vectoriel \mathbb{C}^n et l'espace vectoriel A_n des applications polynomiales de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C} .

- (a) Définir une action linéaire non triviale du groupe $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ sur A_n .
- (b) Soient G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $F = \{v \in A_n : g \cdot v = v \text{ pour tout } g \in G\}$. Montrer qu'une application polynomiale $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à F si et seulement si elle est constante sur chaque orbite de l'action de G sur \mathbb{C}^n .
- (c) Lorsque $G = \{\pm \text{id}_{\mathbb{C}^n}\}$, déterminer F .

17. Soit p un entier premier. On se propose de faire la liste des groupes d'ordre p^2 à isomorphisme près.

- (a) Soit G un groupe. On suppose que le quotient de G par son centre est un groupe cyclique. Montrer que le groupe G est abélien.
- (b) Soit G un groupe d'ordre p^2 .
- (i) En utilisant l'action de G sur lui-même par conjugaison, montrer que le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre.
 - (ii) Montrer que le groupe G est abélien.
 - (iii) Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

18. *Petit théorème de Fermat.* Soient p un nombre premier et $a \in \mathbb{N}^*$. Soient A un ensemble à a éléments et $E = A^p$. On note $\gamma = (1 \ 2 \ \dots \ p) \in \mathbb{S}_p$.

- (a) Montrer que la formule $\sigma \cdot (x_1, \dots, x_p) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(p)})$ définit une action de $\langle \gamma \rangle$ sur E .
- (b) Décrire l'orbite d'un élément $(x_1, \dots, x_p) \in E$.
- (c) À l'aide de l'équation aux orbites, en déduire que $a^p \equiv a \pmod{p}$.

19. *Lemme de Cauchy.* Soit G un groupe fini d'ordre n et soit p un diviseur premier de n . On note $E = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p : x_1 \cdots x_p = 1_G\}$ et $\gamma = (1 \ 2 \ \dots \ p) \in \mathbb{S}_p$.

- (a) Montrer que la formule $\sigma \cdot (x_1, \dots, x_p) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(p)})$ définit une action de $\langle \gamma \rangle$ sur E .
- (b) Décrire l'orbite d'un élément $(x_1, \dots, x_p) \in E$.
- (c) À l'aide de l'équation aux orbites, montrer que p divise le nombre de solutions de l'équation $x^p = 1_G$ dans G .
- (d) En déduire que G possède au moins un sous-groupe d'ordre p .