MAT303
Premier semestre — 2020–2021

Fiche Supplémentaire: Exemples

1. *Un espace de fonctions.* On considère $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles.

(a) Montrer que E est un espace vectoriel réel.

(b) En considérant la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ donnée par $f_k(x) = x^k$ pour tout $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$, montrer que E est de dimension infinie.

(c) Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]}(|f(x)|).$$

(i) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

(ii) Quelle est la boule unité, la sphère unité de $\| \ \|_\infty$?

(iii) Pour f dans E, écrire avec des quantificateurs que $g \in B_{\| \ \|_\infty}(f,\varepsilon)$. Représenter schématiquement les graphes de f et g.

(iv) Soit $h \in E$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|h_n - h\|_\infty = 0.$$

Justifier l'expression : h_n *converge uniformément vers* h.

(d) Pour toute fonction $f \in E$, on pose maintenant

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

(e) En considérant la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, montrer que les deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

(f) Montrer que l'application $E \to \mathbb{R}$ donnée par $f \mapsto f(0)$ est linéaire et continue pour E muni de $\| \ \|_\infty$, mais pas pour E muni de $\| \ \|_1$.

2. *Continuité du déterminant.*

(a) Montrer que l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.

(b) Soit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille n. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.

(c) Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices telles que pour tout k, il existe un vecteur x_k tel que $M_k x_k = 0$. Montrer que la limite de la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas inversible.

(d) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

3. *Compacité de* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On définit le groupe orthogonal

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tMM = I_n\right\}.$$

(a) Montrer que l'application $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donnée par $M \mapsto {}^tMM$ est continue (on précisera la norme considérée sur $M_n(\mathbb{R})$).

(b) Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que si C_i, $i = 1, \dots, n$, désignent les colonnes d'une matrice M de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le *symbole de Kronecker*, valant 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

(d) Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné, pour une norme de votre choix.

(e) Conclure quant au titre de l'exercice.

4. *Différentiabilité du déterminant.* On se place dans $M_n(\mathbb{R})$, et pour tout couple (k,l) d'entiers inférieurs à n, on note $E_{k,l}$ la matrice qui a tous ses coefficients nuls, sauf son coefficient (k,l), qui vaut 1. Autrement dit, $E_{k,l} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$, où l'on a utilisé le symbole de Kronecker.

(a) Montrer que $(E_{1,1}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$ forme une base de $M_n(\mathbb{R})$. On note $(x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{n,n})$ les coordonnées dans cette base.

(b) Pour tout (k,l), déterminer

$$\lim_{t\to 0} \frac{\det(I_n + tE_{k,l}) - \det(I_n)}{t}.$$

En déduire les dérivées partielles de l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ au point I_n de $M_n(\mathbb{R})$.

(c) Étant donné $H \in M_n(\mathbb{R})$, que vaut la différentielle $D\det_{I_n}(H)$ de det en I_n appliquée à H ?

5. *Première utilisation de la définition abstraite de différentiabilité.* Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle.

6. *Différentiabilité de la norme.* Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que $\|\ \| : E \to \mathbb{R}$ n'est pas différentiable en 0 (*indication* : penser aux dérivées directionnelles).

(b) Si $\|\ \|$ est une norme euclidienne, montrer que $\|\ \|^2 : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point, que $\|\ \| : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point sauf 0, et exprimer leur différentielle en termes du produit scalaire sur E.

(c) Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ où $\|\ \|$ est différentiable pour $\|\ \|$ égal à $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$.