MAT303
Premier semestre — 2020–2021
Fiche 3: Topologie de $\mathbb{R}^n$

1. *Convergence de suites.*

(a) On considère les suites suivantes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}^2$:
(i) $u_n = (1/n, 1)$, (ii) $u_n = (e^{-n}, e^{-n})$, (iii) $u_n = (1/n^2, 1/n)$, (iv) $u_n = (e^n, e^{-n})$,
(v) $u_n = (2n, -5n)$, (vi) $u_n = (n\cos(n\pi/4), n\sin(n\pi/4))$,
(vii) $u_n = (1+(-1)^n/n, \sin(n\pi/2))$.
Lesquelles sont convergentes ?

(b) Soit $U_0 \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$U_{n+1}^t = A \cdot U_n^t, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, soit $\ell \in \mathbb{R}^2$ sa limite. Donner une majoration simple de $N(U_n - \ell)$ en fonction de n, en prenant pour N successivement les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$.

2. *Exemple de changement de norme.* On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\| \ \|_2$. Soit U un ensemble ouvert pour cette norme. Justifier qu'il est également ouvert pour la norme $\| \ \|_1$. Faire un dessin. Même question avec un fermé, puis un compact.

3. *Exemples d'ouverts et de fermés.* On considère les ensembles suivants :

(a) $\{v\}$, où v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$,

(b) $\{v_1, \dots, v_k\}$, où les v_j sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$,

(c) $B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N(x,y) < 1\}$, où N est une norme sur $\mathbb{R}^2$,

(d) $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N(x,y) \leq 1\}$, où N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Déterminer lesquels sont ouverts, fermés et/ou compacts.

4. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie, où $\mathbb{R}^n$ est munie d'une norme N. On dit que S est **uniformément isolé** s'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$B_N(v,r) \cap S = \{v\},$$

pour tout $v \in S$.

(a) Montrer que si S est uniformément isolé, alors S est fermé.

(b) Montrer que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ est uniformément isolé et donc fermé.

(c) On dit que $v \in S$ est un **point isolé** de S s'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$B_N(v,r) \cap S = \{v\}.$$

On dit que $r > 0$ ci-dessus est une **distance d'isolement** de v. Montrer que si S est uniformément isolé, alors tout point $v \in S$ est isolé. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

(*d*) Montrer que toute partie d'un ensemble uniformément isolé est uniformément isolée. En déduire que $\mathbb{N}$ est uniformément isolé et donc fermé.

5. (*a*) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie telle que $S \cap \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Montrer que S est fermé.

(*b*) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n) = +\infty.$$

Montrer que $S = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé.

6. On considère les ensembles suivants dans l'espace $\mathbb{R}^n$ respectif, muni de la norme euclidienne :
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$, (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\}$, (c) $\{1/2^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$,
(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < y \leq x^2\}$, (e) $\{2^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, (f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$,
(g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, (h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, (i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy > z\}$,
(j) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$, (k) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
Déterminer lesquels sont ouverts, fermés et/ou compacts.

7. Soient S et T deux parties de $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme N. On rappelle que **l'intérieur** S° de S est défini par

$$S^\circ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{ il existe } \epsilon > 0 \text{ tel que } B_N(x,\epsilon) \subseteq S\right\}.$$

En outre, **l'adhérence** $\bar{S}$ de S est définie par

$$\bar{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{ pour tout } \epsilon > 0, B_N(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset\right\}.$$

Démontrer les énoncés suivants.

(*a*) Si $S \subseteq T$, alors $S^\circ \subseteq T^\circ$.
(*b*) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$.
(*c*) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. L'égalité est-elle vraie ?
(*d*) $\overline{(S \cup T)} = \bar{S} \cup \bar{T}$.
(*e*) $\overline{(S \cap T)} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T}$. L'égalité est-elle vraie ?
(*f*) $(\mathbb{R}^n \setminus S)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \bar{S}$.

8. On considère les ensembles suivants dans l'espace $\mathbb{R}^n$ respectif, muni de la norme euclidienne :
(a) $S = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, (b) $S = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, (c) $S = [-1,0[\, \cup \{1\} \subseteq \mathbb{R}$,
(d) $S = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R}$, (e) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$, (f) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Calculer S°, $\bar{S}$ et $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$.

9. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$, où $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme N.

(*a*) Démontrer que S est ouvert si et seulement si $S \cap \partial S = \emptyset$.
(*b*) Démontrer que S est fermé si et seulement si $\partial S \subseteq S$.
(*c*) Démontrer que

$$\partial S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{ pour tout } \epsilon > 0, B_N(x,\epsilon) \cap S \neq \emptyset \text{ et } B_N(x,\epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset\right\}.$$

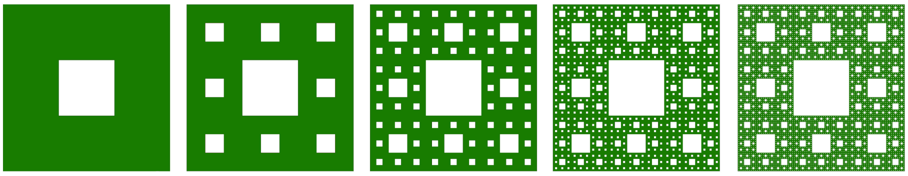
10. *La question de l'espace ambiant* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}^2$. On considère F un fermé de $\mathbb{R}$. On le plonge canoniquement dans $\mathbb{R}^2$ en considérant $\tilde{F} = F \times \{0\}$. Montrer que $\tilde{F}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Que se passe-t-il si F est un ouvert de $\mathbb{R}$?

11. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Soit

$$S = \left\{(1/n, 1/m) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Calculer $\bar{S}$.

12. *Le tapis de Sierpinsky.* On considère le carré fermé $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On lui retire le carré ouvert $]1/3, 2/3[^2$, puis pour chaque carrés restant, on lui retire le carré ouvert central et on continue à itérer l'opération à l'infini. On obtient un tapis de Sierpinsky qui est un ensemble fractal. Cet ensemble est-il ouvert ? Fermé ? Compact ?



13. *Une figure complexe.* On considère l'ensemble

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 2, |x - y| > 1 \text{ et } \big||y| - 3\big| \leq 1\Big\}.$$

Représenter cet ensemble et dire s'il est ouvert ou fermé.

14. Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé. Soient $S, T \subseteq \mathbb{E}$ deux parties compactes. Démontrer que $S \cap T$ et $S \cup T$ sont compacts.

15. *Vrai/Faux.* Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ est une suite non bornée, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = +\infty$$

pour toute norme de $\mathbb{R}^2$.

(b) Si $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ est une suite telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|(x_n, y_n)\| = +\infty,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} |y_n| = +\infty.$$

(c) Si un ensemble n'est pas ouvert, alors il est fermé.

(d) Un ensemble peut être ouvert et fermé en même temps.

(e) Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.

(f) L'intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.

(g) L'intersection quelconque de fermés est un fermé.

(h) Une union finie de compacts est un compact.

(i) Un ouvert de $\mathbb{R}$ contient forcément un intervalle fermé $[a, b]$ avec $b > a$.

(j) Si F et F' sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$, la somme

$$F + F' = \left\{v \in \mathbb{R}^2 : \text{ il existe } f \in F, f' \in F' \text{ tels que } v = f + f'\right\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

16. On considère $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. Soit

$$S = \left\{1/n + 1/m \in \mathbb{R} : n, m \in \mathbb{N}^*\right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Calculer $\bar{S}$. L'ensemble $\bar{S}$ est-il compact ?