

TD 5 : Dérivées partielles, différentielle.

Exercice 1 : Ensemble de définition, Dérivées partielles

Pour les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes, trouver et représenter dans \mathbb{R}^2 le domaine de définition, puis calculer les dérivées partielles premières lorsqu'elles existent.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 + x^2 \sin(xy), & f(x, y) &= x^4 e^y, & f(x, y) &= \ln(1 - \|(x, y)\|_2^2), \\ f(x, y) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right), & f(x, y) &= \sqrt{x - y^2}, & f(x, y) &= \ln(\sin(x - y)). \end{aligned}$$

Exercice 2 : Dérivées directionnelles I

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.

1. Soit θ un réel fixé. Que représente géométriquement la fonction $g_\theta(r) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$?
2. Montrer que pour tout réel θ , la fonction g_θ est dérivable en 0.
3. Montrer que pourtant, f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 3 : Dérivées directionnelles II

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x \cos y + ye^x$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit \vec{u}_θ le vecteur de coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ dans la direction de \vec{u}_θ . Pour quelle valeur de θ est-elle maximale ? Interpréter cette information sur le graphe de f .

Exercice 4 : Matrice Jacobienne

Calculer la matrice jacobienne en tout point de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ suivante et exprimer la différentielle $df_{(1,1)}$:

$$f(x, y) = (\sin(xy), xe^{-(x^2+y^2)}) .$$

Exercice 5 : Dérivées partielles secondes I

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , mais pas de classe C^2 .

Exercice 6 : Dérivés partielles secondes II

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f .
2. Etudier l'existence et la valeur de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent en $(0, 0)$ mais n'ont pas la même valeur. Quelle est la classe de f ?

Exercice 7 : Extrema I

Trouver les points critiques sur \mathbb{R}^2 des fonctions suivantes.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy, \quad f(x, y) = xe^y + ye^x$$

Discuter leur nature.

Exercice 8 : Extrema II

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $g_k(x)$ définie par $g_k(x) = f(x, kx)$ admet un minimum local en 0.
2. La fonction f admet-elle un minimum local en $(0, 0)$?

Exercice 9 : Divergence et rotationnel

Un champ de vecteurs différentiable sur \mathbb{R}^2 est la donnée d'une fonction dérivable

$$V : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto V(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y)) \in \mathbb{R}^2.$$

La divergence et le rotationnel d'un champ V sont donnés par

$$\operatorname{div}(V) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(V) = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}.$$

Calculer la divergence et le rotationnel des champs de vecteurs suivants. Dessiner les champs de vecteurs et interpréter les résultats.

$$V(x, y) = (x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (\text{champ divergent})$$

$$V(x, y) = (-y, x) \quad (\text{tourbillon}) \quad V(x, y) = (1, \cos x) \quad (\text{transport parallèle})$$