Examen terminal

Mercredi 12 Janvier 2022

Documents, calculatrice et matériel électronique non-autorisés

Questions de cours (6 pts)

1. **Algèbre.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linéaire.
   (a) Donnez la définition de $\ker(f)$ et montrez que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Quelles sont les dimensions possibles de $\ker(f)$ dans ce cas précis ?
2. **Calcul différentiel.** Soit f définie par $f(x, y) = x^2 \ln(y)$.
   (a) Calculez $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
   (b) Calculez le gradient de f en (x, y)

Exercice 1 (10 pts)

Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez le polynôme caractéristique P. Calculer $P(0)$
2. Montrez que 0 est une valeur propre. Calculez un vecteur propre associé à cette valeur propre.
3. Factorisez le polynôme caractéristique. Donnez la liste des valeurs propres.
4. Calculez une base β de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A.
5. Trouvez une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
6. Calculez P^{-1}.
7. Expliquez comment la question précédente permet de calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

tournez la feuille $\longrightarrow$

Exercice 2 (6 pts)

On définit trois applications f, g et γ comme suit :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y^2 - x^2 \end{array} \right. , \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right. ,$$

1. Calculez les gradients de f et g en (x_0, y_0).
2. Calculez le produit scalaire de ces deux gradients.
3. On note L_1 la partie de la ligne de niveau de g incluse dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ c'est à dire

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid xy = 1\}.$$

   Tracez L_1.
4. Paramètrez L_1, c'est-à-dire donnez une courbe γ dont le support est L_1 :

$$\{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = L_1.$$

5. Donnez la droite tangente à L_1 au point $(2, \frac{1}{2})$.
6. Que pouvez vous dire de la fonction $t \mapsto g(\gamma(t))$?