# TD 1 : Sous-ensembles du plan.

---

**Exercice 1 :** Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, décrire les ensembles $f^{-1}([0,1[)$ et $f^{-1}([-1,2])$.

$$\begin{aligned} f_1 &: x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2, \\ f_2 &: x \in \mathbb{R} \longmapsto x, \\ f_3 &: x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(x). \end{aligned}$$

**Exercice 2 :** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'application définie par $f(x,y) = x + y$.

1. Décrire les ensembles suivants géométriquement et les représenter sur un dessin.

$$f^{-1}(\{1\}),\ f^{-1}([0,1]),\ f^{-1}([0,1[),\ f^{-1}(\mathbb{R}_+).$$

2. On appelle *ligne de niveau* $\lambda$ de $f$ l'ensemble

$$L_\lambda(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \lambda\}.$$

Quelle est la nature géométrique des ligne de niveaux de $f$ ? Décrire les ensembles ci-dessus comme des réunions de lignes de niveaux.

**Exercice 3 :** Décrire les lignes de niveaux $\lambda$ des fonctions suivantes, en fonction de la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2,\ f_2(x,y) = y - x^2,\ f_3(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}.$$

**Exercice 4 :** Décrire les ensembles suivants comme des unions et intersections d'images réciproques de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ par des fonctions $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on précisera.

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant x^2\right\}, \\ E_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x + 2y \leqslant 1 \text{ et } y \geqslant x^2 - 1\right\}, \\ E_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 \geqslant 4\right\}. \end{aligned}$$

**Exercice 5 :** Soient $A$ et $B$ deux points du plan $\mathbb{R}^2$, de coordonnées $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite $(AB)$.
2. Donner une équation paramétrique de la droite $(AB)$.
3. Que représente géométriquement l'ensemble $\{(1-t) \cdot A + t \cdot B, t \in [0,1]\}$ ?

**Exercice 6 :** On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Étant donnés deux points $M$ et $N$ de coordonnées respectives $(x_M, y_M)$ et $(x_N, y_N)$, rappeler l'expression de la distance de $M$ à $N$.
2. On dit qu'un sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}^2$ est borné s'il existe un réel $R$ tel que pour tout point $m \in E$, on ait $d(0, m) \leqslant R$. Faire un dessin représentant graphiquement cette situation.
3. Dans la définition ci-dessus, le choix de la distance à l'origine a-t-il une importance ?
4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bornés/non-bornés ? (Représenter ces ensembles sur un graphique)

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\\
E_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 4\right\},\\
E_3 &= \text{le disque de centre } (1, 0) \text{ et de rayon } 1,\\
E_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, y \leqslant e^{-x}\right\}.
\end{aligned}
$$