# II Espaces vectoriels

## I sous-espaces vectoriels, bases, dimension.

définition Soit K un corps, un K-espace vectoriel V est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les lois suivantes :

$\forall u, v, w \in V \qquad (u+v)+w = u+(v+w)$

$\forall u, v \in V \qquad u+v = v+u$

V possède un vecteur nul $0_V$ qui vérifie $\forall v \in V \quad 0_V + v = v + 0_V = v$

$\forall v \in V \qquad 0_K . v = 0_V$

$\forall v \in V \qquad 1_K . v = v$

$\forall \lambda \in K \quad \forall u \in V \quad \forall v \in V \qquad \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

$\forall \lambda \in K \quad \forall \alpha \in K \quad \forall v \in V \qquad (\lambda+\alpha).v = \lambda.v + \alpha.v$

$\forall \lambda \in K \quad \forall \alpha \in K \quad \forall v \in V \qquad (\lambda\alpha).v = \lambda.(\alpha.v)$

exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- Soit E un ensemble, on note $A(E, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}^p$. $A(E, \mathbb{R}^p)$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$ espace vectoriel grace à l'addition et à la multiplication externe suivantes :

on définit $f+g$ pour $f \in A(E, \mathbb{R}^p)$ et $g \in A(E, \mathbb{R}^p)$ en posant $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x$ dans E

on définit $\lambda . f$ pour $f \in A(E, \mathbb{R}^p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ en posant $(\lambda . f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x$ dans E.

définition : Soit $V$ un $K$-espace vectoriel, une partie $F$ de $V$ est un sous-espace vectoriel de $V$ lorsque

$$\forall v, w \in F \quad v + w \in F$$
$$\forall \lambda \in K \ \forall v \in F \quad \lambda . v \in F$$

exemples :

$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 3\}$ n'en est pas un.

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x + 5z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 2y - z)(x + 5z) = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

L'ensemble des fonctions polynômiales est un sous-espace vectoriel de $A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On le note $\mathbb{R}[X]$

Pour tout entier $d \geq 0$, l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leq d$ est un sous espace vectoriel de $A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On le note $\mathbb{R}_d[X]$.

Par contre l'ensemble des fonctions polynomiales de degré exactement $d$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

L'ensemble des fonctions dérivables sur $[0;1]$ dont la dérivée est continue est un sous espace vectoriel de $A([0;1], \mathbb{R})$. On le note ~~$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$~~

$C^1([0;1], \mathbb{R})$

**proposition :** Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $V$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall \lambda_1, ..., \lambda_k \in K \quad \forall v_1, ..., v_k \in F$

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in F$$

preuve par récurrence sur $k$

**définition :** Une somme du type $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ est appelée combinaison linéaire des vecteurs $v_1, ..., v_k$.

La proposition précédente affirme donc que tout sous-espace vectoriel de $V$ est stable par combinaison linéaire.

**définition :** soit $S$ une partie de $V$. Notons $\langle S \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $S$, donc $\langle S \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k, \ k \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in K, \ v_1, ..., v_k \in S \}$

$\langle S \rangle$ est un sous-espace vectoriel de $V$ et tout sous-espace vectoriel de $V$ qui contient $S$ contient aussi $\langle S \rangle$.

Donc $\langle S \rangle$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $V$ qui contient $S$. On dit que $\langle S \rangle$ est le sous-espace vectoriel de $V$ engendré par $S$.

**définition :** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $V$ et $S$ une partie de $F$. On dit que $S$ est une famille génératrice de $F$ lorsque $\langle S \rangle = F$.

Dans le cas où $S$ est finie, $S = \{ w_1, ..., w_s \}$ alors $\langle S \rangle = \{ \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_s w_s, \ \lambda_1, ..., \lambda_s \in K \}$ et $S$ est une partie génératrice de $F$ si et seulement si $\forall v \in F \ \exists \lambda_1, ..., \lambda_s \in K$ tels que $v = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_s w_s$

exemples :

$\{1, X, \dots, X^d\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}_d[X]$

famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ ?

famille génératrice de $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-3z=0\}$ ?

définition : On dit qu'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F est minimale lorsqu'aucun vecteur de S ne s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

exemples

définition : une base de V est une famille génératrice minimale.

définition : une famille S de vecteurs de V est une famille liée lorsque l'un des vecteurs de S s'écrit comme combinaison linéaire des autres

proposition : Soit S une partie finie de V, $S=\{w_1, \dots, w_s\}$. La famille S est liée si et seulement s'il existe $\mu_1, \dots, \mu_s \in K$ tels que $\mu_1 w_1 + \dots + \mu_s w_s = 0$ et l'un au moins des $\mu_i$ est non nul.

preuve : immédiat

définition : une famille S de vecteurs de V est libre lorsqu'elle n'est pas liée

proposition : Soit $S=\{w_1, \dots, w_s\}$ une partie finie de V, S est une famille libre si et seulement si

$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_s \in K \ (\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_s w_s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0)$

proposition : Une famille finie $S=\{w_1, \dots, w_s\}$ de vecteurs de V est une base de V lorsqu'elle est à la fois génératrice de V et libre

preuve : immédiat

proposition : une famille finie $S = \{w_1, \dots, w_s\}$ de vecteurs de $V$ est une base de $V$ si et seulement si tout vecteur $v$ de $V$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $w_1, \dots, w_s$

preuve ...

Théorème : Toutes les bases de $V$ ont le même nombre de vecteurs et ce nombre s'appelle la dimension de $V$, notée $\dim V$

admis.

définition Si $V$ est un espace vectoriel de base $(w_1, \dots, w_s)$ alors pour tout vecteur $v$ de $V$ les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tels que $v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_s w_s$ s'appellent les coordonnées de $v$ dans la base $(w_1, \dots, w_s)$.

proposition : Soit $V$ un espace vectoriel de dimension $n$

- toute famille génératrice de $V$ qui contient $n$ vecteurs est une base de $V$
- toute famille libre de $V$ qui contient $n$ vecteurs est une base de $V$.

preuve ...

## II Applications linéaires

définition : Soient $V$ et $W$ des $K$-espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : V \longrightarrow W$ est linéaire lorsque

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$$
$$\forall \lambda \in K \ \forall v \in V \quad f(\lambda . v) = \lambda . f(v)$$

proposition : Si $f : V \longrightarrow W$ est linéaire alors
$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall \lambda_1, .., \lambda_k \in K \quad \forall v_1, .., v_k \in V$

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_k f(v_k)$$

exemples

- $$\varphi_1 \quad C_1([-1;1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
  $$f \longmapsto f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{est linéaire}$$

  $$\varphi_2 : C_1([-1;1], \mathbb{R}) \longrightarrow C_0([-1;1], \mathbb{R})$$
  $$f \longmapsto f' \quad \text{est linéaire}$$

proposition : Soient $V$ et $W$ deux espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim V$ et $p = \dim W$.
Soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire.
Soient $B_1 = (e_1, .., e_n)$ une base de $V$ et $B_2 = (\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ une base de $W$. On appelle matrice de $f$ dans les base $B_1$ et $B_2$ et on note $M_{B_2}^{B_1}(f)$ la matrice dont les $n$ colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1), .., f(e_n)$ dans la base $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$. On a alors, pour tout vecteur $v$ de $V$, en notant $(x_1, .., x_n)$ les coordonnées

de $v$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ les coordonnées de $f(v)$ dans la base $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_p)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = M_{B_2}^{B_1}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

preuve $\quad v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \qquad f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \mathcal{E}_i$

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left( \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \mathcal{E}_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \mathcal{E}_i$$

d'où $y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

proposition : Soient $f : V_1 \longrightarrow V_2$ et $g : V_2 \longrightarrow V_3$ deux applications linéaires avec $V_1, V_2$ et $V_3$ des espaces vectoriels de dimension finie. Soient pour $i \in \{1, 2, 3\}$ $B_i$ une base de $V_i$. Alors l'application $g \circ f : V_1 \longrightarrow V_3$ est linéaire

et $M_{B_3}^{B_1}(g \circ f) = M_{B_3}^{B_2}(g) \, M_{B_2}^{B_1}(f)$

définition : Soit $f : V \to W$ une application linéaire.
On appelle noyau de $f$, et on note $\mathrm{Ker} f$, l'ensemble des vecteurs de $V$ qui ont une image nulle par $f$.
On appelle image de $f$, et on note $\mathrm{Im} f$, l'ensemble des vecteurs de $W$ qui possèdent un antécédant dans $V$.

proposition : $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $V$ et $\mathrm{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $W$

preuve : ...

exemple $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ $\quad B = (1, X, X^2, X^3)$
$\quad P \longmapsto P'$

$$M_B^B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \qquad P' = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2$

$P \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$\mathrm{Ker} f$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ formé des fonctions constantes.

$R = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 \in \mathrm{Im} f$
$\Leftrightarrow \exists P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$
tel que $P' = R$
$\Leftrightarrow \exists P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$
$$\begin{cases} a_1 = b_0 \\ 2a_2 = b_1 \\ 3a_3 = b_2 \\ 0 = b_3 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow b_3 = 0$

donc $\mathrm{Im}\,\varphi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ constitué des polynômes de degré $\leq 2$

Théorème du rang :

Soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire avec $V$ un espace vectoriel de dimension finie alors $\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$.

admis

proposition : Soit $f : V_1 \longrightarrow V_2$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels $V_1$ et $V_2$ de même dimension $n$. Soient $B_1$ une base de $V_1$ et $B_2$ une base de $V_2$ alors

$$\begin{aligned} f \text{ inversible} &\Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Im} f = V_2 \\ &\Longleftrightarrow M_{B_2}^{B_1}(f) \text{ est inversible} \\ &\Longleftrightarrow \det\left(M_{B_2}^{B_1}(f)\right) \neq 0 \end{aligned}$$

admis.