MAT303

Premier semestre — 2020–2021

Fiche 1: Sous-ensembles du plan et de l'espace

Sauf indication contraire, le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ sont toujours munis de la norme euclidienne.

1. On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = x \text{ et } f_3(x) = \sin(x).$$

Décrire les images réciproques $f_i^{-1}([0,1\,[\,)$ et $f_i^{-1}([-1,2])$, pour tout $i \in \{1,2,3\}$.

Solution. On rappelle que, étant donnée une application $f : X \to Y$, oùX et Y sont deux ensembles, et $A \subseteq Y$ une partie,

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Dans ce cas, on voit bien que

(a) $f_1^{-1}([0,1\,[\,) = \,]-1,1\,[$ et $f_1^{-1}([-1,2]) = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$;

(b) $f_2^{-1}([0,1\,[\,) = [0,1\,[$ et $f_2^{-1}([-1,2]) = [-1,2]$;

(c) $f_3^{-1}([0,1\,[\,) = \cup_{n\in\mathbb{Z}}([2n\pi,(2n+1)\pi] \setminus \{(2n+1)\pi/2\})$ et $f_3^{-1}([-1,2]) = \mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'application définie par $f(x,y) = x + y$.

(a) On considère les ensembles suivants :

$$f^{-1}\big(\{1\}\big), f^{-1}\big([0,1]\big), f^{-1}\big([0,1\,[\,\big) \text{ et } f^{-1}\big(\mathbb{R}_{\geq 0}\big).$$

Décrire les ensembles précédents géométriquement et les représenter sur un dessin.

(b) On appelle **ligne de niveau** λ de f l'ensemble

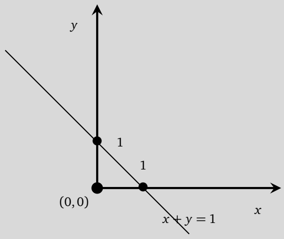
$$L_\lambda(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\big\}.$$

Quelle est la nature géométrique des ligne de niveaux de f ? Décrire les ensembles ci-dessus comme des réunions de lignes de niveaux.

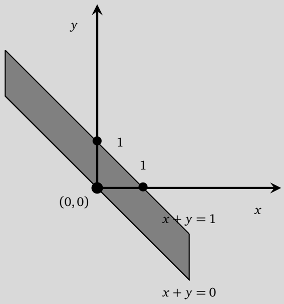
Solution.

(a) On voit bien que

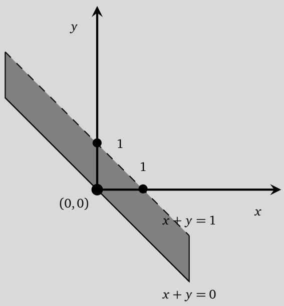
(i) $f^{-1}(\{1\})$ est la droite $x + y = 1$, *i.e.*



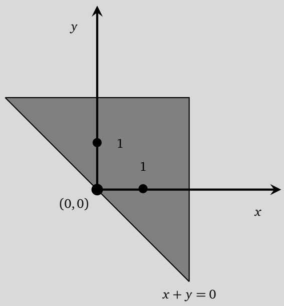
(ii) $f^{-1}([0,1])$ est la région fermée entre les droite $x+y=0$ et $x+y=1$, *i.e.*



(iii) $f^{-1}([0,1[\,)$ est la région fermée entre les droite $x+y=0$ et $x+y=1$, privée de la droite $x+y=1$, *i.e.*



(iv) $f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ est la région fermée au-dessus de la droite $x+y=0$, *i.e.*



(*b*) La ligne de niveau $L_\lambda(f)$ est l'intersection dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de f et le plan $z=\lambda$. On voit bien que,

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{\lambda \in A} L_\lambda(f),$$

pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$. On a les identités suivantes :

(i) $f^{-1}(\{1\}) = L_1(f)$;
(ii) $f^{-1}([0,1]) = \cup_{\lambda\in[0,1]} L_\lambda(f)$;
(iii) $f^{-1}([0,1[\,) = \cup_{\lambda\in[0,1[} L_\lambda(f)$;
(iv) $f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \cup_{\lambda\in\mathbb{R}_{\geq 0}} L_\lambda(f)$.

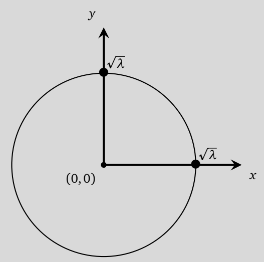
3. On considère les applications suivantes :

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2,\ f_2(x,y) = y - x^2 \text{ et } f_3(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}.$$

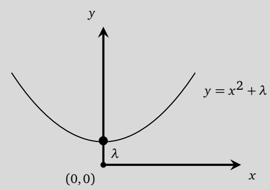
Décrire les lignes de niveaux λ des fonctions précédentes, en fonction de la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution.

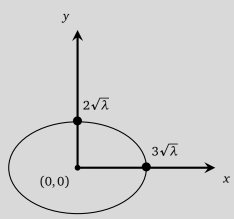
(a) On voit bien que $L_\lambda(f_1) = \emptyset$ si $\lambda < 0$, $L_0(f_1) = \{(0,0)\}$ et $L_\lambda(f_1)$ est le circle de centre de $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$ si $\lambda > 0$, *i.e.*



(b) C'est facile à voit que $L_\lambda(f_2) = \{(x, x^2+\lambda) : x \in \mathbb{R}\}$ est une parabole avec axe de symétrie $x = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et dont l'intersection avec l'axe des ordonnées est $(0,\lambda)$, *i.e.*



(c) On voit bien que $L_\lambda(f_3) = \emptyset$ si $\lambda < 0$, $L_0(f_3) = \{(0,0)\}$ et $L_\lambda(f_3)$ est l'ellipse de centre $(0,0)$, parallèle aux axes des coordonnées et des sommets $(0, \pm 2\sqrt{\lambda})$ (sur l'axe des ordonnées) et $(\pm 3\sqrt{\lambda}, 0)$ (sur l'axe des abscisses), *i.e.*



4. On considère les ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\right\},$$
$$E_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + 2y \leq 1 \text{ et } y \geq x^2 - 1\right\},$$
$$E_3 = \left\{((x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 \geq 4\right\}.$$

Décrire les ensembles précédents comme des unions et intersections d'images réciproques de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ par des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que l'on précisera.

Solution. C'est clair que

(a) $E_1 = f_1^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, avec $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_1(x,y) = y - x^2$;

(b) $E_2 = f_2^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0}) \cap g_2^{-1}([-1,1])$, avec $f_2, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données par $f_2(x,y) = x^2 - y - 1$ et $g_2(x,y) = x + 2y$;

(c) $E_3 = f_3^{-1}([0,1[\cup \mathbb{R}_{\geq 4})$, avec $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_2(x,y) = x^2 + y^2$.

5. Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points différents du plan $\mathbb{R}^2$.

(a) Donner une équation cartésienne de la droite $\mathbb{L}$ qui passe par A et B.

(b) Donner la représentation paramétrique de la droite précédente.

(c) Que représente géométriquement l'ensemble $\{t \cdot A + (1-t) \cdot B : t \in [0,1]\}$?

Solution.

(a) On voit bien que

$$(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

est l'équation demandée.

(b) On voit bien que la droite $\mathbb{L}$ est donnée par

$$\mathbb{L} = \left\{A + t \cdot (B - A) : t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\right) : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

(c) Il s'agit du segment déterminé par A et B.

6. Esquisser chacun des sous-ensembles du plan indiqués ci-dessous.

(a) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$;

(b) $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ ou } y > 0\}$;

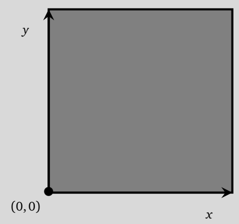
(c) $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + 2y \leq 1\}$;

(d) $S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\}$;

(e) $S_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \geq 4\}$.

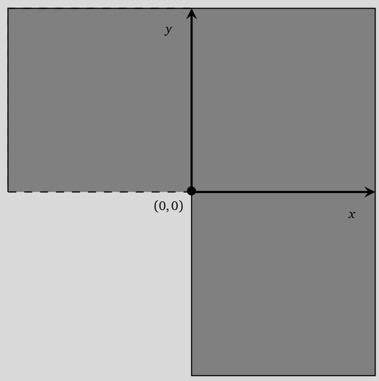
Solution.

(a) On voit bien que S_1 est donné par le premier quadrant (fermé) du plan. On peut le représenter graphiquement par



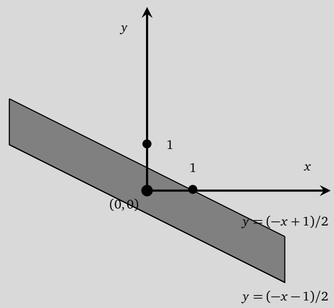
où le dessin continue vers la droite et vers le haut.

(b) La définition de S_2 nous dit que (x, y) est dans S_2 si et seulement si $x \geq 0$ ou $y > 0$, *i.e.* S_2 est donné par la réunion du premier et du quatrième quadrants fermés du plan, avec le deuxième quadrant ouvert du plan. On peut le représenter graphiquement par

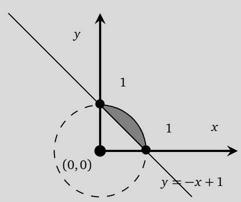


où le dessin continue vers la droite, vers le haut et vers la gauche en dessus de l'axe des abscisses.

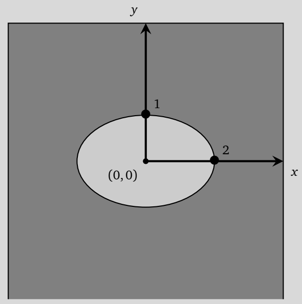
(c) On voit bien $-1 \leq x + 2y \leq 1$ équivaut à $-(x+1)/2 \leq y \leq (-x+1)/2$, *i.e.* S_3 est la région en dessus de la droite $y = (-x-1)/2$ et en dessous de la droite $y = (-x+1)/1$. On peut le représenter graphiquement par



(d) On voit bien que l'ensemble S_4 est l'intersection du disque ouvert de centre $(0, 0)$ et rayon 1 avec le demi-plan $x + y > 1$ (*i.e.* la région en dessus de la droite $y = -x + 1$).



(*e*) On voit que S_5 est le complémentaire de l'ellipse $(x/2)^2 + y^2 < 1$, *i.e.* S_5 est donné par



7. Soit $\mathbb{L}$ la droite dans le plan $\mathbb{R}^2$ parallèle au vecteur $(1, 1)$ et qui inclut le point $(2, 0)$, En outre, soit $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{R}^2$ la droite d'équation $3x + 4y = 13$.

(*a*) Déterminer l'intersection $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$.

(*b*) Calculer l'angle formé entre $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$.

Solution.

(*a*) C'est clair que

$$\mathbb{L} = \{(2 + t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Soit $(2 + t_0, t_0) \in \mathbb{L}$. Alors, $(2 + t_0, t_0) \in \mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$ si et seulement si $(2 + t_0, t_0) \in \mathbb{L}'$, si et seulement si $3(2 + t_0) + 4t_0 = 13$, *i.e.* $7t_0 + 6 = 13$, ce qui équivaut à $t_0 = 1$. En conséquence, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \{(3, 1)\}$.

(*b*) On voit bien que $\mathbb{L}'$ est parallèle au vecteur $(-4, 3)$ (on peut vérifier que $(-1, 4) \in \mathbb{L}'$ et que $(-4, 3) = (-1, 3)–(3, 1)$). On utilisera l'égalité $v \bullet w = \|v\|\|w\| \cos(\theta)$, où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle déterminé par les vecteurs $v = (v_1, v_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ et $v \bullet w = v_1 w_1 + w_1 w_2$ est le produit scalaire usuel. Dans ce cas, pour $v = (-4, 3)$ et $w = (1, 1)$ on trouve que

$$-1 = 5\sqrt{2}\cos(\theta),$$

i.e. $\theta \simeq 0,5451\pi$.

8. Esquisser chacun des sous-sensembles de l'espace indiqués ci-dessous.

(*a*) $T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$;

(*b*) $T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$;

(*c*) $T_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z \geq 0\}$;

(*d*) $T_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ ou } x = 2y = -z\}$,

(*e*) $T_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Solution.

(*a*) On voit bien que T_1 est le premier octant fermé de l'espace.

(*b*) On voit bien que T_2 est la boule ouverte de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1.

(c) On voit bien que T_3 est l'intersection de la boule ouverte de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1 avec le demi-espace $x+y+z \geq 0$ (*i.e.* le demi-espace en dessous du plan $z=-x-y$).

(d) On voit bien que T_4 est la réunion du plan $z = -x - y + 1$ et de la droite $\{\lambda.(2,1,-2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(e) L'ensemble T_5 est la région fermée de l'espace en dessus du cône de révolution autour de l'axe z engendré par la demi-droite $\{\lambda.(1,0,1) : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

On laisse les dessins à l'étudiant(e).

9. Déterminer la représentation paramétrique de la droite $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^3$ qui inclut les points $(1,0,2)$ et $(0,0,1)$.

Solution. C'est clair que $\mathbb{L}$ est parallèle au vecteur $(1,0,1) = (1,0,2)-(0,0,1)$ et inclut le point $(0,0,1)$, *i.e.*

$$\mathbb{L} = \{(t,0,t+1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

10. Soient $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^3$ (resp., $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{R}^3$) la droite dans l'espace parallèle au vecteur $(1,2,3)$ (resp., $(2,2,1)$) et qui inclut le point $(1,0,0)$ (resp., $(0,0,2)$). Calculer l'intersection $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$.

Solution. C'est clair que

$$\mathbb{L} = \{(t+1,2t,3t) : t \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathbb{L}' = \{(2s,2s,s+2) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $(t+1,2t,3t) \in \mathbb{L}$, pour $t \in \mathbb{R}$. C'est clair que $(t+1,2t,3t) \in \mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$ si et seulement si $(t+1,2t,3t) \in \mathbb{L}'$, si et seulement s'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $(t+1,2t,3t) = (2s,2s,s+2)$. Cela implique en particulier $t = s$ (si l'on regarde la deuxième coordonnée). En outre, on a $t+1 = 2t$ (si l'on regarde la première coordonnée), ce qui donne $t = 1$. On voit finalement que si $t = 1$, $3t = t+2$, ce qui dit que $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \{(2,2,3)\}$.

11. Calculer l'équation cartésienne du plan $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ dans le cas suivants :

(a) Π est le plan parallèle aux vecteurs $(1,1,0)$ et $(-2,0,1)$, et qui inclut le point $(0,1,2)$,

(b) Π est le plan incluant les points $(1,2,0)$, $(3,3,1)$ et $(-2,0,3)$,

(c) Π est le plan incluant le point $(3,1,2)$ et orthogonal au vecteur $(0,0,1)$.

Solution. On rappelle q'un plan orthogonal à un vecteur non nul $n \in \mathbb{R}^3$ et qui inclut un point $x_0 \in \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : n \bullet (x - x_0) = 0\right\}. \tag{1}$$

(a) Dans ce cas, Π est orthogonal au produit vectoriel $n = (1,1,0) \wedge (-2,0,1) = (1,-1,2)$. Si l'on utilise (1), on trouve que

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 3\right\}.$$

(b) Dans ce cas, Π es parallèle aux vecteurs $(2,1,1) = (3,3,1) - (1,2,0)$ et $(3,2,-3) = (1,2,0) - (-2,0,3)$, ce qui dit qu'il es orthogonal au produit vectoriel $n = (2,1,1) \wedge (3,2,-3) = (-5,9,1)$ Si l'on utilise (1), on trouve que

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5x + 9y + z = 13\right\}.$$

(c) Si l'on utilise (1), on trouve que

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\right\}.$$

12. Soient

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 2\right\} \text{ et } \Pi' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 5\right\}.$$

Déterminer la représentation paramétrique de la droite donnée par $\Pi \cap \Pi'$.

Solution. Il faut résoudre le système donné par $x - y = 2$ et $2x + y - z = 5$. La première équation nous dit que $x = y + 2$. Si l'on utilise cette identité dans la deuxième équation, on trouve $z = 3y - 1$. En conséquence,

$$\Pi \cap \Pi' = \left\{s \cdot (1,1,3) + (2,0,-1) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

13. Calculer la distance entre $(2,-2,1)$ et le plan $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ donné par

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 1\right\}.$$

Solution. En général, la distance d'un point $y \in \mathbb{R}^3$ au plan Π d'équation $n \bullet (x - x_0) = 0$, où $n \in \mathbb{R}^3$ est non nul et $x_0 \in \mathbb{R}^3$ est un point du plan Π, est donnée par

$$d(y,\Pi) = \left|\frac{n \bullet (y - x_0)}{\sqrt{n \bullet n}}\right|. \tag{2}$$

En effet, si l'on considère la droite $\mathbb{L} = \{z = t \cdot n + y : t \in \mathbb{R}\}$, $z_0 = t_0 \cdot n + y \in \mathbb{L} \cap \Pi$ si et seulement si

$$t_0 = -\frac{n \bullet (y - x_0)}{n \bullet n}.$$

La distance entre y et Π est alors $\|y - z_0\| = |t_0|\sqrt{n \bullet n}$, ce qui donne (2).

Dans le cas de l'exercice, (2) dit que la distance demandée est $4/\sqrt{6}$.

14. On considère le plan

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - z = 2\right\}$$

et le plan $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ incluant les points $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ et $(3,-1,0)$. Déterminer une droite $\mathbb{L}$ telle que $\mathbb{L} \cap \Pi = \mathbb{L} \cap \Pi' = \emptyset$ et $(1,2,0) \in \mathbb{L}$.

Solution. On remarque d'abord que $(0,1,-1) = (1,0,-1) - (1,-1,0)$ et $(2,0,0) = (3,-1,0) - (1,-1,0)$ sont deux vecteurs parallèles au plan Π'. En conséquence, $(0,-2,-2) = (0,1,-1) \wedge (2,0,0)$ est un vecteur orthogonal à Π' et

$$\Pi' = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = -1\big\}.$$

On voit bien que les conditions $\mathbb{L} \cap \Pi = \mathbb{L} \cap \Pi' = \emptyset$ impliquent que le vecteur directeur $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ de la droite $\mathbb{L}$ doit être orthogonal à Π et à Π'. On pourra prendre par exemple $(u,v,w) = (1,3,-1) \wedge (0,1,1) = (4,-1,1)$. On trouve finalement

$$\mathbb{L} = \big\{s \cdot (4,-1,1) + (1,2,0) : s \in \mathbb{R}\big\}.$$

15. On dit que deux droites non-coplanaires $\mathbb{L}, \mathbb{L}' \subseteq \mathbb{R}^3$ sont **gauches** si elles ne sont pas parallèles. Soit $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ le plan donné par

$$\Pi = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 4y + 4z = 0\big\}$$

et soit $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^3$ la droite parallèle au vecteur $(0,1,2)$ et qui passe par le point $(1,-1,0)$. Trouver deux droites gauches $\mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ telles que $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset$ et $d(P, \Pi) = 3$, pour tout $P \in \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$.

Solution. On va trouver d'abord les points dans la droite $\mathbb{L}$ a distance 3 de Π. C'est clair qu'un vecteur normal de Π est $n = (1,-2,2)$. En plus, $x_0 = (0,0,0) \in \Pi$. Un point de $\mathbb{L}$ est de la forme $(1, t-1, 2t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. D'après (2), on voit que

$$d\big((1,t-1,2t), \Pi\big) = \left|\frac{2t+3}{3}\right|.$$

La condition $d((1,t-1,2t),\Pi) = 3$ équivaut alors à $|2t+3| = 9$. Les solutions sont $t = 3$ et $t = -6$. En conséquence, les points dans $\mathbb{L}$ à distance 3 de Π sont $(1,2,6)$ et $(1,-7,-12)$.

Par ailleurs, pour construire les deux droites gauches $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_2$, il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires et parallèles au plan Π. Par exemple, on voit bien que $(2,1,0) \in \Pi$ et que $(-2,0,1) \in \Pi$. Comme $(0,0,0) \in \Pi$, Π est en fait parallèle à $(2,1,0)$ et à $(-2,0,1)$. On peut poser alors

$$\mathbb{L}_1 = \big\{s \cdot (2,1,0) + (1,2,6) : s \in \mathbb{R}\big\} \text{ et } \mathbb{L}_2 = \big\{t \cdot (-2,0,1) + (1,-7,-12) : t \in \mathbb{R}\big\}.$$

16. On considère les plans

$$\Pi = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 1\big\},$$
$$\Pi' = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 1\big\},$$
$$\Pi'' = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - 2z = 6\big\}.$$

Trouver tous les points $P \in \mathbb{R}^3$ tels que $P \in \Pi \cap \Pi'$ et $d(P, \Pi'') = 1/\sqrt{14}$.

Solution. On calcule d'abord l'intersection entre Π et Π', *i.e.* il faut résoudre le système $x + y - 2z = 1$ et $2x + y - z = 1$. Au lieu de résoudre le système de façon algébrique (ce que l'étudiant pourra faire), on va proposer une autre méthode à partir d'utiliser notre intuition géométrique. Comme les vecteurs orthogonaux de Π et de Π' ne sont pas colinéaires, les plans ne sont pas parallèles (ni égaux) et l'intersection n'est pas vide. En effet, si l'on choisit par exemple le vecteur orthogonal de Π (resp., Π') donné par $n = (1,1,-2)$ (resp., $n' = (2,1,-1)$), comme le produit vectoriel $v = n \wedge n' = (1,1,-2) \wedge (2,1,-1) = (1,-3,-1)$ est non nul, $\mathbb{L} = \Pi \cap \Pi' \neq \emptyset$ est un droite parallèle au vecteur $v = (1,-3,-1)$. Une solution particulière du système est par exemple $(0,1,0)$. En conséquence,

$$\mathbb{L} = \big\{t \cdot (1,-3,-1) + (0,1,0) : t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Pour un point quelconque $(t,-3t+1,-t) \in \mathbb{L}$, avec $t \in \mathbb{R}$, on va utiliser (2) pour calculer la distance à Π''. On remarque qu'un vecteur orthogonal à Π'' est $n'' = (3,1,-2)$ et que $x_0'' = (2,0,0) \in \Pi''$. On trouve alors que

$$d\big((t,-3t+1,-t),\Pi''\big) = \left|\frac{2t-5}{\sqrt{14}}\right|.$$

La condition $d((t,-3t+1,-t),\Pi) = 1/\sqrt{14}$ équivaut alors à $|2t-5| = 1$. Les solutions sont $t = 2$ et $t = 3$. En conséquence, les points dans $\mathbb{L} = \Pi \cap \Pi'$ à distance $1/\sqrt{14}$ de Π sont $(2,-5,-2)$ et $(3,-8,-3)$.