1
2
3
4

MAT303

Premier Semestre — 2020-2021

Examen partiel

Justifier toutes les réponses!

Le barème est seulement indicatif.

6p. **1.** Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et $S \subseteq \mathbb{E}$.

(a) Donner la définition d'adhérence $\bar{S}$ et d'intérieur S°.

(b) Donner la définition de suite convergente, suite de Cauchy et de suite bornée.

Remarque : Les définitions des items précédents doivent être présentées en langage mathématique.

(c) Démontrer que toute suite convergente est bornée.

(d) Donner la définition d'ensemble compact.

Remarque : "fermé et borné" n'est pas juste !

Solution.

(a) On rappelle que l'**adhérence** $\bar{S}$ de S (pour N) est donnée par

$$\bar{S} = \bigcap_{\substack{F \text{fermé}, \\ S \subseteq F}} F = \left\{ x \in \mathbb{E} : \text{ pour tout } \epsilon > 0, B_N(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset \right\}$$
$$= \left\{ \lim_{n \to +\infty} v_n : \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}} \text{ convergente } \right\}$$

et l'**intérieur** S° de S (pour N) est donné par

$$S^\circ = \bigcup_{\substack{U \text{ouvert}, \\ U \subseteq S}} U = \left\{ x \in \mathbb{E} : \text{ il existe } \epsilon > 0 \text{ tel que } B_N(x, \epsilon) \subseteq S \right\}.$$

(b) Soit $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{E}$. On dit que $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est

(i) **convergente** (pour N) s'il existe $v \in \mathbb{E}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N(v - v_n) < \varepsilon$;

(ii) **de Cauchy** (pour N) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N(v_n - v_m) < \varepsilon$;

(iii) **bornée** (pour N) s'il existe $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $N(v_n) < C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite $v \in \mathbb{E}$. Alors, pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N(v - v_n) < 1$. En conséquence,

$$\left| N(v) - N(v_n) \right| \leq N(v - v_n) < 1$$

si $n \geq n_0$, *i.e.* $N(v_n) < 1 + N(v)$ si $n \geq n_0$. Soit

$$C = \max(N(v_0), \dots, N(v_{n_0-1}), 1 + N(v)).$$

Alors, $C \geq 1 + N(v) \geq 1$ est un nombre réel. En plus, $N(v_n) \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, si $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$, alors $N(v_n) \leq C$ par définition, et si $n \geq n_0$ est un entier, alors $N(v_n) < 1 + N(v) \leq C$.

(d) On rappelle qu'une partie $S \subseteq \mathbb{E}$ est **(séquentiellement) compacte** (pour N) si toute suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S admet une sous-suite convergente $\{v_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante) dont la limite appartient à S.

$3,5$p. **2.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$M_{a,b,c,d} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

donnée par $M_{a,b,c,d}(x, y) = |ax + by| + |cx + dy|$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Donner un exemple de nombres réels $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $M_{a,b,c,d}$ soit une norme.

(b) Donner un exemple de nombres réels $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $M_{a,b,c,d}$ ne soit pas une norme.

(c) Déterminer tous les 4-uplets $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $M_{a,b,c,d}$ soit une norme.

Solution.

(a) Si $a = d = 1$ et $b = c = 0$, on voit que $M_{1,0,0,1}(x, y) = |x| + |y|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En conséquence, $M_{1,0,0,1}$ coïncide avec la norme L^1 et, en particulier, $M_{1,0,0,1}$ est une norme.

(b) Si $a = b = c = d = 0$, alors $M_{0,0,0,0}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $M_{0,0,0,0}(1, 0) = 0$ tandis que $(1, 0)$ n'est pas le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$, on conclut que $M_{0,0,0,0}$ n'est pas une norme.

(c) Soit $T_{a,b,c,d} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $T_{a,b,c,d}(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et soit $N_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la norme L^1, *i.e.* $N_1(x, y) = |x| + |y|$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $T_{a,b,c,d}$ est une application linéaire. En effet,

$$\begin{aligned} T_{a,b,c,d}\big((x, y) + \lambda(x', y')\big) &= T_{a,b,c,d}\big(x + \lambda x', y + \lambda y'\big) \\ &= \big(a(x + \lambda x') + b(y + \lambda y'), c(x + \lambda x') + d(y + \lambda y')\big) \\ &= \big((ax + by) + \lambda(ax' + by'), (cx + dy) + \lambda(cx' + dy')\big) \\ &= (ax + by, cx + dy) + \lambda(ax' + by', cx' + dy') \\ &= T_{a,b,c,d}(x, y) + \lambda T_{a,b,c,d}(x', y'), \end{aligned} \tag{1}$$

pour tous $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En plus, $T_{a,b,c,d}$ est injectif si et seulement le déterminant de la représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de $T_{a,b,c,d}$ relative à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est différent de zéro, *i.e.* $ad-bc \neq 0$. Par ailleurs, on voit bien que $M_{a,b,c,d} = N_1 \circ T_{a,b,c,d}$. D'après un résultat du cours, $M_{a,b,c,d}$ est une norme si $T_{a,b,c,d}$ est injectif, *i.e.* si $ad-bc \neq 0$. Par ailleurs, si $ad-bc=0$, alors $T_{a,b,c,d}$ n'est pas injectif, *i.e.* il existe $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ tel que $T_{a,b,c,d}(x_0,y_0) = (0,0)$. En conséquence,

$$M_{a,b,c,d}(x_0,y_0) = N_1\big(T_{a,b,c,d}(x_0,y_0)\big) = N_1(0,0) = 0,$$

ce qui implique que $M_{a,b,c,d}$ n'est une norme si $ad-bc=0$.

6, 5p. **3.** Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne et

$$S = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ et } y \leq 1/x\big\}.$$

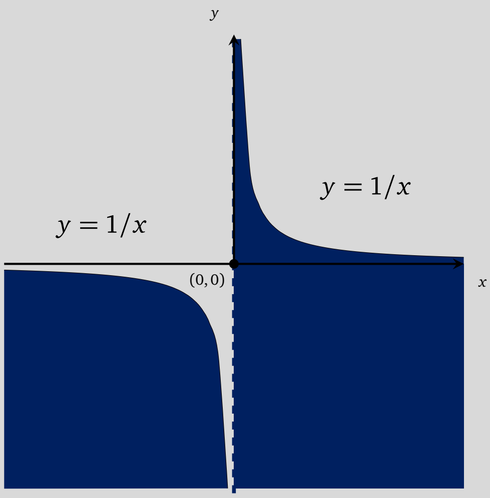
(a) Dessiner S. Expliquer le dessin.

(b) S est-il fermé ? S est-il ouvert ? Justifier vos réponses soigneusement.

(c) Déterminer $\bar{S}$ et S°. Justifier le calcul de $\bar{S}$ ou de S° soigneusement.

Solution.

(a) Par définition de S, $(x,y) \in S$ implique que $x \neq 0$, ce qui exclut la droite verticale donnée par l'axe des ordonnées. Par ailleurs, si $x \neq 0$, $(x,y) \in S$ si et seulement si $y \leq 1/x$, *i.e.* (x,y) est en dessous de l'hyperbole $y = 1/x$. L'ensemble S apparaît ci-dessous en bleu



où la ligne en pointillé indique que la frontière respective ne fait pas partie de l'ensemble S.

(b) On affirme que S n'est pas fermé. En effet, soit $v_n = (1/2^n, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On voit bien que $v_n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $0 < 1/(1/2^n) = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En plus, la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec limite $v = (0,0)$, vu que

$$\|v_n\| = \frac{1}{2^n}$$

tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Comme $v = (0,0) \notin S$, on conclut que S n'est pas fermé.

On affirme aussi que S n'est pas ouvert. Pour cela on va montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus S$ n'est pas fermé. En effet, soit $w_n = (1, 1 + 1/2^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On voit bien que $w_n \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $1 + 1/2^n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.. En plus, la suite $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec limite $w = (1,1)$, vu que

$$\|w_n - w\| = \frac{1}{2^n}$$

tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Comme $w = (1,1) \in S$, on conclut que $\mathbb{R}^2 \setminus S$ n'est pas fermé, *i.e.* S n'est pas ouvert.

(c) On affirme que $\bar{S} = S \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. Pour lé démontrer, il suffit de montrer $T = S \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ est fermé et que tout élément de $T \setminus S = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

On montre d'abord que, étant donné $y_0 \in \mathbb{R}$, $(0, y_0) \in T \setminus S$ est la limite d'une suite d'éléments de S. En effet, si $y_0 \leq 0$, on considère la suite $v_n = (1/2^n, y_0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On voit bien que $v_n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $y_0 \leq 0 < 1/(1/2^n) = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En plus, la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec limite $v = (0, y_0)$, vu que

$$\|v_n - v\| = \frac{1}{2^n}$$

tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Si $y_0 > 0$, soit $n_0 = \lfloor y_0 \rfloor + 1 \geq 1$. Noter que $y_0 \leq n_0$. On considère la suite $v_n = (1/(n_0 + n), y_0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On voit bien que $v_n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $y_0 \leq n_0 \leq n + n_0 = 1/(1/(n_0 + n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En plus, la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec limite $v = (0, y_0)$, vu que

$$\|v_n - v\| = \frac{1}{n_0 + n}$$

tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

On va finalement montrer que $T = S \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ est fermé. Soient

$$T' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ et } y \leq 1/x\}$$

et

$$T'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y \leq 1/x\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Il suffit de montrer que T' et T'' sont fermés, car $T = T' \cup T''$ et la réunion de fermés est fermée.

Pour montrer que T' est fermé, soit $v_n = (x_n, y_n) \in (T')^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite $v = (x, y)$. Alors, x_n converge vers x et y_n converge vers y quand n tend vers $+\infty$. Comme $x_n < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \leq 0$. Si $x = 0$, alors l'inégalité $y_n \leq 1/x_n$ implique

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty,$$

ce qui est absurde. En conséquence $x < 0$ et

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x},$$

i.e. $(x, y) \in T'$. En conséquence, T' est fermé.

Pour montrer que T'' est fermé, soit $v_n = (x_n, y_n) \in (T'')^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite $v = (x, y)$. Alors, x_n converge vers x et y_n converge vers y quand n tend vers $+\infty$. Comme $x_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$. Si $x = 0$, alors $(x, y) = (0, y) \in T''$. Si $x > 0$, alors l'inégalité $y_n \leq 1/x_n$ implique

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x},$$

i.e. $(x, y) \in T''$. En conséquence, T'' est fermé, ce qui implique que $T = T' \cup T''$ est fermé.

On affirme par ailleurs que $S^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ et } y < 1/x\}$. Pour le démontrer, on va montrer que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ et } y < 1/x\}$ est ouvert et que tout élément de l'ensemble $S \setminus U = \{(x, 1/x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ n'appartient pas à S°.

Pour démontrer que U est ouvert, on va montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus U$ est fermé. Pour cela, on note que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U$ si et seulement si $(-x, -y) \in T$. La preuve que l'on a fait ci-dessus pour montrer que T est fermé montre alors que $\mathbb{R}^2 \setminus U$ est fermé aussi, si l'on change (x, y) par $(-x, -y)$.

Finalement, il reste à montrer que tout élément de l'ensemble $S \setminus U = \{(x, 1/x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ n'appartient pas à S°. Soit $x_0 \neq 0$ et $r > 0$. On pose $w_0 = (x_0, 1/x_0)$. Alors, le point $w_r = w + (0, r/2)$ satisfait que

$$\|w_r - w_0\| = \frac{r}{2},$$

ce qui nous dit que $w_r \in B(w_0, r)$. En outre,

$$\frac{1}{x_0} + \frac{r}{2} > \frac{1}{x_0}$$

nous dit que $w_r \notin S$. En conséquence, $w_0 \notin S^\circ$, comme on voulait démontrer.

4p. **4.** Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé. Pour $S, T \subseteq \mathbb{E}$, on définit

$$S + T = \left\{u \in \mathbb{E} : \text{ il existe } v \in S \text{ et } w \in T \text{ tels que } u = v + w\right\} \subseteq \mathbb{E}.$$

Prouver que, si S est un ensemble ouvert non vide, $S + T$ est ouvert.

Solution. Si $T = \emptyset$, alors $S + T = \emptyset$, qui est ouvert. On suppose désormais $T \neq \emptyset$. Soit $v \in S + T$. Alors, il existe $s \in S$ et $t \in T$ tels que $v = s + t$. Comme S est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_N(s, r) \subseteq S$. On note d'abord que $B_N(s + t, r) = B_N(s, r) + \{t\}$. En effet, $w \in B_N(s + t, r)$ si et seulement si $w - t \in B_N(s, r)$, si et seulement si $w \in B_N(s, r) + \{t\}$. En conséquence, $B_N(v, r) = B_N(s, r) + \{t\} \subseteq S + T$, vu que $B_N(s, r) \subseteq S$ et $\{t\} \subseteq T$, et $S + T$ est ouvert, comme on voulait démontrer.