MAT303

Premier semestre — 2020–2021

Fiche 3: Topologie de $\mathbb{R}^n$

1. *Convergence de suites.*

(a) On considère les suites suivantes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}^2$:
(i) $u_n = (1/n, 1)$, (ii) $u_n = (e^{-n}, e^{-n})$, (iii) $u_n = (1/n^2, 1/n)$, (iv) $u_n = (e^n, e^{-n})$,
(v) $u_n = (2n, -5n)$, (vi) $u_n = (n\cos(n\pi/4), n\sin(n\pi/4))$,
(vii) $u_n = (1 + (-1)^n/n, \sin(n\pi/2))$.
Lesquelles sont convergentes ?

(b) Soit $U_0 \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$U_{n+1}^t = A \cdot U_n^t, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, soit $\ell \in \mathbb{R}^2$ sa limite. Donner une majoration simple de $N(U_n - \ell)$ en fonction de n, en prenant pour N successivement les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$.

Solution.

(a) On étudiera la convergence des suites pour la norme infini. On a vu dans la cours qu'une suite converge si et seulement si la suite donnée par chaque coordonnée est convergente. En plus la limite de la suite est le vecteur dont les coordonnées sont les limites des suites respectives.

(i) C'est clair que $u_n = (1/n, 1)$ converge vers $(0, 1)$, quand n tend vers $+\infty$, puisque $1/n$ (resp., 1) converge vers 0 (resp., 1) quand n tend vers $+\infty$.

(ii) C'est clair que $u_n = (e^{-n}, e^{-n})$ converge vers $(0, 0)$ quand n tend vers $+\infty$, puisque e^{-n}converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(iii) C'est clair que $u_n = (1/n^2, 1/n)$ converge vers $(0, 0)$ quand n tend vers $+\infty$, puisque $1/n^2$ (resp., $1/0$) converge vers 0 (resp., 0) quand n tend vers $+\infty$.

(iv) Comme e^n diverge quand n tend vers $+\infty$, $u_n = (e^n, e^{-n})$ ne converge pas quand n tend vers $+\infty$.

(v) Comme $2n$ diverge quand n tend vers $+\infty$, $u_n = (2n, -5n)$ ne converge pas quand n tend vers $+\infty$.

(vi) Comme $(8n)\cos((8n)\pi/4) = 8n$ est une sous-suite divergente de la suite $n\cos(n\pi/4)$, on voit que $u_n = (n\cos(n\pi/4), n\sin(n\pi/4))$ ne converge pas quand n tend vers $+\infty$.

(vii) Comme $\sin(n\pi/2) = 0$ pour tout $n \in 2\mathbb{N}$ et $|\sin(n\pi/2)| = 1$ pour tout $n \in 2\mathbb{N} + 1$, $\sin(n\pi/2)$ est une suite oscillante quand n tend vers $+\infty$, on voit que $u_n = (1 + (-1)^n/n, \sin(n\pi/2))$ ne converge pas quand n tend vers $+\infty$.

(b) C'est clair que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1/2^n & 0 \\ 0 & 1/4^n \end{pmatrix},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ce qui dit que

$$U_n^t = \begin{pmatrix} a/2^n \\ b/4^n \end{pmatrix},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $U_0 = (a, b)$. On voit bien que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ converge pour la norme infini vers $\ell = (0, 0)$. Comme la norme infini est équivalente à la norme 1 et à la norme 2, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ converge pour ces normes aussi. On voit bien que

$$\|U_n\|_\infty \leq \|U_n\|_2 \leq \|U_n\|_1 = \frac{|a|}{2^n} + \frac{|b|}{4^n} \leq \frac{|a|}{2^n} + \frac{|b|}{2^n} = \frac{\|U_0\|_1}{2^n},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. *Exemple de changement de norme.* On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\| \ \|_2$. Soit U un ensemble ouvert pour cette norme. Justifier qu'il est également ouvert pour la norme $\| \ \|_1$. Faire un dessin. Même question avec un fermé, puis un compact.

Solution. Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

3. *Exemples d'ouverts et de fermés.* On considère les ensembles suivants :

(a) $\{v\}$, où v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$,

(b) $\{v_1, \dots, v_k\}$, où les v_j sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$,

(c) $B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : N(x, y) < 1\}$, où N est une norme sur $\mathbb{R}^2$,

(d) $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : N(x, y) \leq 1\}$, où N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Déterminer lesquels sont ouverts, fermés et/ou compacts.

Solution.

(a) On a montré dans les notes du cours que $\{v\}$ est fermé. Il est aussi trivialement borné, ce qui nous dit qu'il est compact. Par ailleurs, v n'est pas ouvert. En effet, soit $h \in \mathbb{E}$ non nul. Alors, pour tout $r > 0$, $v + rh/(2N(h)) \in B_N(v, r)$ mais $v + rh/(2N(h)) \notin \{v\}$.

(b) Comme l'union finie de fermés est fermée, $\{v_1, \dots, v_k\}$ est fermé. En outre, il est clairement borné, vu que $R = \max(N(v_1), \dots, N(v_k))$ satisfait que $N(v_i) \leq R$, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. En conséquence, $\{v_1, \dots, v_k\}$ est compact. Finalement, on voit que $\{v_1, \dots, v_k\}$ n'est pas ouvert. En effet, soit $r = \min(N(v_1 - v_2), \dots, N(v_1 - v_k))$ et soit $h \in \mathbb{E}$ non nul. Alors, pour tout $r > 0$, $v_1 + rh/(2N(h)) \in B_N(v_1, r)$ mais $v_1 + rh/(2N(h)) \notin \{v_1, \dots, v_k\}$.

(c) On a montré dans le cours que $B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est ouvert. Il est borné par définition. Par contre, $B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ n'est pas fermé, ce qui nous dit qu'il n'est pas compact. En effet, soit $h \in \mathbb{E}$ non nul. Alors la suite $((1 - 2^{-n})h/N(h))_{n\in\mathbb{N}} \in B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)^{\mathbb{N}}$ converge vers $h/N(h) \notin B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$.

(d) On a montré dans le cours que $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est fermé. Il est borné par définition. En conséquence, $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est compact. Par contre, $B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ n'est pas ouvert. Il suffit de démonter que le complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ n'est pas fermé. En effet, soit $h \in \mathbb{E}$ non nul. Alors la suite $((1 + 2^{-n})h/N(h))_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1))^{\mathbb{N}}$ converge vers $h/N(h) \in \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$.

4. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie, où $\mathbb{R}^n$ est munie d'une norme N. On dit que S est **uniformément isolé** s'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$B_N(v,r) \cap S = \{v\},$$

pour tout $v \in S$.

(a) Montrer que si S est uniformément isolé, alors S est fermé.

(b) Montrer que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ est uniformément isolé et donc fermé.

(c) On dit que $v \in S$ est un **point isolé** de S s'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$B_N(v,r) \cap S = \{v\}.$$

On dit que $r > 0$ ci-dessus est une **distance d'isolement** de v. Montrer que si S est uniformément isolé, alors tout point $v \in S$ est isolé. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

(d) Montrer que toute partie d'un ensemble uniformément isolé est uniformément isolée. En déduire que $\mathbb{N}$ est uniformément isolé et donc fermé.

Solution.

(a) Soit $(v_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite $v \in \mathbb{R}^n$. On va montrer que $v \in S$. Comme $(v_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy et *a fortiori*, pour $\epsilon = r > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(v_n - v_m) < r$ si $n, m \geq n_0$. Comme $v_m \in B_N(v_n, r) \cap S = \{v_n\}$, alors $v_m = v_n$ pour tout $n, m \geq n_0$, ce qui implique que $v_n = v_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. En conséquence, la limite v de $(v_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ est $v_{n_0} \in S$ et S est fermé, comme on voulait démontrer.

(b) On voit bien que

$$\mathbb{Z} \cap B(n,1) = \{n\}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En conséquence, $\mathbb{Z}$ est uniformément isolé et donc fermé.

(c) La première partie de l'item est immédiate, vu que S est uniformément isolé si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que tout $v \in S$ est un point isolé avec distance d'isolement r. Pour montrer que la réciproque n'est pas vérifiée, on considère $S = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R}$. Comme

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

et $0 \notin S$, S n'est pas fermé et en conséquence il n'est pas uniformément isolé. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit bien que

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)}\right) \cap S = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

En effet, $1/n \in B(1/n, 1/(n(n+1))) \cap S$. En outre, soit $m \in \mathbb{N}^*$ avec $m \neq n$. Si $m > n$, alors $m \geq n+1$, ce qui implique que

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

tandis que si $m < n$, alors $m \leq n-1$, ce qui nous dit que

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n(n+1)}.$$

Dans le deux cas on voit que, si $m \in \mathbb{N}^*$ avec $m \neq n$, alors

$$\frac{1}{m} \notin B\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)}\Big),$$

ce qui implique que

$$B\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)}\Big) \cap S = \Big\{\frac{1}{n}\Big\}.$$

En conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1/n \in S$ est isolé (avec distance d'isolement $1/(n(n+1)) > 0$), mais S n'est pas uniformément isolé.

(d) Soit $T \subseteq S$, où S est uniformément isolé. Il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$B_N(v,r) \cap S = \{v\},$$

pour tout $v \in S$, ce qui implique *a fortiori* que

$$B_N(v,r) \cap S = \{v\},$$

pour tout $v \in T$. En conséquence,

$$B_N(v,r) \cap T = \big(B_N(v,r) \cap S\big) \cap T = \{v\} \cap T = \{v\},$$

pour tout $v \in T$, ce qui nous dit que T est uniformément isolé. Comme $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est uniformément isolé, $\mathbb{N}$ est uniformément isolé, donc fermé.

5. (a) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie telle que $S \cap \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Montrer que S est fermé.

(b) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n) = +\infty.$$

Montrer que $S = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé.

Solution.

(a) Soit $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite $v \in \mathbb{R}^n$. Comme $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée. Soit $R \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que $N(v_n) \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_n \in \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, R) \cap S$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, R) \cap S$ est fermé, la limite v de $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, R) \cap S$ et *a fortiori* $v \in S$, ce qui nous dit que S est fermé.

(b) On affirme que $S = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ satisfait la condition de l'item précédent, *i.e.* $S \cap \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$. En effet, la condition sur la suite veut dire que, étant donné $r > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(u_n) > r$ pour tout $n \geq n_0$. En conséquence,

$$S \cap \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) \subseteq \big\{u_n : n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\big\},$$

ce qui implique que $S \cap \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$ est un ensemble fini, et donc fermé (voir Exercice **3**, (b)). D'après l'item précédent, S est fermé.

6. On considère les ensembles suivants dans l'espace $\mathbb{R}^n$ respectif, muni de la norme euclidienne :
(a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$, (b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<x^2\}$, (c) $\{1/2^n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$,
(d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2<y\leq x^2\}$, (e) $\{2^n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$, (f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1\}$,
(g) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0\}$, (h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$, (i) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : xy>z\}$,
(j) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2>4\}$, (k) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.
Déterminer lesquels sont ouverts, fermés et/ou compacts.

Solution.

(a) C'est clair que $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$ est fermé. En effet, soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite (x,y). Cela implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y . Par définition, $y_n\geq x_n^2$ et si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$ on trouve $y\geq x^2$, *i.e.* $(x,y)\in S$. C'est clair que S n'est pas borné, puisque $(n,0)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$ et $N(n,0)=n$ diverge quand n tend vers $+\infty$. En conséquence, S n'est pas compact. Par ailleurs, S n'est pas ouvert, puisque $(0,0)\in S$ est la limite de la suite convergente $(-1/2^n,0)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^2\setminus S)^{\mathbb{N}}$.

(b) C'est clair que $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<x^2\}$ est ouvert. En effet, $\mathbb{R}^2\setminus S$ est l'union de $T_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leq 0\}$ et de $T_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$. On a déjà montré que T_2 est fermé dans l'item précédent. L'ensemble $T_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leq 0\}$ est clairement fermé : si $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in T_1^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente avec limite (x,y), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et $y_n\geq 0$, ce qui dit que $y\geq 0$, si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, *i.e.* $(x,y)\in T_1$. Par contre, S n'est pas fermé, puisque $(0,0)\notin S$ est la limite de la suite convergente $(1/2^n,1/8^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$. En conséquence, S n'est pas compact.

(c) C'est clair que $S=\{1/2^n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$ n'est pas fermé puisque $0\notin S$ est la limite de la suite $(1/2^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$. En conséquence, S n'est pas compact. Par ailleurs, S n'est pas ouvert, puisque $1\in S$ est la limite de la suite convergente $(1+1/2^n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}\setminus S)^{\mathbb{N}}$.

(d) C'est clair que $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2<y\leq x^2\}$ n'est pas fermé, puisque $(0,-2)\notin S$ est la limite de la suite $(0,-2+2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$. En conséquence, S n'est pas compact. En outre, S n'est pas ouvert, puisque $(0,0)\in S$ est la limite de la suite $(0,1/2^n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}\setminus S)^{\mathbb{N}}$.

(e) On dit que $S=\{2^n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$ est fermé. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite x. En particulier, la suite est de Cauchy. En conséquence, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, si $n\geq n_0$, $|x_n-x_{n_0}|<1/2$. Comme $|2^n-2^m|\geq 1$, pour tous $n\neq m$ entier non négatifs, on a que $x_n=x_{n_0}$ pour tout $n\geq n_0$. Cela implique que la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$ est $x_{n_0}\in S$. C'est clair que S n'est pas borné, puisque $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$ diverge quand n tend vers $+\infty$. En conséquence, S n'est pas compact. Par ailleurs, S n'est pas ouvert, puisque $1\in S$ est la limite de la suite convergente $(1-2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}\setminus S)^{\mathbb{N}}$.

(f) C'est clair que $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1\}$ est ouvert. En effet, il suffit de montrer que $T=\mathbb{R}^2\setminus S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 1\}$ est fermé. Si $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in T^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente avec limite (x,y), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et $x_n\leq 1$, ce qui dit que $x\geq 1$, si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, *i.e.* $(x,y)\in T$. Par contre, S n'est pas fermé, puisque $(1,0)\notin S$ est la limite de la suite convergente $(1+2^{-n},0)_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$. En conséquence, S n'est pas compact.

(g) C'est clair que $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0\}$ est ouvert. En effet, il suffit de montrer que $T=\mathbb{R}^2\setminus S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\leq 0\}$ est fermé. Si $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in T^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente avec limite (x,y), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et $x_ny_0\leq 0$, ce qui dit que $xy\leq 0$, si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, *i.e.* $(x,y)\in T$. Par contre, S n'est pas fermé, puisque $(0,0)\notin S$ est la limite de la suite convergente $(2^{-n},2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}$. En conséquence, S n'est pas compact.

(h) C'est clair que $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est fermé. En effet, si $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente avec limite (x,y), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et $x_n = y_0$, ce qui dit que $x = y$, si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, *i.e.* $(x,y) \in S$. C'est clair que S n'est pas borné, puisque $(n,n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ et $N(n,n) = \sqrt{2}n$ diverge quand n tend vers $+\infty$. En conséquence, S n'est pas compact. Par contre, S n'est pas ouvert, puisque $(0,0) \in S$ est la limite de la suite convergente $(-2^{-n}, 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2 \setminus S)^{\mathbb{N}}$.

(i) C'est clair que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy > z\}$ est ouvert. En effet, il suffit de montrer que $T = \mathbb{R}^4 \setminus S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq z\}$ est fermé. Si $(x_n, y_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente avec limite (x,y,z), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z et $x_n y_0 \leq z_n$, ce qui dit que $xy \leq z$, si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, *i.e.* $(x,y,z) \in T$. Par contre, S n'est pas fermé, puisque $(0,0,0) \notin S$ est la limite de la suite convergente $(2^{-n}, 2^{-n}, 8^{-n})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. En conséquence, S n'est pas compact.

(j) C'est clair que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 > 4\}$ est ouvert. En effet, il suffit de montrer que $T = \mathbb{R}^4 \setminus S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ est fermé. Si $(x_n, y_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente avec limite (x,y,z), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z et $x_n^2 + y_0^2 + z_n^2 \leq 4$, ce qui dit que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, *i.e.* $(x,y,z) \in T$. Par contre, S n'est pas fermé, puisque $(2,0,0) \notin S$ est la limite de la suite convergente $(2+2^{-n}, 0, 0)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. En conséquence, S n'est pas compact.

(k) On voit bien que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas compact, puisque $(n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ diverge quand n tend vers $+\infty$. En conséquence, $\mathbb{Q}$ n'est pas compact. En outre, S n'est pas fermé, puisque $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est la limite d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Finalement, S n'est pas ouvert, puisque $0 \in \mathbb{Q}$ est la limite de la suite convergente $(\sqrt{2} - q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$.

7. Soient S et T deux parties de $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme N. On rappelle que **l'intérieur** S° de S est défini par

$$S^\circ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{ il existe } \epsilon > 0 \text{ tel que } B_N(x,\epsilon) \subseteq S\right\}.$$

En outre, **l'adhérence** $\bar{S}$ de S est définie par

$$\bar{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{ pour tout } \epsilon > 0, B_N(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset\right\}.$$

Démontrer les énoncés suivants.

(a) Si $S \subseteq T$, alors $S^\circ \subseteq T^\circ$.
(b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$.
(c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. L'égalité est-elle vraie ?
(d) $\overline{(S \cup T)} = \bar{S} \cup \bar{T}$.
(e) $\overline{(S \cap T)} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T}$. L'égalité est-elle vraie ?
(f) $(\mathbb{R}^n \setminus S)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \bar{S}$.

Solution.

(a) Comme $S^\circ \subset S \subset T$ et S° est ouvert, $S^\circ \subseteq T^\circ$.

(*b*) Comme $S^\circ \subseteq S$ et $T^\circ \subset T$, $S^\circ \cap T^\circ \subseteq S \cap T$. En outre, comme l'intersection d'ouverts est un ensemble ouvert, $S^\circ \cap T^\circ \subseteq (S \cap T)^\circ$. Par ailleurs, comme $S \cap T \subseteq S$, l'item précédent dit que $(S \cap T)^\circ \subseteq S^\circ$. Le même argument pour T nous dit que $(S \cap T)^\circ \subseteq T^\circ$ en conséquence $(S \cap T)^\circ \subseteq S^\circ \cap T^\circ$. Cela implique que $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$.

(*c*) Comme $S \subseteq S \cup T$, le premier item nous dit que $S^\circ \subseteq (S \cup T)^\circ$. Le même argument pour T nous dit que $T^\circ \subseteq (S \cup T)^\circ$. En conséquence $S^\circ \cup T^\circ \subseteq (S \cup T)^\circ$. L'égalité n'est pas vraie en général. Par exemple, si $S = \mathbb{Q}$ et $T = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $S^\circ = T^\circ = \emptyset$, mais $S \cup T = \mathbb{R} = \mathbb{R}^\circ$.

(*d*) Il s'agit d'une conséquence des deuxième et dernier items.

(*e*) Il s'agit d'une conséquence des troisième et dernier items.

(*f*) On voit bien que $U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$ si et seulement si $\mathbb{R}^n \setminus U \supseteq S$. En fait l'application ϕ donnée par $T \mapsto \mathbb{R}^n \setminus T$ est une bijection entre les parties de $\mathbb{R}^n \setminus S$ et les parties de $\mathbb{R}^n$ incluant S. En plus, une partie T de $\mathbb{R}^n \setminus S$ est ouverte si et seulement si $\phi(T) = \mathbb{R}^n \setminus T$ est fermé, et $\phi(\cup_{i\in I} T_i) = \cap_{i\in I} \phi(T_i)$, pour toute famille $\{T_i\}_{i\in I}$ de parties de $\mathbb{R}^n \setminus S$. Cela implique que

$$\mathbb{R}^n \setminus \Big((\mathbb{R}^n \setminus S)^\circ\Big) = \phi\big((\mathbb{R}^n \setminus S)^\circ\big) = \phi\Big(\bigcup_{i\in I} T_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \phi(T_i) = \bar{S},$$

où $\{T_i\}_{i\in I}$ est la famille de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n \setminus S$. Si l'on prend le complémentaire on trouve que $(\mathbb{R}^n \setminus S)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \bar{S}$.

8. On considère les ensembles suivants dans l'espace $\mathbb{R}^n$ respectif, muni de la norme euclidienne :
(a) $S = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, (b) $S = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, (c) $S = [-1,0\,[\, \cup \{1\} \subseteq \mathbb{R}$,
(d) $S = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R}$, (e) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$, (f) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Calculer S°, $\bar{S}$ et $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$.

Solution.

(a) C'est clair que $S^\circ = \,]\,0,1\,[$, $\bar{S} = [0,1]$ et $\partial S = \{0,1\}$.

(b) On voit bien que $S^\circ = \emptyset$, $\bar{S} = [0,1]$ et $\partial S = [0,1]$.

(c) C'est clair que $S^\circ = \,]-1,0\,[$, $\bar{S} = [-1,0] \cup \{1\}$ et $\partial S = \{-1,0,1\}$.

(d) On voit bien que $S^\circ = \emptyset$, $\bar{S} = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ et $\partial S = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.

(e) C'est clair que $S^\circ = \emptyset$, $\bar{S} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $\partial S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(f) On voit bien que $S^\circ = \emptyset$, $\bar{S} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ et $\partial S = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

9. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$, où $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme N.

(*a*) Démontrer que S est ouvert si et seulement si $S \cap \partial S = \emptyset$.

(*b*) Démontrer que S est fermé si et seulement si $\partial S \subseteq S$.

(*c*) Démontrer que

$$\partial S = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \text{ pour tout } \epsilon > 0, B_N(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset \text{ et } B_N(x,\epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset\big\}.$$

Solution.

(a) C'est clair que S est ouvert si et seulement si $S = S^\circ$. Ce la implique que $S \cap \partial S = S \cap (\bar{S} \setminus S^\circ) = S \cap (\bar{S} \setminus S) = \emptyset$. Réciproquement, on suppose que $S \cap \partial S = \emptyset$. Comme $S \subseteq \bar{S} = S^\circ \cup \partial S$, alors

$$S = S \cap \bar{S} = S \cap (S^\circ \cup \partial S) = (S \cap S^\circ) \cup S \cap \partial S) = S \cap S^\circ = S^\circ,$$

ce qui implique que S est ouvert.

(b) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(c) Il s'agit d'une conséquence immédiate de la description de $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$ donnée au début de l'exercice **7**.

10. *La question de l'espace ambiant* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}^2$. On considère F un fermé de $\mathbb{R}$. On le plonge canoniquement dans $\mathbb{R}^2$ en considérant $\tilde{F} = F \times \{0\}$. Montrer que $\tilde{F}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Que se passe-t-il si F est un ouvert de $\mathbb{R}$?

Solution. Soit $(x_n, 0)_{n \in NN} \in \tilde{F}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite (x, y). On a vu dans la cours qu'une suite converge si et seulement si la suite donnée par chaque coordonnée est convergente. En plus la limite de la suite est le vecteur dont les coordonnées sont les limites des suites respectives. Alors $y = 0$ et $x \in F$, puisque F est fermé. En conséquence, $(x, y) \in \tilde{F}$. Si F est ouvert non vide, $\tilde{F}$ n'est pas ouvert. En effet, si $x \in F$, $(x, 0) \in \tilde{F}$ est la limite de la suite $(x, 2^{-n})_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ d'éléments dans le complémentaire de $\tilde{F}$.

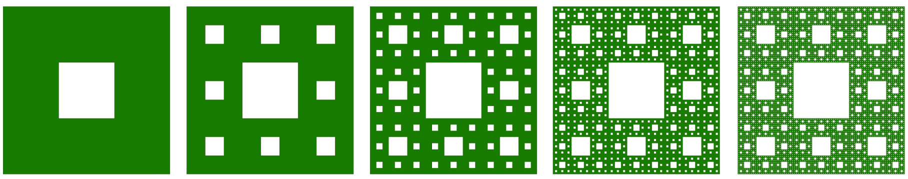
11. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Soit

$$S = \left\{(1/n, 1/m) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Calculer $\bar{S}$.

Solution. Soit $T = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$. On affirme que $\bar{S} = (T \cup \{0\}) \times (T \cup \{0\})$. En effet, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(0, 1/n)$ (resp., $(1/n, 0)$) est la limite de la suite convergente $(1/(m+1), 1/n)_{m \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ (resp., $(1/n, 1/(m+1))_{m \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$) et $(0, 0)$ est la limite de la suite convergente $(1/(m+1), 1/(m+1))_{m \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. Cela implique que $(T \cup \{0\}) \times (T \cup \{0\}) \subseteq \bar{S}$. Par ailleurs, on sait que $T \cup \{0\}$ est fermé, ce qui nous dit que $(T \cup \{0\}) \times (T \cup \{0\})$ est fermé, car le produit cartésien de fermés est fermé. En conséquence, $\bar{S} \subseteq (T \cup \{0\}) \times (T \cup \{0\})$, ce qui montre que $\bar{S} = (T \cup \{0\}) \times (T \cup \{0\})$.

12. *Le tapis de Sierpinsky.* On considère le carré fermé $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On lui retire le carré ouvert $]1/3, 2/3[^2$, puis pour chaque carrés restant, on lui retire le carré ouvert central et on continue à itérer l'opération à l'infini. On obtient un tapis de Sierpinsky T qui est un ensemble fractal. Cet ensemble est-il ouvert ? Fermé ? Compact ?



Solution. On va expliquer la construction du tapis de Sierpinsky en détail. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i, j \in [\![0, 3^{n-1} - 1]\!]$, soit

$$U_{n,i,j} = \left]\frac{1+3i}{3^n}, \frac{2+3i}{3^n}\right[\times \left]\frac{1+3j}{3^n}, \frac{2+3j}{3^n}\right[\subseteq \mathbb{R}^2.$$

C'est clair que $U_{n,i,j}$ est un ensemble ouvert pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i, j \in [\![0, 3^{n-1} - 1]\!]$. En effet, si $(x, y) \in U_{n,i,j}$, soient

$$r_x = \min\left(x - \frac{1+3i}{3^n}, \frac{2+3i}{3^n} - x\right) \text{ et } r_y = \min\left(y - \frac{1+3j}{3^n}, \frac{2+3j}{3^n} - y\right).$$

Par définition $r_x, r_y > 0$,

$$]x - r_x, x + r_x[\subseteq \left]\frac{1+3i}{3^n}, \frac{2+3i}{3^n}\right[\text{ et }]y - r_y, y + r_y[\subseteq \left]\frac{1+3j}{3^n}, \frac{2+3j}{3^n}\right[.$$

Soit $r = \min(r_x, r_y) > 0$. On trouve alors que

$$B_{\| \|_\infty}\big((x, y), r\big) =]x-r, x+r[\times]y-r, y+r[\subseteq]x-r_x, x+r_x[\times]y-r_y, y+r_y[\subseteq U_{n,i,j}.$$

En conséquence, $U_{n,i,j}$ est ouvert.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$U_n = \bigcup_{m=1}^{n} \bigcup_{i,j=0}^{3^{m-1}-1} U_{m,i,j} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Comme $U_{m,i,j}$ est ouvert pour tous $m \in [\![1, n]\!]$ et $i, j \in [\![0, 3^{m-1} - 1]\!]$, alors U_n est ouvert, car la réunion d'ensembles ouverts est ouvert. On définit alors

$$T_n = \big([0, 1] \times [0, 1]\big) \setminus U_n = \big([0, 1] \times [0, 1]\big) \cap \big(\mathbb{R}^2 \setminus U_n\big) \subseteq \mathbb{R}^2,$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $[0, 1] \times [0, 1]$ est fermé et le complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus U_n$ de U_n est fermé, alors T'_n est fermé, car c'est l'intersection de deux fermés. On voit bien que T_n est le n-ième ensemble dans l'itération considérée dans l'énoncé.

Par définition, le tapis de Sierpinsky T est donné par

$$T = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} T_n.$$

Par construction, cet ensemble est une intersection dénombrable d'ensembles fermés. En conséquence, le tapis de Sierpinsky T est fermé. En plus, il est borné, car il est inclus dans le carré fermé $[0, 1]^2$, qui es borné. En conséquence, le tapis de Sierpinsky T est compact.

13. *Une figure complexe.* On considère l'ensemble

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 2, |x - y| > 1 \text{ et } \big||y| - 3\big| \leq 1\Big\}.$$

Représenter cet ensemble et dire s'il est ouvert ou fermé.

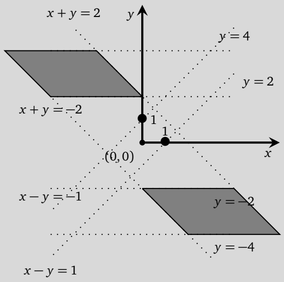
Solution. On affirme que

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 2 \text{ et } \big||y| - 3\big| \leq 1\Big\}. \tag{1}$$

En effet, $|x+y| \leq 2$ et $||y|-3| \leq 1$ sont équivalentes à $-2 \leq x+y \leq 2$ et $2 \leq |y| \leq 4$, *i.e.* $-2-y \leq x \leq 2-y$ et $2 \leq y \leq 4$, ou $-2-y \leq x \leq 2-y$ et $-4 \leq y \leq -2$. En particulier, $-2(1+y) \leq x-y \leq 2(1-y)$ et $2 \leq y \leq 4$, ou $-2(1+y) \leq x-y \leq 2(1-y)$ et $-4 \leq y \leq -2$. Dans le premier cas, $x-y \leq 2(1-y) \leq -2 < -1$ et dans le deuxième cas $x-y \geq -2(1+y) \geq 2 > 1$, ce qui implique que $|x-y| > 1$ dans les deux cas. Cela nous dit que les conditions $|x+y| \leq 2$ et $||y|-3| \leq 1$ impliquent que $|x-y| > 1$, comme on voulait démontrer.

L'égalité (1) dit que E est un ensemble fermé. En effet, si $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente avec limite (x,y), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, $|x_n+y_n| \leq 2$ et $||y_n|-3| \leq 1$, ce qui dit que $|x+y| \leq 2$ et $||y|-3| \leq 1$, si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, *i.e.* $(x,y) \in E$.

Graphiquement, on trouve la région suivante.



14. Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé. Soient $S, T \subseteq \mathbb{E}$ deux parties compactes. Démontrer que $S \cap T$ et $S \cup T$ sont compacts.

Solution. On va d'abord montrer que $S \cap T$ est compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (S\cap T)^{\mathbb{N}}$ une suite. On va montrer que cette suite possède une sous-suite convergente dont la limite appartient à $S \cap T$. Comme S est compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (S\cap T)^{\mathbb{N}} \subseteq S^{\mathbb{N}}$, il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec limite $x \in S$. Or, T est fermé, car il est compact. Comme x est la limite d'une suite convergente d'éléments de T, car $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in (S\cap T)^{\mathbb{N}} \subseteq T^{\mathbb{N}}$, on conclut que $x \in T$. En conséquence, $x \in S \cap T$, ce qui montre que $S \cap T$ est compact.

Montrons finalement que $S \cup T$ est compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (S\cup T)^{\mathbb{N}}$ une suite. Soient $I = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in S\}$ et $J = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in T\}$. On voit bien que $I \cup J = \mathbb{N}$. En effet, l'inclusion $I \cup J \subseteq \mathbb{N}$ est immédiate. Pour prouver $I \cup J \supseteq \mathbb{N}$, on note que, si $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \in S \cup T$, *i.e.* $x_n \in S$ ou $x_n \in T$, ce qui nous dit que $n \in I$ ou $n \in J$, *i.e.* $n \in I \cup J$. Comme $\mathbb{N} = I \cup J$ est infini, alors I est infini ou J est infini. On suppose sans perte de généralité que I est infini. Soit $\phi : \mathbb{N} \to I$ la seule application strictement croissante dont l'image est I et soit $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle détermine. Alors $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. Comme S est compact, il existe une sous-suite convergente $(x_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dont la limite x apparient à $S \subseteq S \cup T$. En conséquence, $S \cup T$ est compact, comme on voulait démontrer.

15. *Vrai/Faux.* Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ est une suite non bornée, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = +\infty$$

pour toute norme de $\mathbb{R}^2$.

(b) Si $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ est une suite telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|(x_n, y_n)\| = +\infty,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} |y_n| = +\infty.$$

(c) Si un ensemble n'est pas ouvert, alors il est fermé.
(d) Un ensemble peut être ouvert et fermé en même temps.
(e) Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
(f) L'intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.
(g) L'intersection quelconque de fermés est un fermé.
(h) Une union finie de compacts est un compact.
(i) Un ouvert de $\mathbb{R}$ contient forcément un intervalle fermé $[a, b]$ avec $b > a$.
(j) Si F et F' sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$, la somme

$$F + F' = \{v \in \mathbb{R}^2 : \text{ il existe } f \in F, f' \in F' \text{ tels que } v = f + f'\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Solution.

(a) Faux. On peut prendre $u_n = (n(1+(-1)^n), 0)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
(b) Faux. On peut prendre $u_n = (n(1+(-1)^n), n(1+(-1)^{n+1}))$, pour $n \in \mathbb{N}$.
(c) Faux. On peut prendre l'ensemble $[0, 1[$.
(d) Vrai. Par exemple, l'ensemble vide $\emptyset$.
(e) Vrai. C'est la définition d'ensemble fermé.
(f) Faux. On peut prendre l'intersection de la famille $]-2^{-n}, 2^{-n}[$, avec $n \in \mathbb{N}$.
(g) Vrai. C'est une propriété démontrée dans les notes du cours.
(h) Vrai. Comme un ensemble dans $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné, et l'union finie d'une famille d'ensembles fermés (resp., bornés) est fermée (resp., borné), on trouve le résultat.
(i) Faux. On peut prendre l'ensemble vide $\emptyset$.
(j) Faux. On peut prendre $F = \{2^n + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ et $F' = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. C'est facile à vérifier que F et F' sont des ensembles fermés. En outre, $2^{-n} \in F + F'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais $0 \notin F + F'$.

16. On considère $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. Soit

$$S = \{1/n + 1/m \in \mathbb{R} : n, m \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Calculer $\bar{S}$. L'ensemble $\bar{S}$ est-il compact ?

Solution. On remarque d'abord que, comme $S \subseteq [0,2]$ et $[0,2]$ est fermé, $\bar{S} \subseteq [0,2]$, C'est clair que $0 \in \bar{S}$, puisque 0 est la limite de la suite $(2/(n+1))_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$, où l'on a utilisé que $1/(m+1)+1/(m+1) = 2/(m+1)$. Noter que $1/n = 1/(2n)+1/(2n) \in S$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On affirme que $\bar{S} = S \cup \{0\}$. On va le démontrer par l'absurde. Soit $x \in \bar{S} \setminus (S \cup \{0\})$. Comme $\bar{S} \subseteq [0,2]$ et $x \neq 0$, $x > 0$. Soit $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Comme $A \subseteq S \cup \{0\}$ et $x \notin (S \cup \{0\})$, *a fortiori* $x \notin A$. Cela dit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $x > \epsilon$ et $[x-\epsilon, x+\epsilon] \cap A = \emptyset$. On affirme que $]\,x-\epsilon/2, x+\epsilon/2\,[\, \cap S$ est fini. En effet, soit $y = 1/n + 1/m \in S \cap\,]\,x-\epsilon/2, x+\epsilon/2\,[$. En particulier, $1/n + 1/m > x - \epsilon/2$. Sans perte de généralité on peut supposer que $n \geq m$, ce qui nous donne $2/m > x - \epsilon/2$ ou, de façon équivalente,

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2}\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) > 0.$$

Cela nous dit que, la quantité de $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = 1/n + 1/m \in S \cap\,]\,x-\epsilon/2, x+\epsilon/2\,[$, où $n \geq m$, est finie. Par ailleurs, la condition $[x-\epsilon, x+\epsilon] \cap A = \emptyset$ implique que $1/m < x - \epsilon$. La dernière inégalité avec $x - \epsilon/2 < 1/n + 1/m$ nous donnent que

$$x - \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n} + x - \epsilon,$$

i.e.

$$0 < \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{n}.$$

Cela nous dit que la quantité de $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = 1/n + 1/m \in S \cap\,]\,x-\epsilon/2, x+\epsilon/2\,[$, où $n \geq m$, est finie. Par conséquent, $S \cap\,]\,x-\epsilon/2, x+\epsilon/2\,[$ est fini. Comme $S \cap\,]\,x-\epsilon/2, x+\epsilon/2\,[$ est fini et $x \in \bar{S}$, alors $x \in S$, ce qui est absurde. En conséquence, $\bar{S} = S \cup \{0\}$.

Comme $S \subseteq [0,2]$ et $[0,2]$ est fermé, $\bar{S} \subseteq [0,2]$, ce qui dit que $\bar{S}$ est borné. En conséquence, $\bar{S}$ est compact.