MAT303

Premier Semestre — 2020-2021

Examen terminal - juin 2021

Justifier toutes les réponses!

1
2
3
4
5

1. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel.

(a) Donner la définition de norme sur $\mathbb{E}$.

(b) On suppose désormais que $(\mathbb{E}, N)$ est un espace normé. Rappeler la notion d'**ensemble fermé** $F \subseteq \mathbb{E}$ de $(\mathbb{E}, N)$ en termes d'ensembles ouverts et de suites.

(c) Montrer que la boule unité fermée $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, 1) = \{v \in \mathbb{E} : N(v) \leq 1\}$ est un ensemble fermé de $(\mathbb{E}, N)$.

(d) Montrer que toute partie séquentiellement compacte S de $(\mathbb{E}, N)$ est fermée.
Indication : L'espace vectoriel $\mathbb{E}$ n'est pas forcément de dimension finie !

(e) Soit $(\mathbb{E}', N')$ un espace normé et soit $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ une application. Rappeler la définition de **continuité** pour f en un point $x_0 \in \mathbb{E}$ ainsi que la notion de **continuité** (sur $\mathbb{E}$) pour f.

(f) Soit $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ une application continue en $x_0 \in \mathbb{E}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $f(\bar{B}_N(x_0, r)) \subseteq \mathbb{E}'$ est une partie bornée de $(\mathbb{E}', N')$.

Solution.

(a) Une norme est une application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(N1) pour tout $v \in \mathbb{E}$, $N(v) = 0$ implique $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$;

(N2) pour tout $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$;

(N3) pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

(b) On dit que U est **ouvert** (pour N) si, pour tout $v \in U$, il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(v, r) \subseteq U$. Un ensemble $F \subseteq \mathbb{E}$ est **fermé** (pour N) si $\mathbb{E} \setminus F$ est ouvert. En outre, S est fermé si et seulement la limite de toute suite convergente $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S apparient à S.

(c) On affirme que si $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, 1)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $w \in \mathbb{E}$, alors $w \in \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, 1)$. Comme $w_n \in \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, 1)$, $N(w_n) \leq 1$, ce qui nous dit que

$$N(w - v) \leq N(w - w_n) + N(w_n) \leq N(w - w_n) + 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve que $N(w) \leq 1$, *i.e.* $w \in \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, 1)$, comme on voulait montrer.

(*d*) On rappelle que S est **séquentiellement compact** (pour N) si toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S admet une sous-suite convergente dont la limite appartient à S. On va montrer que S est fermé. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $v \in \mathbb{E}$. Il suffit de montrer que la limite appartient à S. Comme S est compact, il existe une sous-suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$, dont la limite w appartient à S. Or, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ est convergente, toute sous-suite est aussi convergente et elle possède la même limite. Cela implique que $v = w \in S$, comme on voulait démontrer.

(*e*) On dit que f est **continue** en x_0 (pour N et N') si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $N(x - x_0) \leq \delta$ implique que $N'(f(x) - f(x_0)) \leq \varepsilon$. On dit que f est **continue** (sur $\mathbb{E}$, pour N et N') si elle est continue en v, pour tout $v \in \mathbb{E}$.

(*f*) Comme f est continue en x_0 (pour N et N'), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $N(x - x_0) \leq \delta$ implique que $N'(f(x) - f(x_0)) \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon = 1$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $N(x - x_0) \leq \delta$ implique que $N'(f(x) - f(x_0)) \leq 1$. On pose $r = \delta$. En conséquence, $N'(f(x)) \leq 1 + N'(f(x_0))$, pour tout $x \in \bar{B}_N(x_0, r)$, *i.e.* $N'(y) \leq 1 + N'(f(x_0))$, pour tout $y \in f(\bar{B}_N(x_0, r))$, ce qui implique que $f(\bar{B}_N(x_0, r))$ est borné.

2. Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé. On rappelle que, étant donné $A, B \subseteq \mathbb{E}$, on pose

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ et } b \in B\} \subseteq \mathbb{E}.$$

Soit $S \subseteq \mathbb{E}$ tel que $\bar{S} = \mathbb{E}$. Montrer que $S + B_N(x_0, r_0) = \mathbb{E}$, pour tous $x_0 \in \mathbb{E}$ et $r_0 > 0$.

Solution. Soient $x_0 \in \mathbb{E}$ et $r_0 > 0$. On va montrer que $S + B_N(x_0, r_0) = \mathbb{E}$. Comme $S + B_N(x_0, r_0) \subseteq \mathbb{E}$, il suffit de montrer l'inclusion $S + B_N(x_0, r_0) \supseteq \mathbb{E}$. Soit $v \in \mathbb{E}$. Il suffit de montrer qu'il existe $u \in S$ et $w \in B_N(x_0, r_0)$ tels que $v = u + w$. Pour cela, on remarque d'abord que $\bar{S} = \mathbb{E}$ nous dit que, étant donné $\epsilon > 0$, il existe $s' \in S$ tel que $N(v - x_0 - s') < \epsilon$. On pose $\epsilon = r_0$ et soit $u \in S$ tel que $N(v - x_0 - u) < r_0$, *i.e.* $v - u \in B_N(x_0, r_0)$. Cela implique que $v = u + (v - u)$, avec $u \in S$ et $w = v - u \in B_N(x_0, r_0)$, comme on voulait démontrer.

3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^3)e^x + x^3\cos(y)}{3x^2 + 5y^2}, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(*a*) Trouver la partie $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ formée des points de continuité de f.

(*b*) Trouver la partie $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ formée des points de différentiabilité de f.
Indication : Pour le point $(0, 0)$, utiliser le lien entre le gradient et les dérivées directionnelles.

Solution.

(a) Comme $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est un quotient de deux fonctions continues avec dénominateur non nul, vu que le numérateur et le dénominateurs sont des sommes, produits et compositions de fonctions continues, on conclut que $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est continue. En particulier, $\mathscr{C} \supseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En outre, on voit bien que

$$\left|\frac{\sin(xy^3)e^x + x^3\cos(y)}{3x^2+5y^2}\right| \leq \left|\frac{\sin(xy^3)e^x}{3x^2+5y^2}\right| + \left|\frac{x^3\cos(y)}{3x^2+5y^2}\right| \leq |xye^x| + |x\cos(y)|,$$

où l'on a utilisé que $|\sin(xy^3)| \leq |xy^3|$, $y^2 \leq 3x^2+5y^2$ et $x^2 \leq 3x^2+5y^2$. Cela nous dit que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

En conséquence, $\mathscr{C} = \mathbb{R}^2$.

(b) Comme $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est un quotient de deux fonctions différentiables avec dénominateur non nul, vu que le numérateur et le dénominateurs sont des sommes, produits et compositions de fonctions différentiables, on conclut que $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est différentiable. En particulier, $\mathscr{D} \supseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On affirme que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. En effet, si f était différentiable en $(0,0)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v\rangle, \tag{1}$$

pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ non nul, où $\langle\,,\rangle$ dénote le produit scalaire euclidien. Or, si $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ est non nul,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_x,tv_y)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t^4v_xv_y)e^{tv_x} + t^3v_x^3\cos(tv_y)}{t^3(3v_x^2+5v_y^2)}.$$

On note d'abord que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t^4v_xv_y)}{t^3}\frac{e^{tv_x}}{3v_x^2+5v_y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t^4v_xv_y)}{t^4}\lim_{t\to 0}\frac{te^{tv_x}}{3v_x^2+5v_y^2} = 0. \tag{2}$$

En effet, si $v_xv_y = 0$ le résultat est immédiat, et si $v_xv_y \neq 0$ on a utilisé que la limite de $\sin(x)/x$ est 1 lorsque x tend vers 0. En conséquence,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t^4v_xv_y)e^{tv_x} + t^3v_x^3\cos(tv_v)}{t^3(3v_x^2+5v_y^2)} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t^4v_xv_y)e^{tv_x}}{t^3(3v_x^2+5v_y^2)} + \lim_{t\to 0}\frac{t^3v_x^3\cos(tv_v)}{t^3(3v_x^2+5v_y^2)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{v_x^3\cos(tv_v)}{3v_x^2+5v_y^2} = \frac{v_x^3}{3v_x^2+5v_y^2}.\end{aligned} \tag{3}$$

où l'on a utilisé (2). En particulier, (3) nous dit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

i.e. $\nabla f(0,0) = (1/3, 0)$. Finalement, si l'on utilise (3), et (1) avec $v = (1,1)$, on trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{v_x^3}{(3v_x^2 + 5v_y^2)} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{3} = \langle (1/3,0),(1,1)\rangle = \langle \nabla f(0,0), v\rangle.$$

Cela nous dit que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ et $\mathscr{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux applications telles que $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, g est différentiable et $g(0,0) = 0$.

(a) Calculer $f(0,0)$ et $\nabla g(0,0)$.

(b) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et calculer $\nabla f(0,0)$.

Solution.

(a) Comme $0 \leq f(0,0) \leq g(0,0) = 0$, on voit bien que $f(0,0) = 0$. En outre,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{g(h,0)}{h} \geq 0 \text{ et } \lim_{h\to 0-} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{g(h,0)}{h} \leq 0$$

car $g(h,0) \geq 0$. Comme la dérivée partielle de g en $(0,0)$ selon x existe, on conclut que

$$0 \leq \lim_{h\to 0+} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} \leq 0,$$

ce qui nous dit que la dérivée partielle de g en $(0,0)$ selon x vaut zéro. Le même argument nous dit que la dérivée partielle de g en $(0,0)$ selon y vaut aussi zéro. En conséquence, $\nabla g(0,0) = (0,0)$.

(b) On voit bien que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{h^2 + k^2} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{h^2 + k^2}.$$

En outre,

$$0 \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{h^2 + k^2} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k)}{h^2 + k^2} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k) - g(0,0)}{h^2 + k^2} = 0.$$

Cela nous dit que f est différentiable en $(0,0)$ et $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

5. (a) Soient $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux applications, et soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que F est différentiable en (a,b) et que h est différentiable en $(c,d) = F(a,b)$. Calculer la différentielle de $h \circ F$ en (a,b) en termes de la différentielle de F en (a,b) et de la différentielle de h en (c,d).

(b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 dont le polynôme de Taylor d'ordre 2 en $(0,0)$ est

$$P(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $g_\alpha(x,y) = e^{f(x,y)} + \alpha f(x,y)^2 + \alpha^2 xy$.

(i) Montrer que g_α est de classe C^3 pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $(0,0)$ est un point critique de g_α pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) Déterminer la nature du point critique $(0,0)$ pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution.

(a) On rappelle que h est différentiable en (a,b) et $D(h \circ F)(a,b) = Dh(F(a,b)) \circ DF(a,b) = Dh(c,d) \circ DF(a,b)$.

(b) Noter d'abord que le polynôme de Taylor nous dit que $f(0,0) = 1$, $\nabla f(0,0) = (0,0)$ et

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Comme g_α est une somme de fonctions données par des produits et/ou des compositions des fonctions de classe C^3, elle est de classe C^3 pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) La règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$\nabla g_\alpha(x,y) = e^{f(x,y)} \nabla f(x,y) + 2\alpha f(x,y) \nabla f(x,y) + \alpha^2 (y,x),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $\nabla f(0,0) = (0,0)$, on conclut que $\nabla g_\alpha(0,0) = (0,0)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Cela nous dit que $(0,0)$ est un point critique de g_α pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) La règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$\begin{aligned} H_{g_\alpha}(x,y) = e^{f(x,y)} \left(H_f(x,y) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)^2 & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)^2 \end{pmatrix} \right) \\ + 2\alpha \left(f(x,y) H_f(x,y) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)^2 & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)^2 \end{pmatrix} \right) \\ + \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En conséquence,

$$H_{g_\alpha}(0,0) = \begin{pmatrix} -2\alpha - e & \alpha^2 + 4\alpha + 2e \\ \alpha^2 + 4\alpha + 2e & 4\alpha + 2e \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \det(H_{g_\alpha}(0,0)) &= -2(2\alpha + e)^2 - (\alpha^2 + 4\alpha + 2e)^2 \\ &= -2(2\alpha + e)^2 - ((\alpha + 2)^2 + 2(e-2))^2 < 0, \end{aligned}$$

car $e > 2$. On conclut que $(0,0)$ est un point-selle pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.