MAT303

Premier semestre — 2020–2021

Fiche 1: Sous-ensembles du plan et de l'espace

Sauf indication contraire, le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ sont toujours munis de la norme euclidienne.

1. On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = x \text{ et } f_3(x) = \sin(x).$$

Décrire les images réciproques $f_i^{-1}([0,1[\,)$ et $f_i^{-1}([-1,2])$, pour tout $i \in \{1,2,3\}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'application définie par $f(x,y) = x + y$.

(a) On considère les ensembles suivants :

$$f^{-1}\big(\{1\}\big), f^{-1}\big([0,1]\big), f^{-1}\big([0,1[\,\big) \text{ et } f^{-1}\big(\mathbb{R}_{\geq 0}\big).$$

Décrire les ensembles précédents géométriquement et les représenter sur un dessin.

(b) On appelle **ligne de niveau** λ de f l'ensemble

$$L_\lambda(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\big\}.$$

Quelle est la nature géométrique des ligne de niveaux de f ? Décrire les ensembles ci-dessus comme des réunions de lignes de niveaux.

3. On considère les applications suivantes :

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2,\ f_2(x,y) = y - x^2 \text{ et } f_3(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}.$$

Décrire les lignes de niveaux λ des fonctions précédentes, en fonction de la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. On considère les ensembles suivants :

$$E_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\big\},$$
$$E_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + 2y \leq 1 \text{ et } y \geq x^2 - 1\big\},$$
$$E_3 = \big\{((x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 \geq 4\big\}.$$

Décrire les ensembles précédents comme des unions et intersections d'images réciproques de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ par des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que l'on précisera.

5. Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points différents du plan $\mathbb{R}^2$.

(a) Donner une équation cartésienne de la droite $\mathbb{L}$ qui passe par A et B.

(b) Donner la représentation paramétrique de la droite précédente.

(c) Que représente géométriquement l'ensemble $\{t \cdot A + (1-t) \cdot B : t \in [0,1]\}$?

6. Esquisser chacun des sous-ensembles du plan indiqués ci-dessous.

(a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$;
(b) $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ ou } y > 0\}$;
(c) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + 2y \leq 1\}$;
(d) $S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\}$;
(e) $S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \geq 4\}$.

7. Soit $\mathbb{L}$ la droite dans le plan $\mathbb{R}^2$ parallèle au vecteur $(1, 1)$ et qui inclut le point $(2, 0)$, En outre, soit $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{R}^2$ la droite d'équation $3x + 4y = 13$.

(a) Déterminer l'intersection $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$.
(b) Calculer l'angle formé entre $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$.

8. Esquisser chacun des sous-sensembles de l'espace indiqués ci-dessous.

(a) $T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$;
(b) $T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$;
(c) $T_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z \geq 0\}$;
(d) $T_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ ou } x = 2y = -z\}$,
(e) $T_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

9. Déterminer la représentation paramétrique de la droite $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^3$ qui inclut les points $(1, 0, 2)$ et $(0, 0, 1)$.

10. Soient $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^3$ (resp., $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{R}^3$) la droite dans l'espace parallèle au vecteur $(1, 2, 3)$ (resp., $(2, 2, 1)$) et qui inclut le point $(1, 0, 0)$ (resp., $(0, 0, 2)$). Calculer l'intersection $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$.

11. Calculer l'équation cartésienne du plan $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ dans le cas suivants :

(a) Π est le plan parallèle aux vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$, et qui inclut le point $(0, 1, 2)$,
(b) Π est le plan incluant les points $(1, 2, 0)$, $(3, 3, 1)$ et $(-2, 0, 3)$,
(c) Π est le plan incluant le point $(3, 1, 2)$ et orthogonal au vecteur $(0, 0, 1)$.

12. Soient

$$\Pi = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 2\big\} \text{ et } \Pi' = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 5\big\}.$$

Déterminer la représentation paramétrique de la droite donnée par $\Pi \cap \Pi'$.

13. Calculer la distance entre $(2, -2, 1)$ et le plan $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ donné par

$$\Pi = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 1\big\}.$$

14. On considère le plan

$$\Pi = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - z = 2\big\}$$

et le plan $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ incluant les points $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$ et $(3, -1, 0)$. Déterminer une droite $\mathbb{L}$ telle que $\mathbb{L} \cap \Pi = \mathbb{L} \cap \Pi' = \emptyset$ et $(1, 2, 0) \in \mathbb{L}$.

15. On dit que deux droites non-coplanaires $\mathbb{L}, \mathbb{L}' \subseteq \mathbb{R}^3$ sont **gauches** si elles ne sont pas parallèles. Soit $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ le plan donné par

$$\Pi = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 4y + 4z = 0\big\}$$

et soit $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^3$ la droite parallèle au vecteur $(0,1,2)$ et qui passe par le point $(1,-1,0)$. Trouver deux droites gauches $\mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ telles que $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset$ et $d(P,\Pi) = 3$, pour tout $P \in \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$.

16. On considère les plans

$$\begin{aligned}
\Pi &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 1\big\},\\
\Pi' &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 1\big\},\\
\Pi'' &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - 2z = 6\big\}.
\end{aligned}$$

Trouver tous les points $P \in \mathbb{R}^3$ tels que $P \in \Pi \cap \Pi'$ et $d(P,\Pi'') = 1/\sqrt{14}$.