1
2

MAT303

Premier Semestre — 2019-2020

Examen terminal - juin 2020

Seulement les réponses dûment justifiées seront admises!

1. On considère $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ munis des normes euclidiennes. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^m$ un ensemble borné et soit $f : S \to \mathbb{R}^n$ une application dont l'image $\mathrm{Im}(f)$ est bornée. Montrer que f est continue (sur S) si et seulement si, pour tout ensemble compact $K \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe une partie compacte $F_K \subseteq \mathbb{R}^m$ telle que $f^{-1}(K) = F_K \cap S$.

Solution. Soient $S \subseteq \mathbb{R}^m$ une partie quelconque et $f : S \to \mathbb{R}^n$ une application. On rappelle que l'application f est continue (sur S) si et seulement si, pour tout fermé $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(Y)$ est un fermé (relatif) de S (voir Proposition 1.12.10). Vu qu'un ensemble $Z \subseteq S$ est un fermé (relatif) de S si et seulement s'il existe un fermé $Z' \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $Z' \cap S = Z$ (voir Proposition 1.9.5), on conclut que l'application $f : S \to \mathbb{R}^n$ est continue (sur S) si et seulement si, pour tout fermé $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe un fermé $X \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que $f^{-1}(Y) = X \cap S$.

On suppose désormais que $S \subseteq \mathbb{R}^m$ est un ensemble borné et que l'image $\mathrm{Im}(f)$ de l'application $f : S \to \mathbb{R}^n$ est bornée. Soit $R > 0$ tel que $S \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, R)$ et $\mathrm{Im}(f) \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, R)$, où $\bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}, R)$ est la boule fermé dans $\mathbb{R}^p$ de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$ et de rayon R (pour la norme euclidienne).

On suppose que f est continue (sur S) et on va démontrer la propriété dans l'énoncé. Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie compacte. En particulier, K est fermé (voir Proposition 1.11.6) et, par continuité de f, il existe $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ fermé tel que $f^{-1}(K) = Y \cap S$. Soit $F_K = \overline{Y \cap S}$. Noter que $Y \cap S \subseteq Y$ implique que $F_K = \overline{Y \cap S} \subseteq \bar{Y} = Y$, car Y est fermé. C'est clair que F_K est fermé (par définition) et, comme $Y \cap S \subseteq S \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, R)$, alors $F_K = \overline{Y \cap S} \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, R)$, *i.e.* F_K est fermé et borné, et donc compact (voir Corollaire 1.13.1). Or,

$$f^{-1}(K) = Y \cap S = \big(Y \cap S\big) \cap S \subseteq \big(\overline{Y \cap S}\big) \cap S = F_K \cap S \subseteq Y \cap S = f^{-1}(K)$$

nous dit que $f^{-1}(K) = F_K \cap S$, comme on voulait démontrer.

On suppose maintenant la propriété dans l'énoncé et on va démontrer que f est continue (sur S). Soit $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un fermé. On pose $K = Y \cap \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, R)$. Comme K est l'intersection de deux fermés, K est fermé aussi (voir Lemme 1.9.4), tandis que l'inclusion $K \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, R)$ nous dit que K est borné. En conséquence, K est compact (voir Corollaire 1.13.1). D'après la propriété dans l'énoncé, il existe $F_K \subseteq \mathbb{R}^m$ compact, et par conséquent fermé (voir Proposition 1.11.6), tel que $F_K \cap S = f^{-1}(K)$. Comme $K \subseteq Y$, $f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(Y)$. On affirme que $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(K)$. En effet, si $x \in f^{-1}(Y)$, *i.e.* $f(x) \in Y$, alors $f(x) \in Y \cap \mathrm{Im}(f) \subseteq Y \cap \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, R) = K$, *i.e.* $x \in f^{-1}(K)$. On conclut que

$$f^{-1}(Y) = f^{-1}(K) = F_K \cap S,$$

ce qui montre que f est continue (sur S).

2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\Big(\ln\big(|x|\big)\Big), & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la dérivée $f'(x_0)$ n'existe pas. Trouver un tel point x_0.

(b) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que la fonction f est k-lipschitzienne. Calculer

$$C = \min\big\{k \in \mathbb{R}_{>0} : f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\big\}.$$

Indication : Utiliser l'identité

$$\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \tag{1}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution.

(a) On voit bien que la fonction $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ est C^∞, car elle s'obtient comme le produit de la fonction $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et de la fonction $x \mapsto \cos(\ln(|x|))$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En effet, la première fonction est polynomiale, donc C^∞. La deuxième fonction est la composition de fonctions C^∞, car la fonction $x \mapsto |x|$ est C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ce qui nous dit que l'application $x \mapsto \cos(\ln(|x|))$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est C^∞. En conséquence, f est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On voit bien que

$$f'(x) = \cos\Big(\ln\big(|x|\big)\Big) - \sin\Big(\ln\big(|x|\big)\Big) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\big(|x|\big)\right), \tag{2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, puisque la dérivée de $x \mapsto \ln(|x|)$ en $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est $1/x$, et on a utilisé (1) dans la dernière égalité.

On affirme que $f'(0)$ n'existe pas. Or,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cos\Big(\ln\big(|h|\big)\Big)}{h} = \lim_{h\to 0} \cos\Big(\ln\big(|h|\big)\Big).$$

Cette dernière limite n'existe pas car, si l'on prend les suites

$$h_n = e^{-\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)} \text{ et } h'_n = e^{-2\pi n},$$

pour $n \in \mathbb{N}$, on voit bien que h_n et h'_n tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, mais

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\Big(\ln\big(|h_n|\big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(-\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\Big(\ln\big(|h'_n|\big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \cos\big(-2\pi n\big) = \lim_{n\to+\infty} \cos\big(2\pi n\big) = 1.$$

(*b*) On va montrer maintenant que f est lipschitzienne, *i.e.* il existe $k > 0$ tel que

$$\big|f(x)-f(y)\big| \leq k|x-y|, \tag{k-Lip}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On va aussi déterminer la valeur minimale C de k telle que (k-Lip) soit vérifiée.

On note d'abord que

$$\big|f'(x)\big| = \left|\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\big(|x|\big)\right)\right| \leq \sqrt{2}, \tag{3}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, où l'on a utilisé (2) et que $|\sin(\alpha)| \leq 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, (2) nous dit que $f'(e^{-\pi/4}) = \sqrt{2}$. Cela implique que, si f est k-lipschitzienne, alors $k \geq \sqrt{2}$. En effet, si (k-Lip) est vérifiée, on voit bien que

$$\frac{\big|f(x)-f(e^{-\pi/4})\big|}{|x-e^{-\pi/4}|} \leq k,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $x \neq e^{-\pi/4}$. Si l'on prend la limite quand x tend vers $e^{-\pi/4}$, on trouve que $\sqrt{2} = |f'(e^{-\pi/4})| \leq k$, comme on voulait démontrer.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit $I_{x,y} = [\min(x,y), \max(x,y)] \subseteq \mathbb{R}$. D'après le Théorème des accroissements finis on voit que

$$\big|f(x)-f(y)\big| \leq \sup_{z \in I_{x,y}} \big|f'(z)\big|.|x-y| \leq \sqrt{2}|x-y| \tag{4}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x.y > 0$. On a utilisé ici (3) et que, si $x.y > 0$, alors $0 \notin I_{x,y}$, ce qui implique que $f|_{I_{x,y}}$ est différentiable.

En outre,

$$\big|f(x)-f(0)\big| = \big|f(x)\big| = \left|x\cos\Big(\ln\big(|x|\big)\Big)\right| \leq |x| = |x-0| \leq \sqrt{2}|x|, \tag{5}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, car $|\cos(\alpha)| \leq 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Finalement, on voit bien que

$$\begin{aligned}\big|f(x)-f(y)\big| &= \big|f(x)-f(0)+f(0)-f(y)\big| \leq \big|f(x)-f(0)\big| + \big|f(0)-f(y)\big| \\ &\leq |x|+|y| = |x-y| \leq \sqrt{2}|x-y|,\end{aligned} \tag{6}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x.y < 0$, où on a utilisé (5) et que $|x|+|y| = -x+y = |x-y|$ si $x < 0 < y$ et $|x|+|y| = x-y = |x-y|$ si $y < 0 < x$.

Les inégalités (4), (5) et (6) nous disent que f est une fonction $\sqrt{2}$-lipschitzienne (*i.e.* elle satisfait (k-Lip) pour $k = \sqrt{2}$). En outre, on a démontré que si f est k-lipschitzienne avec $k > 0$, alors $k \geq \sqrt{2}$. Cela nous dit que $C = \sqrt{2}$ est la valeur minimale de la constante k dans la définition de fonction k-lipschitzienne pour f, comme on voulait démontrer.