MAT303
Premier semestre — 2020–2021
Fiche 2: Normes

Sauf indication contraire, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$ sera toujours muni de la norme donnée par la valeur absolue.

1. *Exemples et contre-exemples de normes.* On considère les applications $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous.
(a) $N(x,y) = |x|^2 + |y|$, (b) $N(x,y) = \max(|x|,|y|^3)$, (c) $N(x,y) = \sqrt{25x^2 + 4y^2}$,
(d) $N(x,y) = 5|x| + 2|y|$, (e) $N(x,y) = \max(x,y)$, (f) $N(x,y) = \min(|x|,|y|)$,
(g) $N(x,y) = |x+y| + 2|y|$, (h) $N(x,y) = \max(x^2,y^2)$, (i) $N(x,y) = |x|$.
Détermines lesquelles sont des normes.

Solution.

(a) C'est clair que $N(2\cdot(1,0)) = N(2,0) = 4 \neq 2 = |2|N(1,0)$, ce qui implique N n'est pas une norme.

(b) C'est clair que $N(2\cdot(0,1)) = N(0,2) = 8 \neq 2 = |2|N(0,1)$, ce qui implique N n'est pas une norme.

(c) Dans ce cas N s'écrit comme la composition de l'application linéaire bijective $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x,y) = (5x,2y)$ et la norme $\| \ \|_2$ (qui est une norme, d'après l'exercice **2**(e)). D'après l'exercice **4**, N est une norme.

(d) Dans ce cas N s'écrit comme la composition de l'application linéaire bijective $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x,y) = (5x,2y)$ et la norme $\| \ \|_1$. D'après l'exercice **4**, N est une norme.

(e) Comme $N(-1,-1) = -1 < 0$, N n'est pas une norme.

(f) Comme $N(0,1) = 0$ mais $(0,1) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, N n'est pas une norme.

(g) Dans ce cas N s'écrit comme la composition de l'application linéaire bijective $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x,y) = (x+y,2y)$ et la norme $\| \ \|_1$. D'après l'exercice **4**, N est une norme.

(h) C'est clair que $N(2\cdot(1,0)) = N(2,0) = 4 \neq 2 = |2|N(1,0)$, ce qui implique N n'est pas une norme.

(i) Comme $N(0,1) = 0$ mais $(0,1) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, N n'est pas une norme.

2. *Normes associées aux produits scalaires.* Soit $n > 0$ un entier positif. On rappelle qu'un **produit scalaire** sur $\mathbb{R}^n$ est une application $\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui satisfait

(PS1) $\langle x + \lambda x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \lambda\langle x',y\rangle$, pour tous $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

(PS2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$, pour tous $x,y \in \mathbb{R}^n$,

(PS3) $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et $\langle x,x\rangle = 0$ implique $x = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$.

(a) Montrer que $\langle y, x + \lambda x'\rangle = \langle y,x\rangle + \lambda\langle y,x'\rangle$, pour tous $x,x',y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et que $\langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, x\rangle = \langle x, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\rangle = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) On définit l'application $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le but des items suivants est de montrer que $\| \ \|$ est une norme sur

$\mathbb{R}^n$, que l'on appelle la **norme associée** au produit scalaire $\langle\,,\rangle$. Vérifier que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$.

(c) Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. À partir d'étudier la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par

$$g(t) = \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty\rangle,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, déduire **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**, *i.e.*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Que peut-on dire dans le cas où on a l'égalité ?

(d) Montrer que l'application $\| \;\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, est une norme.

(e) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère la quantité

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Montrer que l'application $\langle\,,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

pour tous les vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, est un produit scalaire. En déduire que l'application $\| \;\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie dans (1) est une norme sur $\mathbb{R}^n$, qui est appelée la **norme 2**.

Solution. Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

3. Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une norme.

(a) Montrer que

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leq N(x - y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que

$$N(x - y) \leq N(x) + N(y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(c) On suppose maintenant que N est une norme associée à un produit scalaire. Montrer que, étant donnés deux vecteurs non nuls $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$, $N(x - y) = N(x) + N(y)$ si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $y = -\lambda x$.

Solution.

(*a*) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité triangulaire nous dit que

$$N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y),$$

i.e.

$$N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$

Si l'on interchange x et y, on trouve

$$N(y) - N(x) \leq N(y - x) = N(x - y).$$

Comme $|N(x) - N(y)| = \max(N(x) - N(y), N(y) - N(x))$, on trouve que

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leq N(x - y).$$

(*b*) C'est clair que

$$N(x - y) = N\big(x + (-1)y\big) \leq N(x) + N\big((-1)y\big) = N(x) + |-1|N(y) = N(x) + N(y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(*c*) C'est clair que, si $y = -\lambda x$ avec $\lambda \neq 0$, alors

$$N(x-y) = N\big((1+\lambda)x\big) = (1+\lambda)N(x) = N(x)+\lambda N(x) = N(x)+N(\lambda\cdot x) = N(x)+N(y).$$

Réciproquement, la condition $N(x - y) = N(x) + N(y)$ équivaut à

$$\begin{aligned}\big(N(x) + N(y)\big)^2 &= N(x - y)^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle \\ &= N(x)^2 + N(y)^2 - 2\langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $N(x)N(y) = -\langle x, y\rangle$, ce qui implique que $N(x)N(y) = |\langle x, y\rangle|$. L'étude de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas de l'égalité nous dit que x et y sont colinéaires, ce qui équivaut à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = -\lambda x$, vu que x et y sont non nuls. si l'on revient sur l'identité $N(x)N(y) = -\langle x, y\rangle$ et on utilise $y = -\lambda x$ alors $|\lambda|N(x)^2 = \lambda N(x)^2$, ce qui implique que $\lambda > 0$ puisque $x \neq 0$.

4. *Normes et applications linéaires.* Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une norme. On suppose donnée une application linéaire inversible $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(*a*) Montrer que l'application $N_\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par $N_\varphi(v) = N(\varphi(v))$, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(*b*) Décrire la boule unité de N_φ.

(*c*) Comme une application du premier item, montrer sans calcul que

$$N_\varphi(x, y) = \max\big(|x + y|, |x - y|\big)$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter sa boule unité.

(*d*) Que pensez-vous de la boule unité de la question précédente ? Montrer que $\max(|x + y|, |x - y|) = |x| + |y|$.

Solution.

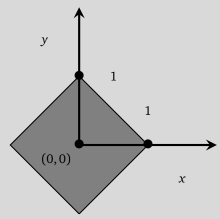
(*a*) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(*b*) C'est clair que

$$B_{N_\varphi}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)=\{x\in\mathbb{R}^n : \varphi(x)\in B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)\}.$$

(*c*) Dans ce cas N_φ s'écrit comme la composition de l'application linéaire bijective $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ donnée par $T(x,y)=(x+y,x-y)$ et la norme $\|\ \|_1$. Le premier item, N est une norme.

Par ailleurs, on voit bien que $\max(|x+y|,|x-y|)\le 1$ équivaut à dire $|x+y|\le 1$ et $|x-y|\le 1$, *i.e.* $-1\le x+y\le 1$ et $-1\le x-y\le 1$. Graphiquement, $\bar{B}_{N_\varphi}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ est donné par



En particulier les boules unités $\bar{B}_{N_\varphi}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ et $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ coïncident.

(*d*) On remarque que si les boules unités fermés $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ et $\bar{B}_{N'}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ coïncident pour deux normes N et N' sur $\mathbb{R}^n$, alors $N=N'$. Il suffit de démontrer que $N(y)=N'(y)$, pour tout $y\in\mathbb{R}^n$ non nul. En effet, $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)=\bar{B}_{N'}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ implique $\partial\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)=\partial\bar{B}_{N'}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$, *i.e.* $N(x)=1$ si et seulement si $N'(x)=1$, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. Pour tout $y\in\mathbb{R}^n$ non nul, on considère $x=y/N(y)$. Comme $y\in\mathbb{R}^n$ est non nul, $N(y)\neq 0$ et x est bien défini. Comme $N(x)=N(y)/N(y)=1$, alors $1=N'(x)=N'(y)/N(y)$, *i.e.* $N(y)=N'(y)$.

Comme les boules unités $B_{N_\varphi}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ et $B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ coïncident, cela nous dit que $\max(|x+y|,|x-y|)=|x|+|y|$.

5. *Normes des applications linéaires.* Soient n et m deux nombres entiers positifs. On considère l'espace

$$L=L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)=\big\{T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m : T \text{ est une application linéaire}\big\}.$$

On utilisera l'identification $\phi : L\to M_{m\times n}(\mathbb{R})$, où $\phi(T)=(a_{i,j})_{i\in[\![1,m]\!],j\in[\![1,n]\!]}$ est donnée par

$$T(e_j^{\mathbb{R}^n})=\sum_{i=1}^m a_{i,j}e_i^{\mathbb{R}^m},$$

où $\{e_j^{\mathbb{R}^n} : j\in[\![1,n]\!]\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_i^{\mathbb{R}^m} : i\in[\![1,m]\!]\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

(*a*) On considère que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont munis des normes $\|\ \|_\infty$ respectives. Soit $T\in L$. Montrer qu'il existe $C>0$ tel que $\|T(x)\|_\infty\le C\|x\|_\infty$, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

(*b*) Soit $N : L\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ l'application donnée par

$$N(T)=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_\infty=1}}\big\|T(x)\big\|_\infty.$$

D'après l'item précédent, N est bien définie. Montrer que N est une norme.

(c) Calculer $N(T)$ en fonction des coefficients de la matrice $\phi(T)$. S'agit-t-il d'une application connue ? En déduire une autre preuve du fait que N est une norme.

Solution.

(a) On écrit $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j^{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, soit $C_i = |a_{i,1}| + \cdots + |a_{i,n}| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $C = \max(C_1, \ldots, C_m)$. En conséquence,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \max(|v_1|, \ldots, |v_n|) = C_i \|v\|_\infty \leq C\|v\|_\infty,$$

pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Comme $T(v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j e_i^{\mathbb{R}^m}$, on voit bien que

$$\|T(v)\|_\infty = \max_{i \in [\![1,m]\!]} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j\right| \leq C\|v\|,$$

comme on voulait démontrer.

(b) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(c) Le premier item montre que

$$N(T) \leq \max_{i \in [\![1,m]\!]} \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\Big).$$

On affirme que

$$N(T) = \max_{i \in [\![1,m]\!]} \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\Big). \tag{2}$$

C'est clair que (2) est vérifiée si $T = \mathbf{0}_L$. On suppose désormais que $T \neq \mathbf{0}_L$. On suppose que $C_{i_0} = C = \max(C_1, \ldots, C_m)$, avec $i_0 \in [\![1, m]\!]$. En effet, soit $v = (\mathrm{sgn}(a_{i_0,1}), \ldots, \mathrm{sgn}(a_{i_0,n})) \in \mathbb{R}^n$, où $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \{0, \pm 1\}$ est la fonction donnée par $\mathrm{sgn}(x) = 1$, si $x > 0$, $\mathrm{sgn}(x) = -1$, si $x < 0$ et $\mathrm{sgn}(0) = 0$. C'est clair que $\|v\|_\infty = 1$ (puisque $T \neq \mathbf{0}_L$). En plus, le coefficient de $e_{i_0}^{\mathbb{R}^m}$ dans $T(v)$ est $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$. Cela implique que

$$\max_{i \in [\![1,m]\!]} \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\Big) = C = C_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \leq \|T(v)\|_\infty = N(T)\|v\|_\infty = N(T),$$

comme on voulait démontrer.

C'est clair que, si l'on identifie $M_{m \times n}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ (m facteurs), alors $N(T)$ coïncide avec la norme $N_{\max}$ du produit cartésien précédent, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme 1. En particulier, cela nous donne une autre preuve du fait que $N(T)$ est une norme.

6. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

(a) Étant donnés deux points $M = (x_M, y_M)$ et $N = (x_N, y_N)$, rappeler l'expression de la distance (euclidienne) de M à N.

(b) On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ est **borné** s'il existe un réel R tel que pour tout point $m \in E$, on ait $d(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, m) \leq R$. Faire un dessin représentant graphiquement cette situation.

(c) Dans la définition précédente, le choix de la distance à l'origine a-t-il une importance ?

(d) On considère les ensembles suivants :

$$E_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0},$$
$$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$
$$E_3 = \text{ le disque de centre } (1,0) \text{ et de rayon } 1,$$
$$E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : y \leq e^{-x}\}.$$

Déterminer lesquels sont bornés ou non-bornés. Représenter ces ensembles sur un graphique.

Solution.

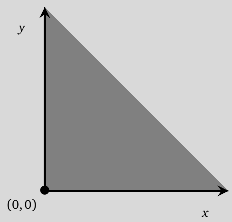
(a) On rappelle que la distance (euclidienne) de M à N est

$$\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

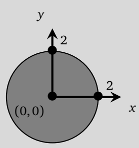
(b) On voit bien qu'un ensemble E est borné s'il existe $R > 0$ tel que l'on peut inclure E dans la boule de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon R.

(c) Non. Soit $P \in \mathbb{R}^2$. On affirme qu'un ensemble E est borné si et seulement s'il existe $R' > 0$ tel que l'on peut inclure E dans la boule de centre P et de rayon R'. En effet, si E est borné, il existe $R > 0$ tel que l'on peut inclure E dans la boule de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon R. Soit $R' = R + d(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, P)$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $m \in E$ on voit que $d(m,P) \leq d(m, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) + d(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, P) \leq R + d(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, P) = R'$, comme on voulait démontrer. Réciproquement, s'il existe $R' > 0$ tel que l'on peut inclure E dans la boule de centre P et de rayon R', on pose $R = R' + d(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, P)$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $m \in E$ on voit que $d(m, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) \leq d(m,P) + d(P, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) \leq R' + d(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, P) = R$, comme on voulait démontrer.

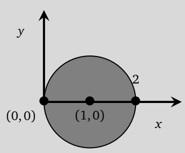
(d) (i) L'ensemble E_1 n'est pas borné. En effet, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1^{\mathbb{N}}$ donnée par $v_n = (n,0)$. C'est clair $\|v_n\| = n$, qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.



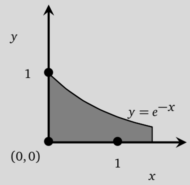
(ii) L'ensemble E_2 est borné. En effet, par définition on voit que $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$, pour tout $(x,y) \in E_2$.



(iii) L'ensemble E_3 est borné autour de $P = (1,0)$, puisque par définition on voit que $\|(x-1,y)\| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq 1$, pour tout $(x,y) \in E_3$. D'après l'item précédent, E_3 est borné.



(iv) L'ensemble E_4 n'est pas borné. En effet, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_4^{\mathbb{N}}$ donnée par $v_n = (n, 0)$. C'est clair $\|v_n\| = n$, qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.



7. *La norme p sur $\mathbb{R}^n$.* Pour tout $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'application $\| \ \|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Let but de cet exercice est de démontrer que $\| \ \|_p$ est une norme.

(a) Montrer que, si $p = 1$, $\| \ \|_1$ est une norme.

(b) On suppose désormais que $p > 1$ et on définit $q = p/(p-1)$. Montrer que $\| \ \|_p$ satisfait toutes les propriétés d'une norme, avec exception peut-être de l'inégalité triangulaire.

(c) Dans le reste de l'exercice, on va finalement montrer que $\| \ \|_p$ satisfait aussi l'inégalité triangulaire. Montrer d'abord que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$u^{1/p} v^{1/q} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}.$$

Indication : Si $u \geq v > 0$, diviser l'identité à démontrer par v pour réduire au cas d'une seule variable u/v.

(d) À partir de l'item précédent, en déduire **l'inégalité de Hölder**, *i.e.*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

(e) Utiliser l'item précédent pour montrer que l'application $\| \ \|_p$ satisfait l'inégalité triangulaire.

Solution.

(a) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(b) On utilise le fait trivial suivant : une somme de termes non négatifs vaut zéro si et seulement si chaque terme est zéro. Cela nous dit que, si $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = 0$, alors $|x_i|^p = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, *i.e.* $x_i = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par ailleurs,

$$\|\lambda \cdot x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = |\lambda|.\|x\|_p,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) L'identité est immédiate si $v = 0$. On suppose alors $v > 0$ et sans perte de généralité on peut supposer que $u \geq v$. On pose $x = u/v$. L'identité $u^{1/p}v^{1/q} \leq u/p + v/q$ devient $x^{1/p} \leq 1/q + x/p$. Elle est vérifiée pour $x = 1$. En outre, la dérivée $x^{-1/q}/p$ du membre de gauche est clairement inférieure à la dérivée $1/p$ du membre de droite pour $x > 1$. Cela implique que $x^{1/p} \leq 1/q + x/p$, pour tout $x \geq 1$, ce qui montre l'inégalité demandée.

(d) L'égalité est évidente si $x = \mathbf{0}^n_{\mathbb{R}}$ ou $y = \mathbf{0}^n_{\mathbb{R}}$. On suppose désormais que x et y sont non nuls. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on prend

$$u_i = \frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} \text{ et } v_i = \frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}.$$

D'après l'inégalité dans l'item précédent, on voit que

$$u_i^{1/p} v_i^{1/q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}.$$

Si l'on considère la somme sur $i \in [\![1, n]\!]$ des expressions dans l'inégalité précédente on déduit

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

comme on voulait démontrer.

(e) Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On note d'abord que

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq |x_i|.|x_i + y_i|^{p-1} + |y_i|.|x_i + y_i|^{p-1},$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, où l'on a utilisé l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue. Alors

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|.|x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \big(\|x\|_p + \|y\|_p \big) \|x + y\|_p^{p/q},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder et que $(p-1)q = p$. Cela nous dit que

$$\|x + y\|_p = \|x + y\|_p^{p-p/q} \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

comme on voulait démontrer.

8. *Convexité de la boule unité.* Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une norme et soit

$$B_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : N(x) < 1 \right\}$$

la **boule unité ouverte** de N.

(a) Représenter B_N lorsque $n = 2$, dans les cas où N est $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$.

(b) Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que le **segment** $[x, y]$ déterminé par x et y est l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n : \text{ il existe } t \in [0,1] \text{ tel que } z = tx + (1-t)y \right\}.$$

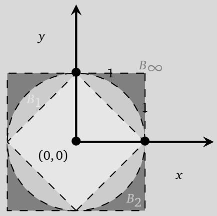
Démontrer que B_N est **convexe** (*i.e.* pour tous a et b dans B_N, le segment qui les relie est inclus dans B_N).

(c) Que se passe-t-il pour la boule unité fermée ?

(d) Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont la boule unité aurait la forme d'un cœur ?

Solution.

(a) Si l'on dénote B_1, B_2 et B_∞ les boules unités ouvertes de $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$, respectivement, on voit bien que



(b) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(c) Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

(d) D'après les items précédents ce n'est pas possible.

9. *Comparaison de normes.* Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Étant donné $r > 0$, on note

$$\bar{B}_i(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : N_i(x) \leq r \right\}$$

la boule fermée de centre l'origine $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ et rayon r pour la norme N_i, avec $i \in \{1, 2\}$. Pour tout $r > 0$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(P1) $\bar{B}_1(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1) \subseteq \bar{B}_2(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$.

(P2) Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $N_2(x) \leq r N_1(x)$.

Solution. Il s'agit d'un résultat démontré dans les notes du cours.

10. *Équivalence de normes.* On considère $\mathbb{R}^2$ ainsi que les trois normes

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \ \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

On note $\bar{B}_i(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, R)$ la boule fermée de rayon $R > 0$ et de centre l'origine $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ pour la norme ℓ^i.

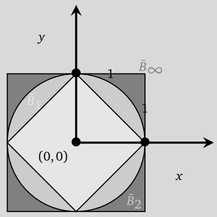
(a) Dessiner les boules $\bar{B}_\infty(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et $\bar{B}_1(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 2)$.

(b) A l'aide de l'exercice précédent, trouver la constante optimale $C_{1,\infty}$ telle que l'on ait $\|v\|_1 \le C_{1,\infty}\|v\|_\infty$, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Trouver les autres constantes optimales d'équivalence de ces trois normes.

Solution.

(a) Si l'on dénote $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$ et $\bar{B}_\infty$ les boules unités fermées de $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$, respectivement, on voit bien que



(b) C'est clair que $C_{1,\infty} = 2$.

(c) On dénotera $C_{i,j} \in \mathbb{R}_{>0}$ la constante minimale dans l'inégalité $\|v\|_i \le C_{i,j}\|v\|_j$, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, avec $i, j \in \{1, 2, \infty\}$ différents. On voit bien que $C_{1,2} = C_{2,\infty} = \sqrt{2}$ et $C_{\infty,2} = C_{2,1} = C_{\infty,1} = 1$.

11. *La norme infini.* Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \max\big(|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\big), \tag{3}$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, où $\|x\|_p$ est la norme p définie dans l'exercice **7** pour tout $p \in \mathbb{R}_{\ge 1}$.

Solution. On suppose que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$, avec $i_0 \in [\![1, n]\!]$. Alors,

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| = \big(|x_{i_0}|^p\big)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p.$$

En outre, c'est clair que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^p\right)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty,$$

où l'on a utilisé que $|x_i| \le \|x\|_\infty$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La limite des inégalités $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p}\|x\|_\infty$ quand p tend vers $+\infty$ donne alors (3).