MAT303

Premier semestre — 2020–2021

Fiche 4: Continuité et topologie

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application, et soient $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ et $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ des parties. Dans les cas suivants, déterminer s'il faut remplir les points de suspension avec $\subseteq$, $\supseteq$ ou $=$ pour que l'énonce respectif devienne vrai :

(a) $f(S \cup T) \dots f(S) \cup f(T)$,

(b) $f^{-1}(X \cup Y) \dots f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$,

(c) $f(S \cap T) \dots f(S) \cap f(T)$,

(d) $f^{-1}(X \cap Y) \dots f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$,

(e) $f(\mathbb{R}^n \setminus S) \dots \mathbb{R}^m \setminus f(S)$,

(f) $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus X) \dots \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(X)$.

Solution.

(a) On affirme que $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$. En effet, on remarque d'abord que, pour $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ tels que $U \subseteq V$, alors $f(U) \subseteq f(V)$. En particulier, les inclusions $S \subseteq S \cup T$ et $T \subseteq S \cup T$ nous disent que $f(S) \subseteq f(S \cup T)$ et $f(T) \subseteq f(S \cup T)$, ce qui implique que $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$. Par ailleurs, si $y \in f(S \cup T)$, il existe $x \in S \cup T$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in S \cup T$, alors $x \in S$ ou $x \in T$, ce qui implique que $y \in f(S)$ ou $y \in f(T)$. En conséquence, $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$, et on trouve alors l'égalité.

(b) On affirme que $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. En effet, on remarque d'abord que, pour $W, Z \subseteq \mathbb{R}^m$ tels que $W \subseteq Z$, alors $f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(Z)$. En particulier, les inclusions $X \subseteq X \cup Y$ et $Y \subseteq X \cup Y$ nous disent que $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$ et $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$, ce qui implique que $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cup Y)$. Par ailleurs, si $x \in f^{-1}(X \cup Y)$, il existe $y \in X \cup Y$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in X \cup Y$, alors $y \in X$ ou $y \in Y$, ce qui implique que $x \in f^{-1}(X)$ ou $x \in f^{-1}(Y)$. En conséquence, $f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$, et on trouve alors l'égalité.

(c) On affirme que $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$. En effet, les inclusions $S \cap T \subseteq S$ et $S \cap T \subseteq T$ nous disent que $f(S \cap T) \subseteq f(S)$ et $f(S \cap T) \subseteq f(T)$, ce qui implique que $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$. En général l'égalité n'est pas vérifiée. Par exemple, si $n = m = 1$, $S = [0,1]$, $T = [-1,0]$ et $f(x) = x^2$, alors $f(S) = f(T) = [0,1]$ ce qui implique que $f(S) \cap f(T) = [0,1]$, mais $S \cap T = \{0\}$, ce qui nous donne $f(S \cap T) = \{0\}$.

(d) On affirme que $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. En effet, les inclusions $X \cap Y \subseteq X$ et $X \cap Y \subseteq Y$ nous disent que $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X)$ et $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(Y)$, ce qui implique que $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. Par ailleurs, si $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$, alors $y = f(x) \in X$ et $y = f(x) \in Y$. En conséquence, $y = f(x) \in X \cap Y$, ce qui implique que $x \in f^{-1}(X \cap Y)$. En conséquence, $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cap Y)$, et on trouve alors l'égalité.

(e) Il n'y a aucune relation d'inclusion générale dans ce cas. Par exemple, si $n = m = 1$, $S = [-1,2]$ et $f(x) = x^2$, alors $f(S) = [0,4]$, ce qui nous dit que $\mathbb{R} \setminus f(S) = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>4}$. Par ailleurs, $\mathbb{R} \setminus S = \mathbb{R}_{<-1} \cup \mathbb{R}_{>2}$, ce qui implique que $f(\mathbb{R} \setminus S) = \mathbb{R}_{>1}$.

(f) On affirme que $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus X) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(X)$. En effet, $x \in f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus X)$ si et seulement si $f(x) \in \mathbb{R}^m \setminus X$, si et seulement si $f(x) \notin X$, si et seulement si $x \notin f^{-1}(X)$, si et seulement si $x \in \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(X)$.

2. On considère les fonctions

(a) $f : [0,1] \to [0,1]$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1-x, & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = \begin{cases} 1/b, & \text{si } x = a/b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z} \text{ premiers entre eux et } b > 0, \\ 0, & \text{si } x \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Calculer l'ensemble formé des points de continuité de f et de g.

Solution.

(a) On voit bien que f est continue en $x = 1/2$. En effet, pour $\epsilon > 0$, on pose $\delta = \epsilon > 0$. Si $|x - 1/2| \leq \delta$, alors

$$\big|f(x) - f(1/2)\big| = \big|f(x) - 1/2\big| \leq \max\big(|x - 1/2|, |1 - x - 1/2|\big) = |x - 1/2| \leq \delta = \epsilon.$$

On affirme en plus que f n'est pas continue en $x \in [0,1] \setminus \{1/2\}$. En effet, soit $x_0 \in [0,1] \setminus \{1/2\}$. On utilise qu'il existe deux suites convergentes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ([0,1] \cap \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ qui convergent vers x_0 quand n tend vers $+\infty$. Alors $f(q_n) = q_n$ converge vers x_0 quand n tend vers $+\infty$ et $f(r_n) = 1 - r_n$ converge vers $1 - x_0$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $x_0 \neq 1/2$, $x_0 \neq 1 - x_0$ et f n'est pas continue en x_0.

(b) On voit bien que f est continue en $x = 0$. En effet, pour $\epsilon > 0$, on pose $\delta = \epsilon > 0$. Si $|x| \leq \delta$ et $x \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, alors $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = 0$. Si $|x| \leq \delta$, $x = a/b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et $b > 0$, alors

$$\big|f(x) - f(0)\big| = \big|f(x)\big| \leq \frac{1}{b} \leq \frac{|a|}{b} = |x| \leq \delta = \epsilon.$$

On affirme en plus que f n'est pas continue en $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. En effet, soit $x = a/b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et $b > 0$. On utilise qu'il existe une suite convergente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x quand n tend vers $+\infty$. Si f était continue en x, alors $0 = f(r_n)$ convergerait vers $0 \neq f(x) = 1/b$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui est absurde. Finalement, on va montrer que f est continue en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On suppose que ce n'est pas vrai. Alors, il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x quand n tend vers $+\infty$ telle que $|f(x_n)| = f(x_n) > \epsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition de f, $x_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_n = a_n/b_n$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et $b_n > 0$. La condition $|f(x_n)| = f(x_n) > \epsilon$ nous dit que $1/b_n > \epsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_{>0}^{\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $D \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ l'ensemble fini $D = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ et soit $c = \prod_{d\in D} d$. Alors $x_n \in \{m/c : m \in \mathbb{Z}\} = F \subseteq \mathbb{Q}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme l'ensemble F est fermé, cela impliquerait que $x \in F \subseteq \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. En conséquence, f est continue en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. On considère les ensembles suivants :

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$,

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < xy + z < 2\}$,

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.

Pour chaque ensemble, déterminer s'il s'agit d'une partie ouverte ou fermée de l'espace $\mathbb{R}^n$ respectif.

Solution.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = y^2(e^x - 1) + yx$. C'est clair que f est continue, puisqu'elle s'obtient de faire sommes, produits et compositions de fonctions continues. Alors, l'ensemble donné est $f^{-1}(\{1\})$. Comme $\{1\}$ est fermé et f est continue, $f^{-1}(\{1\})$ est fermé.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y,z) = xy + z$. C'est clair que f est continue, puisqu'elle s'obtient de faire sommes, produits et compositions de fonctions continues. Alors, l'ensemble donné est $f^{-1}(\,]1,2[\,)$. Comme $]1,2[$ est ouvert et f est continue, $f^{-1}(\,]1,2[\,)$ est ouvert.

(c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = \sin^2(x) - xy^2$. C'est clair que f est continue, puisqu'elle s'obtient de faire sommes, produits et compositions de fonctions continues. Alors, l'ensemble donné est $f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq -2})$. Comme $\mathbb{R}_{\geq -2}$ est fermé et f est continue, $f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq -2})$ est fermé.

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue telle que $f(x) = f(y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Montrer que f est une fonction constante. En déduire que, étant données $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{Q}^n$, alors $f = g$.

Solution. C'est clair que la condition demandée nous dit qu'il existe $c \in \mathbb{R}^m$ tel que $f(x) = c$, pour tout $x \in \mathbb{Q}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On utilise qu'il existe une suite convergente $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{Q}^n)^{\mathbb{N}}$ qui convergent vers x quand n tend vers $+\infty$. Alors, $f(x)$ est la limite de la suite constante $(f(q_k))_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ de valeur c, *i.e.* $f(x) = c$. La deuxième partie suit directement de la première si l'on utilise la fonction $f - g$.

5. (a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On rappelle que le **graphe** de f est l'ensemble

$$\mathrm{Gr}(f) = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in \mathbb{R}^n \Big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}.$$

Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé. La réciproque est-elle vraie ?

(b) Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et soit $f : K \to \mathbb{R}^m$ une fonction telle que l'image $\mathrm{Im}(f)$ soit bornée et $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé, alors f est continue.

Solution.

(a) Soit $(x_i, f(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Gr}(f)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite $(a,b) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Il faut montrer que $(a,b) \in \mathrm{Gr}(f)$. On remarque que la convergence de $(x_i, f(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Gr}(f)^{\mathbb{N}}$ implique que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}^n$ quand i tend vers $+\infty$ et $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ converge vers $b \in \mathbb{R}^m$ quand i tend vers $+\infty$. Par continuité de f, $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(a) \in \mathbb{R}^m$ quand i tend vers $+\infty$ Par unicité de la limite $b = f(a)$, *i.e.* $(a,b) \in \mathrm{Gr}(f)$.

La réciproque n'est pas vraie. En effet, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On voit bien que

$$\mathsf{Gr}(f) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}.$$

Le dernier ensemble est fermé, puisque il s'agit de l'image réciproque de l'ensemble fermé $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ par la fonction continue $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = xy$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En conséquence, $\mathsf{Gr}(f)$ est fermé. Par ailleurs, la fonction f n'est pas continue, car la suite $(1/2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers 0, mais

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \neq 0 = f(0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\right).$$

(*b*) On affirme d'abord que $\mathsf{Gr}(f)$ est compact. En effet, comme l'image $\mathsf{Im}(f)$ de f est bornée, on peut l'inclure dans un fermé et borné K', *i.e.* un compact. Alors $\mathsf{Gr}(f) \subseteq K \times K'$. Comme le produit de compacts est compact, $K \times K'$ est compact, et $\mathsf{Gr}(f) \subseteq K \times K'$ est aussi compact, vu qu'il s'agit d'une partie fermée d'un compact.

Pour démontrer la continuité de f, il suffit de montrer que, si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $x \in K$ quand i tend vers $+\infty$, alors la suite $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in \mathbb{R}^m$ quand i tend vers $+\infty$. On considère la suite $(x_i, f(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathsf{Gr}(f)^{\mathbb{N}}$ et soit $(y_i, f(y_i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathsf{Gr}(f)^{\mathbb{N}}$ une sous-suite. On va utiliser le fait suivant : étant donné a un élément d'un espace vectoriel normé et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui satisfait que toute sous-suite admet une sous-suite convergente avec limite a, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec limite a. On laisse à la lectrice/au lecteur la preuve de ce fait trivial. Comme $\mathsf{Gr}(f)$ est compact, alors $(y_i, f(y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente $(y_{\phi(i)}, f(y_{\phi(i)}))_{i\in\mathbb{N}}$ avec limite dans $\mathsf{Gr}(f)$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction croissante et injective. Soit $(a,b) \in \mathsf{Gr}(f)$ sa limite. Comme $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in K$, et toute sous-suite d'une suite convergente est convergente avec la même limite, on conclut que $x = a$ et, vu que $(a,b) \in \mathsf{Gr}(f)$, $b = f(x)$. D'après le fait, $(x_i, f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x, f(x))$, ce qui implique que $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in \mathbb{R}^m$ quand i tend vers $+\infty$.

6. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, notée $\|\ \|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On note $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(*a*) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, un vecteur, qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\|f(x)\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right) \sup_{j\in[\![1,n]\!]} \|f(e_j)\|.$$

(*b*) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C\|x\|_1$.

(*c*) En déduire qu'il existe $C' > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C'\|x\|$.

(*d*) En déduire que f est continue pour la norme $\|\ \|$ choisie au départ. La continuité de f dépend-elle de la norme choisie ?

Solution.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= \Big\| f\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\Big\| \leq \sum_{i=1}^n \big\|x_i f(e_i)\big\| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| \big\|f(e_i)\big\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \sup_{j\in[\![1,n]\!]} \|f(e_j)\| \leq \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|\Big) \sup_{j\in[\![1,n]\!]} \|f(e_j)\|.\end{aligned}$$

(b) On pose

$$C = 1 + \sup_{j\in[\![1,n]\!]} \|f(e_j)\|.$$

Alors $C > 0$. En plus, d'après l'item précédent on conclut que $\|f(x)\| \leq C\|x\|_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Comme les normes $\|\ \ \|$ et $\|\ \ \|_1$ sont équivalentes, il existe $\bar{C} > 0$ tel que $\|x\|_1 \leq \bar{C}\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $C' = C\bar{C}$. Alors $C' > 0$ et $\|f(x)\| \leq C'\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(d) D'après l'item précédent, $\|f(x)\| \leq C'\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En conséquence,

$$\big\|f(x) - f(y)\big\| = \big\|f(x-y)\big\| \leq C'\|x-y\|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Cela nous dit que f est C'-lipschitzienne (voir Exercice **8**) et en conséquence f est (uniformément) continue. En effet, étant donné $\epsilon > 0$, on pose $\delta = \epsilon/C'$. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ satisfont que $\|x-y\| < \delta$, alors

$$\big\|f(x) - f(y)\big\| \leq C'\|x-y\| < C'\delta = C'\frac{\epsilon}{C'} = \epsilon.$$

7. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ suivantes.
(a) $f(x,y) = xy/(|x|+|y|)$, (b) $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$,
(c) $f(x,y) = x^2y^2/(x^2+y^2)$, (d) $f(x,y) = (1+x^2+y^2)\sin(y)/y$,
(e) $f(x,y) = x^2/(|y|+x^2)$, (f) $f(x,y) = (\sin(x)+\sin(y))/(|x|+|y|)$.
Déterminer si f est prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Solution.

(a) Comme

$$\big|f(x,y)\big| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq |x|,$$

où l'on a utilisé que $|y| \leq |x|+|y|$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on voit bien que $f(x,y)$ converge vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

(b) Dans ce cas la limite n'existe pas. En effet, si l'on prend la suite convergente $(x_n, y_n) = (1/2^n, 1/2^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (avec limite $(0,0)$), on trouve que $f(x_n, y_n) = 1/2$ tend vers $1/2$ quand n vers $+\infty$. Par ailleurs, si l'on prend la suite convergente $(x_n, y_n) = (1/2^n, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (avec limite $(0,0)$), on trouve que $f(x_n, y_n) = 0$ tend vers 0 quand n vers $+\infty$.

(c) Comme

$$\big|f(x,y)\big| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq x^2,$$

où l'on a utilisé que $y^2 \leq x^2+y^2$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on voit bien que $f(x,y)$ converge vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

(d) Comme $\sin(y)/y$ converge vers 1 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ et $1+x^2+y^2$ converge 1 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, alors l'arithmétique de limites nous dit que $f(x,y)$ converge vers 1 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

(e) Dans ce cas la limite n'existe pas. En effet, si l'on prend la suite convergente $(x_n, y_n) = (1/2^n, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (avec limite $(0,0)$), on trouve que $f(x_n, y_n) = 1$ tend vers 1 quand n vers $+\infty$. Par ailleurs, si l'on prend la suite convergente $(x_n, y_n) = (0, 1/2^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (avec limite $(0,0)$), on trouve que $f(x_n, y_n) = 0$ tend vers 0 quand n vers $+\infty$.

(f) Dans ce cas la limite n'existe pas. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite 0 telle que $\sin(x_n)/x_n$. En conséquence, la suite $(x_n, y_n) = (x_n, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers $(0,0)$ quand n vers $+\infty$. C'est clair que la suite $(x'_n, y'_n) = (-x_n, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers $(0,0)$ quand n vers $+\infty$. Or, $f(x_n, y_n) = \sin(x_n)/|x_n| = \sin(x_n)/x_n$ tend vers 1 quand n vers $+\infty$, tandis que $f(x'_n, y'_n) = \sin(x_n)/|x_n| = -\sin(x_n)/x_n$ tend vers -1 quand n vers $+\infty$.

8. Soit $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction, N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et N' une norme sur $\mathbb{R}^m$. Si $k \in \mathbb{R}_{>0}$, on rappelle que f est dite k**-lipschitzienne** (pour N et N') si

$$N'\big(f(x)-f(y)\big) \leq kN(x-y),$$

pour tout $x, y \in S$. On dit que f est **lipschitzienne** (pour N et N') s'il existe $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Par ailleurs, on rappelle que f est **uniformément continue** (pour N et N') si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in S$, $N(x-y) \leq \delta$ implique que $N'(f(x)-f(y)) \leq \epsilon$. C'est clair que toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$, et N'_1 et N'_2 deux normes sur $\mathbb{R}^m$.

(a) Montrer que si f est k-lipschitzienne pour N_1 et N'_1, il existe k', tel que f est k'-lipschitzienne pour N_2 et N'_2.

(b) Montrer que si f est uniformément continue pour N_1 et N'_1, elle l'est aussi pour N_2 et N'_2.

(c) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Montrer que f est uniformément continue mais elle n'est pas lipschitzienne.

Solution.

(a) L'équivalence de normes nous qu'il existe $C, C' > 0$ tels que $N_1(z) \leq CN_2(z)$ et $N'_2(z') \leq C'N'_1(z')$, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ et $z' \in \mathbb{R}^m$. On voit bien que

$$N'_2\big(f(x)-f(y)\big) \leq C'N'_1\big(f(x)-f(y)\big) \leq C'kN_1(x-y) \leq CC'kN_2(x-y),$$

pour tout $x, y \in S$. Alors f est k'-lipschitzienne pour N_2 et N'_2, où $k' = CC'k$.

(b) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(c) On va montrer que f est uniformément continue. C'est clair que f est continue sur $[-1,1]$. Comme $[-1,1]$ est un compact, un résultat du cours nous dit que f est uniformément continue. On va montrer que f n'est pas lipschitzienne. On procède par l'absurde : on suppose qu'elle est k-lipschitzienne avec $k > 0$. Cela implique que

$$\frac{|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}|}{|x-y|} \leq k,$$

pour tous $x \neq y$ dans $[-1,1]$. En particulier, si l'on prend $y = 0$, l'inégalité précédente devient

$$\frac{|\sqrt[3]{x}|}{|x|} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2} \leq k,$$

pour tous $x > 0$ dans $[-1,1]$. C'est clair que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \,]0,1]^{\mathbb{N}}$ donnée par $x_n = 1/8^n$ ne respecte pas l'inégalité précédente.

9. Soit $k > 0$ et $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur $[0,2]$.

Solution. Il faut montrer que $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$, pour tout $x, y \in [0,2]$. On sait que l'inégalité précédente est vérifiée si $x, y \in [0,1]$ ou si $x, y \in [1,2]$. Il suffit de démontrer que $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$, pour tout $x \in [0,1]$ et $y \in [1,2]$. Pour cela on fixe $x \in [0,1]$ et on va montrer que $f(x)-k(y-x) \leq f(y) \leq f(x)+k(y-x)$, pour tout $y \in [1,2]$. On sait que $f(1)-k(y-1) \leq f(y) \leq f(1)+k(y-1)$ et que $f(x)-k(1-x) \leq f(1) \leq f(x)+k(1-x)$. En conséquence, $f(y) \leq f(1)+k(y-1) \leq f(x)+k(1-x)+k(y-1) = f(x)+k(y-x)$ et $f(y) \geq f(1)-k(y-1) \geq f(x)-k(1-x)-k(y-1) = f(x)-k(y-x)$, comme on voulait démontrer.

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, où $T > 0$, et continue. Montrer que f est uniformément continue.

Solution. On considère la fonction $g = f|_{[-T,T]}$. Comme $[-T,T]$ est un compact et g est continue, un résultat du cours nous dit que g est uniformément continue, *i.e.* pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la condition $|x-y| \leq \delta$ implique

$$|g(x)-g(y)| \leq \epsilon,$$

pour tous $x, y \in [-T,T]$. On va montrer que f est uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$. On pose $\delta' = \min(\delta, T)$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leq \delta'$. On suppose sans perte de généralité que $x < y$. C'est clair qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + nT \in [-T,0]$. Comme $|x-y| \leq \delta' \leq T$, alors $y + nT \in\in [-T,T]$. En conséquence,

$$|f(x)-f(y)| = |f(x+nT)-f(y+nT)| = |g(x+nT)-g(y+nT)| \leq \epsilon,$$

comme on voulait démontrer.

11. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et N' une norme sur $\mathbb{R}^m$. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble et $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions uniformément continues pour N et N'.

(a) Montrer que la fonction $f+g : S \to \mathbb{R}^m$ donnée par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, pour tout $x \in S$, est uniformément continue pour N et N'.

(b) La fonction produit $f.g : S \to \mathbb{R}^m$ est donnée par $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, pour tout $x \in S$. La fonction produit $f.g$ est-elle uniformément continue pour N et N' ?

(c) Soit $h : f(S) \to \mathbb{R}^p$ une fonction uniformément continue pour N' et N'', où N'' est une norme sur $\mathbb{R}^p$. Montrer que $h \circ f$ est uniformément continue pour N et N''.

Solution.

(a) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(b) Non. On pourra prendre $n = m = 1$, $S = \mathbb{R}$ et $f(x) = g(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction produit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $h(x) = x^2$, n'est pas uniformément continue. En effet, si $x_n = n$ et $y_n = n + 1/n$, où $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, on voit que

$$\big|h(x_n) - h(y_n)\big| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, même si $|x_n - y_n| = 1/n$.

(c) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

12. On considère les fonctions suivantes :

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = 1/(1 + x^2)$,

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, où $g(x) = (\cos(x), \sin(x))$.

Démontrer que f et g sont uniformément continues.

Solution.

(a) Cest clair que

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(y)\big| &= \frac{|x-y||x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{|x-y|(|x|+|y|)}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &= |x-y|\left(\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\right) \\ &\leq |x-y|\left(\frac{1}{(1+y^2)} + \frac{1}{(1+x^2)}\right) \leq 2|x-y|,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $|a| \leq 1 + a^2$ et $1 \leq 1 + b^2$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) On remarque d'abord que, étant donné une application $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que l'on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ pour tout $x \in S$, où $f_i : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, f est uniformément continue si et seulement si f_i est uniformément continue pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. La continuité uniforme de g s'agit d'une conséquence directe de l'exercice **10** et du fait précédent.

13. Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : F \to F$ une fonction continue. On appelle **point fixe** de f un point $x_0 \in F$ tel que $f(x_0) = x_0$.

(a) Soit $F = [0, 1]$, montrer que f a un point fixe.

(b) Si $F = [0, 1[$, f a-t-elle forcément un point fixe ?
Indication : on pourra considérer $f(x) = (x^2 + 1)/2$.

(c) Que dire si $F = [0, 1] \cup [2, 3]$?
Indication : on pourra considérer $f(x) = 3 - x$.

(d) On se place dans $F = \mathbb{R}^2$, trouver un exemple de fonction sans point fixe. Idem pour F un compact de $\mathbb{R}^2$ qui est “en un seul morceau”.
Indication : considérer $f(x, y) = (x+1, y+1)$ pour la première question, et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ avec la fonction $f(x, y) = (-x, -y)$ pour la deuxième question.

(e) Montrer que si F est une partie fermée et f est k-lipschitzienne avec $k < 1$, alors f a un point fixe.

(f) Montrer que le résultat précédent n'est pas vrai si F n'est pas fermé.
Indication : on pourra considérer $F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f(x) = x/2$.

(g) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}.$$

Montrer que f est 1-lipschitzienne mais f n'a pas de points fixes.

(h) Montrer que si F est compact et f est **contractante**, *i.e.*

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|,$$

pour tout $x, y \in F$ différents (où $\| \ \|$ est une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$), alors f a un seul point fixe.

Solution.

(a) Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ l'application donnée $g(x) = x - f(x)$. Alors $g(0) = -f(0) \leq 0$ et $g(1) = 1 - f(1) \geq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, vu que g est continue. En conséquence, $f(x_0) = x_0$.

(b) C'est clair que l'application $f : [0, 1[\to [0, 1[$ donnée par $f(x) = (x^2+1)/2$ est continue mais elle n'a pas de points fixes. En effet, $(x^2+1)/2 = x$ équivaut à $x = 1 \notin F$.

(c) C'est clair que la fonction $f : F \to F$ donnée par $f(x) = 3 - x$ est continue mais elle n'a pas de points fixes. En effet, $3 - x = x$ équivaut à $x = 3/2 \notin F$.

(d) C'est clair que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (x+1, y+1)$ est continue mais elle n'a pas de points fixes. Pour la deuxième question, on prend $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ et la fonction $f : F \to F$ donnée par $f(x, y) = (-x, -y)$. C'est clair que f est continue mais elle n'a pas de points fixes.

(e) Soit $x_0 \in F$ un point quelconque. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est clair que

$$\|x_{n+m} - x_n\| = \|f^{(n)}(x_m) - f^{(n)}(x_0)\| \leq k^n \|x_m - x_0\|.$$

En outre, l'inégalité triangulaire nous dit que

$$\|x_m - x_0\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} k^i \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1}{1-k} \|x_1 - x_0\|.$$

En conséquence,

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|,$$

ce qui implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}^n$ est complet, sa limite $x \in \mathbb{R}^n$ existe et comme F est fermé $x \in F$. Finalement, par continuité de f,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x,$$

comme on voulait démontrer.

(*f*) C'est clair que la fonction $f : F \to F$ donnée par $f(x) = x/2$, où $F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. C'est clair qu'elle est k-lipschitzienne avec $k = 1/2$ mais elle n'a pas de points fixes. En effet, $x/2 = x$ équivaut à $x = 0 \notin F$.

(*g*) On voit bien que f n'a pas de points fixes, puisque $f(x) = x$ équivaut à $x = \sqrt{x^2+1}$, mais $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$. On va utiliser l'identité

$$a + b \leq \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1},$$

valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. La preuve suit d'appliquer le carré deux fois. On a alors

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(y)\big| &\leq \frac{|x-y|}{2} + \frac{|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}|}{2} = \frac{|x-y|}{2} + \frac{|x-y||x+y|}{2(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1})} \\ &\leq |x-y|\Big(\frac{1}{2} + \frac{|x|+|y|}{2(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1})}\Big) \\ &\leq |x-y|\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) = |x-y|,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité précédente.

(*h*) Soit $g : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la fonction $g(x) = \|x - f(x)\|$, pour tout $x \in F$. Alors, g est continue, puisque elle s'écrit comme une composition de fonctions continues. Comme F est compact, g admet un minimum $x_0 \in F$. Si $g(x_0) = 0$, alors x_0 est un point fixe de f. On suppose que $\epsilon = g(x_0) > 0$. Alors, $g(f(x_0)) = \|f(x_0) - f(f(x_0))\| < \|x_0 - f(x_0)\| = g(x_0)$, ce qui est absurde. Par conséquent, x_0 est un point fixe de f. En plus, si $x_0' \neq x_0 \in F$ est un (autre) point fixe de f, alors $\|x_0 - x_0'\| = \|f(x_0) - f(x_0')\| < \|x_0 - x_0'\|$, ce qui est absurde.

14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est **coercive**, *i.e.*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(*a*) Montrer qu'un ensemble de niveau $N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Est-ce forcément une ligne de niveau ?

(*b*) Montrer qu'un ensemble de sous-niveau $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

(*c*) En déduire que f est minorée et atteint son minimum.

Solution.

(*a*) C'est clair que N_λ est fermé, étant l'image réciproque d'un fermé par un application continue. En plus, N_λ est borné. En effet, la condition

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

veut dire que, étant donné $C > 0$, il existe $C' > 0$ tel que $\|x\| > C'$ implique que $f(x) > C$. En conséquence, si l'on prend $C = |\lambda|$, $f(x) = \lambda \leq C$ implique que $\|x\| \leq C'$. Comme N_λ est fermé et borné, il est compact.

(*b*) L'argument dans l'item précédent montre aussi que S_λ est compact.

(*c*) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ avec $f(x) \leq \lambda$. Comme S_λ est compact et $f|_{S_\lambda}$ est continue, elle admet un minimum x_0. En particulier, $f(x_0) \leq f(x) \leq \lambda$ si $x \in S_\lambda$. Comme $f(x_0) \leq \lambda < f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S_\lambda$, x_0 est un minimum de f aussi.

15. *Vrai/Faux.* Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) L'image d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ par f est fermé.

(b) L'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par f est ouverte.

(c) L'image réciproque d'une boule ouverte de $\mathbb{R}^m$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.

(d) L'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^m$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

(e) L'image d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^m$.

(f) Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f : B \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue sur B. Alors $f(B)$ est bornée.

Solution.

(a) Faux. Considérer l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x$ et $F \subseteq \mathbb{R}^2$ le fermé donné par $\{(x, 1/x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Pour montrer que l'ensemble F est fermé, il suffit de remarquer que $F = g^{-1}(\{1\})$, où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction continue donnée par $g(x, y) = xy$. Par ailleurs, $f(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, qui n'est pas fermé.

(b) Vrai. Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(c) Faux. Considérer l'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ et la boule ouverte $B =]\,0, 1\,[$. Alors, $f^{-1}(B) =]-1, 0\,[\cup]\,0, 1\,[$ n'est pas une boule ouverte.

(d) Faux. Considérer l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x$ et le compact $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Alors $f^{-1}([0, 1]) = [0, 1] \times \mathbb{R}$, qui n'est pas compact.

(e) Vrai. Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(f) Vrai si f est définie sur $\mathbb{R}^n$. En effet, comme $\bar{B}$ est fermé et borné, il est compact, ce qui nous que $f(\bar{B})$ est compact, d'après un résultat démontré dans les notes du cours. Alors $f(B) \subseteq f(\bar{B})$ est bornée. Si f n'est définie que sur B, alors le résultat n'est par forcement vrai. En effet, on considère $B =]-\pi/2, \pi/2\,[$ et l'application $f : B \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \mathtt{tan}(x)$, pour tout $x \in B$. C'est clair que $f(B) = \mathbb{R}$ n'est pas borné.