MAT303

Premier semestre — 2020–2021

Fiche 5: Dérivées partielles, différentielle

1. *Ensemble de définition et dérivées partielles.* On considère les expressions suivantes :
(a) $f(x,y) = x^3 + x^2 \sin(xy)$, (b) $f(x,y) = x^4 e^y$, (c) $f(x,y) = \ln(1-(x^2+y^2))$, (d) $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, (e) $f(x,y) = \sqrt{x-y^2}$, (f) $f(x,y) = \ln(\sin(x-y))$, pour x, y des variables réelles. Déterminer le domaine de définition de la fonction associée à chaque expression précédente, le représenter dans $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières lorsqu'elles existent.

2. *Dérivées directionnelles I.* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^2/x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f(0,y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

- (a) Soit θ un réel fixé. Que représente géométriquement la fonction $g_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g_\theta(r) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$?
- (b) Montrer que pour tout réel θ, la fonction g_θ est dérivable en 0.
- (c) Montrer que, pourtant, f n'est pas continue en $(0,0)$.

3. *Dérivées directionnelles II.* Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\cos(y) + ye^x$. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, soit $\vec{u}_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ dans la direction de $\vec{u}_\theta$. Pour quelle valeur de θ est-elle maximale ? Interpréter cette information sur le graphe de f.

4. *Dérivées directionnelles III.* On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^n$, ainsi que les points $P \in \mathbb{R}^n$ et les vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ non nuls :

- (a) la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

  avec le point $P = (1,2)$ et le vecteur $v = (3,5)$;
- (b) la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$, avec le point $P = (0,0,0)$ et le vecteur $v = (5,1,-2)$;
- (c) la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$, avec le point $P = (1,1)$ et le vecteur $v = (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))$;
- (d) la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = ye^{-x}$, avec le point $P = (0,4)$ et le vecteur $v = (\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3))$.

Calculer la dérivée directionnelle de f en P dans la direction de v.

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x,y) = ye^{-xy}$. Calculer tous les vecteurs $v \in \mathbb{R}^2$ de norme 1 tels que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,2) = 1.$$

6. *Matrice jacobienne.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x,y) = \Big(\sin(xy), xe^{-(x^2+y^2)}\Big).$$

Calculer sa matrice jacobienne en tout point et en $(1,1)$.

7. *Règle de dérivation en chaîne I.* Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ et $h : \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}^2$ données par

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ et $g(t) = (\sin(t), e^t)$,
(b) $f(x,y) = \cos(x+4y)$ et $g(t) = (5t^4, 1/t)$,
(c) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ et $g(t) = (\ln(t), \cos(t))$,
(d) $f(x,y) = x^2y^3$ et $h(s,t) = (s\cos(t), s\sin(t))$,
(e) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ et $h(s,t) = (st^2, s^2t)$,
(f) $f(x,y) = e^x + 2y$ et $h(s,t) = (s/t, t/s)$.

Calculer la dérivée de la fonction $f \circ g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ et le gradient de $f \circ h : \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$ en employant la règle de dérivation en chaîne.

8. *Règle de dérivation en chaîne II.* Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables telles que

$$g(3) = 2, g'(3) = 5, h(3) = 7, h'(3) = -4, \frac{\partial f}{\partial x}(2,7) = 6 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(2,7) = -8.$$

Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $k(t) = f(g(t), h(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $k'(3)$.

9. *Dérivés partielles secondes I.* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, mais pas de classe C^2.

10. *Dérivés partielles secondes II.* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } y = 0, \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right), & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

(a) Étudier la continuité de f.
(b) Étudier l'existence et la valeur de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Montrer que $\partial^2 f/(\partial x \partial y)$ et $\partial^2 f/(\partial y \partial x)$ existent en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur. Quelle est la classe de f ?
(c) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

11. *Extrema I.* On considère les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ suivantes :
(a) $f(x,y) = x^2+y^2+x^3$, (b) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$, (c) $f(x,y) = x^4+y^4-4xy$,
(d) $f(x,y) = x^2+xy+y^2+2x+3y$, (e) $f(x,y) = xe^y+ye^x$, (f) $f(x,y) = x^2-y^2$,
(g) $f(x,y) = (2x+1-y)^2$, (h) $f(x,y) = (x-y)^2+1+2(x-y)$,
(i) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$, (j) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}+xy$, (k) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$,
(l) $f(x,y) = x^2-2xy^2+y^4-y^5$, (m) $f(x,y) = 1/(1+x^2+y^2)$,
(n) $f(x,y) = x^2-y^2-xy+3x+3y+1$,
(o) $f(x,y) = \begin{cases} e^{1/(x^2y)}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$

Trouver les points critiques des fonctions précédentes et déterminer leur nature.

12. *Extrema II.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2.$$

(a) Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f et calculer la matrice hessienne associée.

(b) Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Montrer que l'application $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g_v(t) = f(ta, tb)$ a un minimum en $t = 0$.

(c) Montrer que f n'admet pas un extremum en $(0,0)$.
Indication : considérer la courbe $\alpha(t) = (t, 3t^2/2)$.

13. Est-ce qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_{a,b}(x,y) = e^{y^4 - x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

ait un minimum local en $(2,1)$?

14. *Divergence et rotationnel.* Soit $S \subseteq \mathbb{R}^2$ une partie ouverte. Un **champ de vecteurs** différentiable sur S est la donnée d'une fonction $V : S \to \mathbb{R}^2$ différentiable. On écrira $V(x,y) = (V_1(x,y), V_2(x,y))$, pour tout $(x,y) \in S$. La **divergence** et le **rotationnel** d'un champ V sont donnés par

$$\mathrm{div}(V)(x,y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y)$$

et

$$\mathrm{rot}(V)(x,y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y),$$

pour tout $(x,y) \in S$. On considère les champs de vecteurs (sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$, resp.) suivants :

(a) $V(x,y) = (x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2})$ (**champ divergent**),

(b) $V(x,y) = (-y, x)$ (**tourbillon**),

(c) $V(x,y) = (1, \cos(x))$ (**transport parallèle**).

Calculer la divergence et le rotationnel des champs de vecteurs précédents. Dessiner les champs de vecteurs et interpréter les résultats.