1
2
3

MAT35B - ALGÈBRE L3A
Premier Semestre — 2021-2022

Examen partiel

Toute réponse non justifiée ne sera pas validée.

Le barème est donné à titre indicatif et non contractuel.

Dans tout le sujet, pour $n \geq 1$, on note $\mathbb{S}_n$ le groupe de permutations de $[\![1, n]\!]$ et $\mathbb{A}_n$ le sous-groupe alterné.

2pt **Exercice I.**

(1) Soit G un groupe et $K \triangleleft G$ un sous-groupe distingué d'indice fini.
Montrer que, si $g \in G$ est d'ordre d et $\mathsf{PGCD}(d, [G : K]) = 1$, alors $g \in K$. En déduire que si $[G : K] = 2$ et $g \in G$ est d'ordre impair, alors $g \in K$.

(2) Montrer que le groupe alterné $\mathbb{A}_4$ possède 8 éléments d'ordre 3. À partir de ces résultats, démontrer que $\mathbb{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'indice 2.

Solution.

(1) Comme K est un sous-groupe distingué de G, la projection $\pi : G \to G/K$ est un morphisme de groupes. En particulier, si $g \in G$ est d'ordre d, alors $\pi(g)$ est d'ordre qui divise d. Par ailleurs, on a aussi $\mathsf{ord}(\pi(g)) \mid |G/K| = [G : K]$ d'après le théorème de Lagrange, et comme $\mathsf{PGCD}(d, [G : K]) = 1$, on a finalement $\mathsf{ord}(\pi(g)) = 1$. En conséquence $\pi(g) = 1_{G/K}$, ce qui nous dit que $g \in K$.
Si $[G : K] = 2$, alors $\mathsf{PGCD}(2, \mathsf{ord}(g)) = 1$ puisque l'ordre de g est impair. D'après ce qui précède, on a donc bien $g \in K$.
(2) Il y a $\binom{4}{3} \times 2! = 8$ cycles de longueurs 3 dans $\mathbb{S}_4$ qui sont tous de signature 1, *i.e.* dans $\mathbb{A}_4$. S'il existe un sous-groupe K d'indice 2 dans $\mathbb{A}_4$, alors K est distingué dans $\mathbb{A}_4$ (voir l'exercice **2** de la fiche 4) et K est d'ordre 6. Mais les 8 éléments d'ordre 3, qui est impair, sont tous dans K d'après la question précédente, ce qui nous donne une contradiction.

8pt **Exercice II.** On note $E = \{H : H \text{ sous-groupe de } \mathbb{S}_5 \text{ et } |H| = 5\}$ l'ensemble des sous-groupes d'ordre 5 de $\mathbb{S}_5$ et $\mathsf{Bij}(E)$ le groupe des bijections de E dans E. On considère l'action $\Phi : \mathbb{S}_5 \to \mathsf{Bij}(E)$ de $\mathbb{S}_5$ sur E par conjugaison, *i.e.* $\Phi(\sigma)(H) = \sigma H \sigma^{-1}$, pour tous $\sigma \in \mathbb{S}_5$ et $H \in E$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler (sans démonstration) comment calculer l'ordre de $\sigma \in \mathbb{S}_n$ à partir de sa décomposition en produit de cycles à supports deux à deux disjoints. Quelles sont les permutations conjuguées à σ dans $\mathbb{S}_n$?

(2) Quels sont les éléments d'ordre 5 dans $\mathbb{S}_5$? Combien y en a-t-il dans $\mathbb{S}_5$? Combien y en a-t-il dans un sous-groupe d'ordre 5 de $\mathbb{S}_5$?

(3) En déduire que l'ensemble E est de cardinal 6.

(4) Déterminer l'orbite de $H \in E$ pour l'action de $\mathbb{S}_5$ par conjugaison.

(5) Que peut-on dire de $\mathsf{Ker}(\Phi)$ et $\mathsf{Img}(\Phi)$ et de leurs cardinaux ? Déduire de la question précédente que $\mathsf{Ker}(\Phi) = \{\mathsf{id}_{[\![1,5]\!]}\}$. Quel est l'ordre de $\mathsf{Img}(\Phi)$ et son indice dans $\mathsf{Bij}(E)$?

(6) Soit $H \in E$. On note $\Sigma_H = \{f \in \mathsf{Bij}(E) : f(H) = H\}$.
Montrer que Σ_H est un sous-groupe isomorphe à $\mathsf{Bij}(E \setminus \{H\})$ et donc que $\Sigma_H \simeq \mathbb{S}_5$, puis que Σ_H n'est pas conjugué à $\Phi(\mathbb{S}_5)$ dans $\mathsf{Bij}(E)$.

(7) En déduire que le groupe symétrique $\mathbb{S}_6$ contient au moins 7 sous-groupes différents isomorphes à $\mathbb{S}_5$.

Solution.

(1) Si $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_k$ est la décomposition de σ en cycles à support deux à deux disjoints, l'ordre de σ est égal au $\mathsf{PPCM}(\mathsf{ord}(\gamma_i) : i \in \{1, \dots, k\})$. Les permutations conjuguées à σ dans $\mathbb{S}_n$ sont les permutations ayant une décomposition en cycles de même type.

(2) Si $\sigma \in \mathbb{S}_5$ est d'ordre 5, il n'y a que des 5-cycles dans sa décomposition en cycles disjoints (puisque 5 est premier), et au plus un cycle dans cette décomposition puisque $\mathbb{S}_5$ agit sur un ensemble à 5 éléments. Il y a $4! = 24$ façons de choisir un 5-cycle dans $\mathbb{S}_5$. Si H est un sous-groupe d'ordre 5 de $\mathbb{S}_5$, alors tous ses éléments sont d'ordre 1 ou 5 d'après le théorème de Lagrange. Il y a donc 4 éléments d'ordre 5 dans H.

(3) Chaque sous-groupe d'ordre 5 contient 4 éléments d'ordre 5 et les sous-groupes ne s'intersectent qu'en l'élément neutre (si deux sous-groupes contenaient un même élément d'ordre 5 alors cet élément engendre tout le sous-groupe et les deux sous-groupes sont confondus). Donc il y a $24/4 = 6$ sous-groupes d'ordre 5 dans $\mathbb{S}_5$ et E est de cardinal 6.

(4) Les 5-cycles étant tous conjugués, il n'y a qu'une seule orbite pour l'action de $\mathbb{S}_5$ pour l'action par conjugaison sur E. Si $H \in E$, on a donc $\mathsf{Orb}(H) = E$.

(5) Le noyau de Φ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{S}_5$ donc soit réduit à l'identité, soit égal à $\mathbb{A}_5$, soit $\mathbb{S}_5$ tout entier. Par conséquent le cardinal de $\mathsf{Img}(\Phi)$ est égal à 5!, 2 ou 1 respectivement. Or, d'après la question précédente, le cardinal de $\mathsf{Img}(\Phi)$ est au moins égal à 6 (puisque on a une application surjective de $\Phi(\mathbb{S}_5)$ dans $\mathsf{Orb}(H)$), donc $\mathsf{Img}(\Phi) = 5!$, d'indice 6 et le noyau est réduit à l'élément neutre. En particulier $\mathsf{Img}(\Phi) \simeq \mathbb{S}_5$.

(6) Il est clair que Σ_H est un sous-groupe de $\mathsf{Bij}(E)$ (c'est le stabilisateur de H sous l'action naturelle de $\mathsf{Bij}(E)$ sur E) et que le morphisme $f \in \Sigma_H \mapsto f_{|E\setminus H} \in \mathsf{Bij}(E \setminus \{H\})$ est bijectif. Pour H fixé, Σ_H est donc isomorphe à $\mathbb{S}_5$. Comme l'action Φ est transitive, elle ne fixe aucun élément de E, donc $\Phi(\mathbb{S}_5) \neq \Sigma_H$ pour tout $H \in E$. Enfin, si $\sigma \in \mathsf{Bij}(E)$, alors $\sigma \Sigma_H \sigma^{-1} = \Sigma_{\sigma H}$ donc Σ_H n'est pas conjugué à $\Phi(\mathbb{S}_5)$.

(7) Ainsi tous les stabilisateurs des éléments de E sont des sous-groupes de $\mathbb{S}_6$ isomorphes à $\mathbb{S}_5$ qui sont distincts 2 à 2 mais également distincts de $\Phi(\mathbb{S}_5) \simeq \mathbb{S}_5$. Comme E est de cardinal 6, on a bien 7 sous-groupes différents dans $\mathbb{S}_6$ isomorphes à $\mathbb{S}_5$.

10pt **Exercice III.**

Soient $\Bbbk$ un corps fini à q éléments, $V = \Bbbk^2$ et $X = V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$, où $\mathbf{0}_V = (0,0)$.

(1) Justifier que pour toute matrice inversible $A \in \mathsf{GL}_2(\Bbbk)$ et tout vecteur $v \in V$ non nul, on a $Av \neq \mathbf{0}_V$.

On note alors $\rho : \mathsf{GL}_2(\Bbbk) \times X \to X$, $(A, v) \mapsto Av$ l'action naturelle du groupe $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)$ sur l'ensemble X.

(2) Montrer que l'action ρ est transitive.

(3) Déterminer le stabilisateur du vecteur $e_1 = (1,0)$ et calculer son cardinal.

(4) En déduire que $|\mathsf{GL}_2(\Bbbk)| = (q^2-1)(q^2-q)$.

(5) Montrer que le morphisme de groupes $\det : \mathsf{GL}_2(\Bbbk) \to \Bbbk^*$ est surjectif et calculer le cardinal de $\mathsf{SL}_2(\Bbbk)$.

On considère la relation d'équivalence $\sim$ sur X définie par

$$v \sim w \text{ si et seulement s'il existe } \lambda \in \Bbbk^* \text{ tel que } v = \lambda w.$$

On note $\mathbb{P}(V)$ l'ensemble quotient $X/\sim$ et pour $v \in X$, on note $[v] = \{w \in X : w \sim v\}$ la classe d'équivalence de v.

(6) Décrire les classes d'équivalence de $\sim$ et déterminer leur cardinal. En déduire que $|\mathbb{P}(V)| = q+1$.

(7) Démontrer que pour tout $A \in \mathsf{GL}_2(\Bbbk)$, l'application $\rho(A,.) : X \to X$ qui associe Av à $v \in X$ passe au quotient par $\sim$ et définit une application $\bar{\rho}(A,.) : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$. Montrer en plus que $\bar{\rho}$ est une action de $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)$ sur $\mathbb{P}(V)$.

(8) En déduire un morphisme de groupes $\psi : \mathsf{GL}_2(\Bbbk) \to \mathbb{S}_{q+1}$.

On notera $\varphi : \mathsf{SL}_2(\Bbbk) \to \mathbb{S}_{q+1}$ la restriction de ψ à $\mathsf{SL}_2(\Bbbk)$.

> Dans la suite, on admettra le résultat « classique » suivant :
>
> $$\left\{A \in \mathsf{GL}_2(\Bbbk) : \bar{\rho}(A,.) = \mathsf{id}_{\mathbb{P}(V)}\right\} = \left\{\lambda\, \mathsf{I}_2 : \lambda \in \Bbbk^*\right\}.$$

(9) Montrer l'isomorphisme de groupes $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{S}_3$.

(10) Soient $[v_1], [v_2]$ et $[v_3]$ trois éléments distincts de $\mathbb{P}(V)$.

i. Montrer qu'il existe trois vecteurs $u_1 \in [v_1], u_2 \in [v_2]$ et $u_3 \in [v_3]$ tels que $u_3 = -u_1 - u_2$. Justifier que (u_1, u_2) est une base de V.

ii. Soient f l'endomorphisme de V tel que $f(u_1) = u_2$ et $f(u_2) = u_3$ et A sa matrice dans la base canonique. Que vaut $f(u_3)$? Justifier que $A \in \mathsf{SL}_2(\Bbbk)$.

(11) On suppose $\Bbbk = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et donc $q = 3$. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mathsf{Img}(\varphi)$ contient tous les 3-cycles.

(12) En déduire l'existences des isomorphismes de groupes suivants :

$$\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm \mathsf{I}_2\} \simeq \mathbb{S}_4 \text{ et } \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm \mathsf{I}_2\} \simeq \mathbb{A}_4.$$

Solution.

(1) Comme A est inversible, $Av = \mathbf{0}_V$ implique $v = A^{-1}Av = \mathbf{0}_V$.

(2) Il suffit de montrer que, étant donné $v \in X$, il existe une matrice $A \in \mathsf{GL}_2(\Bbbk)$ telle que $Ae_1 = v$. Comme v est non nul, on peut compléter (v) en une base (v, w) de V. On considère alors la matrice A dont la première colonne est v et la deuxième colonne est w. En conséquence, $Ae_1 = v$ et $Ae_2 = w$, où e_2 est le deuxième vecteur de la base canonique de V. Comme (v, w) est une base de V, A est inversible, *i.e.* $A \in \mathsf{GL}_2(\Bbbk)$.

(3) On voit bien que

$$\mathsf{Stab}(e_1) = \big\{A \in \mathsf{GL}_2(\Bbbk) : Ae_1 = e_1\big\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : d \neq 0\right\},$$

où l'on a utilisé qu'une matrice $A \in \mathsf{M}_2(\Bbbk)$ est dans $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)$ si et seulement si son déterminant est non nul. En conséquence, $|\mathsf{Stab}(e_1)| = q(q-1)$.

(4) D'après le cours, l'orbite de e_1 est en bijection avec l'ensemble quotient $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)/\mathsf{Stab}(e_1)$. Comme l'action est transitive (question 2), l'orbite de e_1 est X tout entier. Par suite,

$$q^2 - 1 = |X| = |\mathsf{GL}_2(\Bbbk)/\mathsf{Stab}(e_1)| = \frac{|\mathsf{GL}_2(\Bbbk)|}{|\mathsf{Stab}(e_1)|} = \frac{|\mathsf{GL}_2(\Bbbk)|}{q(q-1)},$$

(où l'on a utilisé la question précédente), ce qui implique que $|\mathsf{GL}_2(\Bbbk)| = (q^2-1)(q^2-q)$.

(5) Pour tout $a \in \Bbbk$ on a l'égalité $a = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et cette matrice est dans $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)$ ssi $a \neq 0$, donc $\det : \mathsf{GL}_2(\Bbbk) \to \Bbbk^*$ est surjectif. Comme $\mathsf{SL}_2(\Bbbk) = \mathsf{Ker}(\det)$, on en déduit une bijection $\mathsf{GL}_2(\Bbbk)/\mathsf{SL}_2(\Bbbk) \to \Bbbk^*$, d'où

$$q - 1 = |\Bbbk^*| = |\mathsf{GL}_2(\Bbbk)/\mathsf{SL}_2(\Bbbk)| = \frac{|\mathsf{GL}_2(\Bbbk)|}{|\mathsf{SL}_2(\Bbbk)|} = \frac{(q^2-1)(q^2-q)}{|\mathsf{SL}_2(\Bbbk)|},$$

ce qui implique que $|\mathsf{SL}_2(\Bbbk)| = q(q^2-1)$.

(6) Pour tout $v \in X$, on a $[v] = \{\lambda v : \lambda \in \Bbbk^*\}$; il s'agit donc de la droite vectorielle $\mathsf{Vect}(v)$ privée du vecteur nul. De plus, l'application $\ell_v : \Bbbk^* \to [v]$, $\lambda \mapsto \lambda v$ est bijective : en effet, la surjectivité découle de la définition de $\sim$, tandis que l'injectivité provient du fait que $\lambda v = \lambda' v$ équivaut à $(\lambda - \lambda')v = \mathbf{0}_V$, qui implique $\lambda = \lambda'$ puisque $v \neq \mathbf{0}_V$.
En conséquence, $\#([v]) = \#(\Bbbk^*) = q - 1$. Comme $X = \bigsqcup_{[v] \in \mathbb{P}(V)} [v]$, on conclut que

$$q^2 - 1 = |X| = \sum_{[v] \in \mathbb{P}(V)} \#\big([v]\big) = \sum_{[v] \in \mathbb{P}(V)} (q-1) = (q-1)\#\big(\mathbb{P}(V)\big),$$

ce qui implique que $\#(\mathbb{P}(V)) = (q^2-1)/(q-1) = q+1$.

(7) Il suffit de montrer que $[\rho(A,\lambda v)] = [\rho(A,v)]$ pour tous $v \in X$ et $\lambda \in \mathbb{k}^*$. Cela est immédiat, vu que $\rho(A,\lambda v) = A\lambda v = \lambda A v = \lambda\rho(A,v)$. En conséquence, on obtient une application $\bar{\rho} : \mathsf{GL}_2(\mathbb{k}) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ qui associe $[\rho(A,v)]$ à $(A,[v])$, pour $A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{k})$ et $v \in X$. Il s'agit clairement d'une action, vu que $\bar{\rho}(\mathsf{I}_2,[v]) = [\rho(\mathsf{I}_2,v)] = [v]$ et

$$\bar{\rho}\big(A,\bar{\rho}\big(B,[v]\big)\big) = \bar{\rho}\big(A,\big[\rho(B,v)\big]\big) = \big[\rho\big(A,\rho(B,v)\big)\big] = \big[\rho(AB,v)\big] = \bar{\rho}\big(AB,[v]\big),$$

pour tous $v \in X$ et $A,B \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{k})$.

(8) L'action $\bar{\rho} : \mathsf{GL}_2(\mathbb{k}) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ induit un morphisme de groupes de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{k})$ dans l'ensemble $\mathsf{Bij}(\mathbb{P}(V))$ des bijections de $\mathbb{P}(V)$ (cf. cours). Comme $\#(\mathbb{P}(V)) = q+1$, les groupes $\mathsf{Bij}(\mathbb{P}(V))$ et $\mathbb{S}_{q+1}$ sont isomorphes, et on obtient ainsi un morphisme de groupes $\psi : \mathsf{GL}_2(\mathbb{k}) \to \mathbb{S}_{q+1}$.

(9) Le morphisme de groupes $\psi : \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{S}_3$ est injectif, vu que le noyau est, d'après le fait rappelé ci-dessus, $\{\lambda\,\mathsf{I}_2 : \lambda \in \mathbb{k}^*\} = \{\mathsf{I}_2\}$, qui est donc trivial. Comme $|\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})| = (2^2-2)(2^2-1) = 6 = |\mathbb{S}_3|$, le morphisme ψ est bijectif.

(10) i. Comme $[v_1] \neq [v_2]$, on a $v_1 \not\sim v_2$, donc v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de $V = \mathbb{k}^2$. Soit (λ,μ) les coordonnées de v_3 dans cette base. Alors $\lambda \neq 0$, sinon on aurait $v_3 = \mu v_2 \sim v_2$, *i.e.* $[v_3] = [v_2]$, ce qui donne une contradiction. Pour la même raison $\mu \neq 0$. On pose alors $u_1 = -\lambda v_1 \in [v_1]$ et $u_2 = -\mu v_2 \in [v_2]$. Ces deux vecteurs sont toujours non colinéaires donc forment une base de V. Avec $u_3 = v_3 \in [v_3]$, on trouve $u_3 = \lambda v_1 + \mu v_2 = -u_1 - u_2$.

ii. $f(u_3) = f(-u_1-u_2) = -f(u_1)-f(u_2) = -u_2-u_3 = -u_2-(-u_1-u_2) = u_1$. On en déduit que dans la base (u_1,u_2), la matrice de f est

$$\mathsf{Mat}_{(u_1,u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

qui a déterminant égal à 1. Donc $\det(A) = \det(f) = 1$, *i.e.* A appartient à $\mathsf{SL}_2(\mathbb{k})$.

(11) Soient $[v_1],[v_2],[v_3]$ trois éléments distincts de $\mathbb{P}(V)$, qui est ici de cardinal $3+1=4$. Notons $[v_4]$ le dernier élément de $\mathbb{P}(V)$. On considère la matrice A de la question précédente associée à $[v_1],[v_2],[v_3]$, l'endomorphisme correspondant f et les trois vecteurs u_1,u_2,u_3. On a alors $\bar{\rho}(A,[v_1]) = \bar{\rho}(A,[u_1]) = [Au_1] = [f(u_1)] = [u_2] = [v_2]$, et de même $\bar{\rho}(A,[v_2]) = [v_3]$ et $\bar{\rho}(A,[v_3]) = [v_1]$. Puisque $\bar{\rho}(A,.)$ est une bijection, on a aussi $\bar{\rho}(A,[v_4]) = [v_4]$. La permutation $\bar{\rho}(A,.)$ de $\mathbb{P}(V)$ est donc un 3-cycle, de support $([v_1],[v_2],[v_3])$. Comme $A \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, et que cela est vrai quels que soient les trois éléments distincts choisis, on en déduit que l'image de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ par l'application $A \mapsto \bar{\rho}(A,.)$ contient tous les 3-cycles de $\mathsf{Bij}(\mathbb{P}(V)) \simeq \mathbb{S}_4$, et finalement que c'est aussi le cas de $\mathsf{Img}(\varphi)$.

(12) D'après le résultat admis on a $\mathsf{Ker}(\psi) = \{\lambda I_2 : \lambda \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*\} = \{\pm I_2\}$, d'où par passage au quotient un morphisme de groupes injectif $\bar{\psi} : \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm I_2\} \to \mathbb{S}_4$. Or $|\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}| = |\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})|/2 = (3^2-3)(3^2-1)/2 = 24 = |\mathbb{S}_4|$ donc ce morphisme est en fait bijectif.

Ensuite, par restriction $\mathsf{Ker}(\varphi) = \mathsf{Ker}(\psi) \cap \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \{\pm I_2\}$ puisque $\det(\mathsf{I}_2) = \det(-\mathsf{I}_2) = 1$. Par passage au quotient, on a encore un morphisme de groupes injectif $\bar{\varphi} : \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm I_2\} \to \mathbb{S}_4$. D'après la question précédente $\mathsf{Img}(\varphi)$ $(= \mathsf{Img}(\bar{\varphi}))$ contient tous les 3-cycles, et les 3-cycles engendrent $\mathbb{A}_4$ (cf. cours), donc $\mathbb{A}_4 \subset \mathsf{Img}(\bar{\varphi})$. Par ailleurs $|\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}| = |\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})|/2 = (3^2-3)(3+1)/2 = 12 = |\mathbb{A}_4|$. On en déduit que $\mathbb{A}_4 = \mathsf{Img}(\bar{\varphi})$, puis que $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes entre $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$ et $\mathbb{A}_4$