MAT303

Premier semestre — 2020–2021

Fiche 2: Normes

Sauf indication contraire, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$ sera toujours muni de la norme donnée par la valeur absolue.

1. *Exemples et contre-exemples de normes.* On considère les applications $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous.
(a) $N(x,y) = |x|^2 + |y|$, (b) $N(x,y) = \max(|x|, |y|^3)$, (c) $N(x,y) = \sqrt{25x^2 + 4y^2}$,
(d) $N(x,y) = 5|x| + 2|y|$, (e) $N(x,y) = \max(x,y)$, (f) $N(x,y) = \min(|x|,|y|)$,
(g) $N(x,y) = |x+y| + 2|y|$, (h) $N(x,y) = \max(x^2, y^2)$, (i) $N(x,y) = |x|$.
Détermines lesquelles sont des normes.

2. *Normes associées aux produits scalaires.* Soit $n > 0$ un entier positif. On rappelle qu'un **produit scalaire** sur $\mathbb{R}^n$ est une application $\langle\, ,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui satisfait

(PS1) $\langle x + \lambda x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x', y\rangle$, pour tous $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

(PS2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

(PS3) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et $\langle x, x\rangle = 0$ implique $x = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$.

(a) Montrer que $\langle y, x + \lambda x'\rangle = \langle y, x\rangle + \lambda\langle y, x'\rangle$, pour tous $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et que $\langle \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, x\rangle = \langle x, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\rangle = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) On définit l'application $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le but des items suivants est de montrer que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, que l'on appelle la **norme associée** au produit scalaire $\langle\, ,\rangle$. Vérifier que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$.

(c) Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. À partir d'étudier la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par

$$g(t) = \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty\rangle,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, déduire **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**, *i.e.*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Que peut-on dire dans le cas où on a l'égalité ?

(d) Montrer que l'application $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, est une norme.

(e) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère la quantité

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Montrer que l'application $\langle\, ,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

pour tous les vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, est un produit scalaire. En déduire que l'application $\| \ \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie dans (1) est une norme sur $\mathbb{R}^n$, qui est appelée la **norme 2**.

3. Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une norme.

(a) Montrer que

$$\Big|N(x) - N(y)\Big| \leq N(x - y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que

$$N(x - y) \leq N(x) + N(y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(c) On suppose maintenant que N est une norme associée à un produit scalaire. Montrer que, étant donnés deux vecteurs non nuls $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$, $N(x - y) = N(x) + N(y)$ si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $y = -\lambda x$.

4. *Normes et applications linéaires.* Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une norme. On suppose donnée une application linéaire inversible $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que l'application $N_\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par $N_\varphi(v) = N(\varphi(v))$, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(b) Décrire la boule unité de N_φ.

(c) Comme une application du premier item, montrer sans calcul que

$$N_\varphi(x, y) = \max\big(|x + y|, |x - y|\big)$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter sa boule unité.

(d) Que pensez-vous de la boule unité de la question précédente ? Montrer que $\max(|x + y|, |x - y|) = |x| + |y|$.

5. *Normes des applications linéaires.* Soient n et m deux nombres entiers positifs. On considère l'espace

$$L = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \big\{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : T \text{ est une application linéaire}\big\}.$$

On utilisera l'identification $\phi : L \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$, où $\phi(T) = (a_{i,j})_{i\in[\![1,m]\!], j\in[\![1,n]\!]}$ est donnée par

$$T(e_j^{\mathbb{R}^n}) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} e_i^{\mathbb{R}^m},$$

où $\{e_j^{\mathbb{R}^n} : j \in [\![1, n]\!]\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_i^{\mathbb{R}^m} : i \in [\![1, m]\!]\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

(a) On considère que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont munis des normes $\| \ \|_\infty$ respectives. Soit $T \in L$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|T(x)\|_\infty \leq C\|x\|_\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soit $N : L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ l'application donnée par

$$N(T) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n,\\ \|x\|_\infty = 1}} \big\|T(x)\big\|_\infty.$$

D'après l'item précédent, N est bien définie. Montrer que N est une norme.

(c) Calculer $N(T)$ en fonction des coefficients de la matrice $\phi(T)$. S'agit-t-il d'une application connue ? En déduire une autre preuve du fait que N est une norme.

6. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

(a) Étant donnés deux points $M = (x_M, y_M)$ et $N = (x_N, y_N)$, rappeler l'expression de la distance (euclidienne) de M à N.

(b) On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ est **borné** s'il existe un réel R tel que pour tout point $m \in E$, on ait $d(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, m) \leq R$. Faire un dessin représentant graphiquement cette situation.

(c) Dans la définition précédente, le choix de la distance à l'origine a-t-il une importance ?

(d) On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0},\\
E_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\},\\
E_3 &= \text{ le disque de centre } (1, 0) \text{ et de rayon } 1,\\
E_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : y \leq e^{-x}\right\}.
\end{aligned}$$

Déterminer lesquels sont bornés ou non-bornés. Représenter ces ensembles sur un graphique.

7. *La norme p sur $\mathbb{R}^n$.* Pour tout $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'application $\| \ \|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Let but de cet exercice est de démontrer que $\| \ \|_p$ est une norme.

(a) Montrer que, si $p = 1$, $\| \ \|_1$ est une norme.

(b) On suppose désormais que $p > 1$ et on définit $q = p/(p-1)$. Montrer que $\| \ \|_p$ satisfait toutes les propriétés d'une norme, avec exception peut-être de l'inégalité triangulaire.

(c) Dans le reste de l'exercice, on va finalement montrer que $\| \ \|_p$ satisfait aussi l'inégalité triangulaire. Montrer d'abord que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$u^{1/p} v^{1/q} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}.$$

Indication : Si $u \geq v > 0$, diviser l'identité à démontrer par v pour réduire au cas d'une seule variable u/v.

(d) À partir de l'item précédent, en déduire **l'inégalité de Hölder**, *i.e.*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

(e) Utiliser l'item précédent pour montrer que l'application $\| \ \|_p$ satisfait l'inégalité triangulaire.

8. *Convexité de la boule unité.* Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une norme et soit

$$B_N = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x) < 1\}$$

la **boule unité ouverte** de N.

(a) Représenter B_N lorsque $n = 2$, dans les cas où N est $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$.

(b) Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que le **segment** $[x, y]$ déterminé par x et y est l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{R}^n : \text{ il existe } t \in [0,1] \text{ tel que } z = tx + (1-t)y\}.$$

Démontrer que B_N est **convexe** (*i.e.* pour tous a et b dans B_N, le segment qui les relie est inclus dans B_N).

(c) Que se passe-t-il pour la boule unité fermée ?

(d) Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont la boule unité aurait la forme d'un cœur ?

9. *Comparaison de normes.* Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Étant donné $r > 0$, on note

$$\bar{B}_i(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : N_i(x) \leq r\}$$

la boule fermée de centre l'origine $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ et rayon r pour la norme N_i, avec $i \in \{1, 2\}$. Pour tout $r > 0$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(P1) $\bar{B}_1(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1) \subseteq \bar{B}_2(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$.

(P2) Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $N_2(x) \leq rN_1(x)$.

10. *Équivalence de normes.* On considère $\mathbb{R}^2$ ainsi que les trois normes

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \ \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

On note $\bar{B}_i(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, R)$ la boule fermée de rayon $R > 0$ et de centre l'origine $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ pour la norme ℓ^i.

(a) Dessiner les boules $\bar{B}_\infty(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et $\bar{B}_1(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 2)$.

(b) A l'aide de l'exercice précédent, trouver la constante optimale $C_{1,\infty}$ telle que l'on ait $\|v\|_1 \leq C_{1,\infty}\|v\|_\infty$, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Trouver les autres constantes optimales d'équivalence de ces trois normes.

11. *La norme infini.* Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \max\big(|x_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\big), \tag{2}$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, où $\|x\|_p$ est la norme p définie dans l'exercice **7** pour tout $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$.