

TD 4 : Continuité et topologie

Exercice 1 : Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans lui-même, définie par $f(x, y) = (2x + y, 2y + x)$.

1. Justifier que pour tout vecteur $u = (x, y)$, on a $\|f(u)\|_1 \leq 3\|u\|_1$.
2. Montrer que f est continue en $(0, 0)$, puis qu'elle est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 : Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans lui-même, définie par $f(x, y) = (x - y, x + 2y)$. Soit S la sphère unité de \mathbb{R}^2 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Justifier qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout u dans S , on ait $\|f(u)\|_\infty \leq C$. On pourra raisonner graphiquement pour trouver un tel C .
2. En déduire que pour tout vecteur non-nul de \mathbb{R}^2 , on a $\|f(u)\|_\infty \leq C\|u\|_\infty$.
3. Montrer que f est continue en $(0, 0)$, puis qu'elle est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3 : On munit \mathbb{R}^n d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On note $(e_i)_{i=1..n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, un vecteur, qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\|f(x)\| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| \cdot \|f(e_i)\|)$$

2. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C\|x\|_1$.
3. En déduire qu'il existe $C' > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C'\|x\|$.
4. En déduire que f est continue pour la norme $\|\cdot\|$ choisie au départ. La continuité de f dépend-elle de la norme choisie ?

Exercice 4 : Peut-on prolonger par continuité en 0 les fonctions définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R} par les formules suivantes.

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin(y) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{|y| + x^2} \quad f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{|x| + |y|}.$$

Exercice 5 : Soit N_1 et N_2 deux normes sur \mathbb{R}^n , et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Ecrire la définition de « f est k -lipschitzienne pour N_1 ». Montrer que si f est k -lipschitzienne pour N_1 , il existe k' , tel que f est k' -lipschitzienne pour N_2 .
2. Ecrire la définition de « f est uniformément continue pour N_1 ». Montrer que si f est uniformément continue pour N_1 , elle l'est aussi pour N_2 .

Exercice 6 : Soit $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne sur $[0, 1]$ et sur $[1, 2]$. Montrer que f est K -lipschitzienne sur $[0, 2]$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique et continue. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 8 : Soit F une partie de \mathbb{R}^n et soit $f : F \rightarrow F$ une fonction continue. On appelle *point fixe* de f un point $x \in F$ tel que $f(x) = x$.

1. Soit $F = [0, 1]$, montrer que f a un point fixe.
2. Si $F = [0, 1[$, f a-t-elle forcément un point fixe ?
3. Que dire si $F = [0, 1] \cup [2, 3]$?
4. On se place dans $F = \mathbb{R}^2$, trouver un exemple de fonction sans point fixe. Idem pour F un compact de \mathbb{R}^2 qui est « en un seul morceau ».

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est *coercive*, c'est-à-dire que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.

1. Montrer qu'un ensemble de niveau $N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \lambda\}$ est un compact de \mathbb{R}^2 . Est-ce forcément une « ligne » de niveau ?
2. Montrer qu'un ensemble de sous-niveau $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq \lambda\}$ est un compact de \mathbb{R}^2 .
3. En déduire que f est minorée et atteint son minimum.

Exercice 10 : Vrai/Faux Soit f une application continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'image d'un fermé de \mathbb{R}^n par f est fermé.
2. L'image réciproque d'un ouvert de \mathbb{R}^m par f est ouverte.
3. L'image réciproque d'une boule ouverte de \mathbb{R}^m est une boule ouverte de \mathbb{R}^n .
4. L'image réciproque d'un compact de \mathbb{R}^m est un compact de \mathbb{R}^n .
5. L'image d'un compact de \mathbb{R}^n est un compact de \mathbb{R}^m .
6. Soit B une partie bornée de \mathbb{R}^n et $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue sur B . Alors $f(B)$ est bornée.