MAT303

Premier semestre — 2020–2021

Fiche 4: Continuité et topologie

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application, et soient $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ et $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ des parties. Dans les cas suivants, déterminer s'il faut remplir les points de suspension avec $\subseteq$, $\supseteq$ ou $=$ pour que l'énonce respectif devienne vrai :

(*a*) $f(S \cup T) \dots f(S) \cup f(T)$,
(*b*) $f^{-1}(X \cup Y) \dots f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$,
(*c*) $f(S \cap T) \dots f(S) \cap f(T)$,
(*d*) $f^{-1}(X \cap Y) \dots f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$,
(*e*) $f(\mathbb{R}^n \setminus S) \dots \mathbb{R}^m \setminus f(S)$,
(*f*) $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus X) \dots \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(X)$.

2. On considère les fonctions

(*a*) $f : [0,1] \to [0,1]$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1-x, & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

(*b*) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = \begin{cases} 1/b, & \text{si } x = a/b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z} \text{ premiers entre eux et } b > 0, \\ 0, & \text{si } x \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Calculer l'ensemble formé des points de continuité de f et de g.

3. On considère les ensembles suivants :

(*a*) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$,
(*b*) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < xy + z < 2\}$,
(*c*) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.

Pour chaque ensemble, déterminer s'il s'agit d'une partie ouverte ou fermée de l'espace $\mathbb{R}^n$ respectif.

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue telle que $f(x) = f(y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Montrer que f est une fonction constante. En déduire que, étant données $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{Q}^n$, alors $f = g$.

5. (*a*) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On rappelle que le **graphe** de f est l'ensemble

$$\mathrm{Gr}(f) = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in \mathbb{R}^n \Big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}.$$

Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé. La réciproque est-elle vraie ?

(b) Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et soit $f : K \to \mathbb{R}^m$ une fonction telle que l'image $\mathrm{Im}(f)$ soit bornée et $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé, alors f est continue.

6. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, notée $\| \ \|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On note $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, un vecteur, qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\|f(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \sup \|f(e_i)\|.$$

(b) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C\|x\|_1$.

(c) En déduire qu'il existe $C' > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C'\|x\|$.

(d) En déduire que f est continue pour la norme $\| \ \|$ choisie au départ. La continuité de f dépend-elle de la norme choisie ?

7. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ suivantes.
(a) $f(x,y) = xy/(|x|+|y|)$, (b) $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$,
(c) $f(x,y) = x^2y^2/(x^2+y^2)$, (d) $f(x,y) = (1+x^2+y^2)\sin(y)/y$,
(e) $f(x,y) = x^2/(|y|+x^2)$, (f) $f(x,y) = (\sin(x)+\sin(y))/(|x|+|y|)$.
Déterminer si f est prolongeable par continuité en $(0,0)$.

8. Soit $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction, N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et N' une norme sur $\mathbb{R}^m$. Si $k \in \mathbb{R}_{>0}$, on rappelle que f est dite **k-lipschitzienne** (pour N et N') si

$$N'\big(f(x)-f(y)\big) \leq kN(x-y),$$

pour tout $x, y \in S$. On dit que f est **lipschitzienne** (pour N et N') s'il existe $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Par ailleurs, on rappelle que f est **uniformément continue** (pour N et N') si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in S$, $N(x-y) \leq \delta$ implique que $N'(f(x)-f(y)) \leq \epsilon$. C'est clair que toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$, et N_1' et N_2' deux normes sur $\mathbb{R}^m$.

(a) Montrer que si f est k-lipschitzienne pour N_1 et N_1', il existe k', tel que f est k'-lipschitzienne pour N_2 et N_2'.

(b) Montrer que si f est uniformément continue pour N_1 et N_1', elle l'est aussi pour N_2 et N_2'.

(c) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Montrer que f est uniformément continue mais elle n'est pas lipschitzienne.

9. Soit $k > 0$ et $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur $[0,2]$.

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, où $T > 0$, et continue. Montrer que f est uniformément continue.

11. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et N' une norme sur $\mathbb{R}^m$. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble et $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions uniformément continues pour N et N'.

(a) Montrer que la fonction $f+g : S \to \mathbb{R}^m$ donnée par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, pour tout $x \in S$, est uniformément continue pour N et N'.

(b) La fonction produit $f.g : S \to \mathbb{R}^m$ est donnée par $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, pour tout $x \in S$. La fonction produit $f.g$ est-elle uniformément continue pour N et N' ?

(c) Soit $h : f(S) \to \mathbb{R}^p$ une fonction uniformément continue pour N' et N'', où N'' est une norme sur $\mathbb{R}^p$. Montrer que $h \circ f$ est uniformément continue pour N et N''.

12. On considère les fonctions suivantes :

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = 1/(1+x^2)$,

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, où $g(x) = (\cos(x), \sin(x))$.

Démontrer que f et g sont uniformément continues.

13. Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : F \to F$ une fonction continue. On appelle **point fixe** de f un point $x_0 \in F$ tel que $f(x_0) = x_0$.

(a) Soit $F = [0,1]$, montrer que f a un point fixe.

(b) Si $F = [0,1[$, f a-t-elle forcément un point fixe ?
Indication : on pourra considérer $f(x) = (x^2+1)/2$.

(c) Que dire si $F = [0,1] \cup [2,3]$?
Indication : on pourra considérer $f(x) = 3 - x$.

(d) On se place dans $F = \mathbb{R}^2$, trouver un exemple de fonction sans point fixe. Idem pour F un compact de $\mathbb{R}^2$ qui est “en un seul morceau”.
Indication : considérer $f(x,y) = (x+1, y+1)$ pour la première question, et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ avec la fonction $f(x,y) = (-x,-y)$ pour la deuxième question.

(e) Montrer que si F est une partie fermée et f est k-lipschitzienne avec $k < 1$, alors f a un point fixe.

(f) Montrer que le résultat précédent n’est pas vrai si F n’est pas fermé.
Indication : on pourra considérer $F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f(x) = x/2$.

(g) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}.$$

Montrer que f est 1-lipschitzienne mais f n’a pas de points fixes.

(h) Montrer que si F est compact et f est **contractante**, *i.e.*

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|,$$

pour tout $x, y \in F$ différents (où $\| \ \|$ est une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$), alors f a un seul point fixe.

14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est **coercive**, *i.e.*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(a) Montrer qu’un ensemble de niveau $N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Est-ce forcément une ligne de niveau ?

(b) Montrer qu’un ensemble de sous-niveau $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

(c) En déduire que f est minorée et atteint son minimum.

15. *Vrai/Faux.* Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) L'image d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ par f est fermé.
(b) L'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par f est ouverte.
(c) L'image réciproque d'une boule ouverte de $\mathbb{R}^m$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.
(d) L'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^m$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
(e) L'image d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^m$.
(f) Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f : B \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue sur B. Alors $f(B)$ est bornée.