1	
2	
3	
4	
5	
6	

MAT303

Premier Semestre — 2020-2021

Examen terminal - janvier 2021

Le barème est seulement indicatif.

Justifier toutes les réponses!

6pt **1.** Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie.

(a) Donner la définition de **suite** à valeurs dans S, ainsi que de **sous-suite** d'une suite.

(b) Donner la définition de **norme** sur $\mathbb{E}$.

(c) On suppose désormais que $\mathbb{E}$ est muni d'une norme N. Montrer que

$$\left|N(v)-N(w)\right| \leq N(v-w)$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$.

(d) Donner la définition de **suite convergente**, de **suite de Cauchy** et de **suite bornée** dans $(\mathbb{E}, N)$.

(e) Donner la définition d'être **fermé** pour S en termes de suites à valeurs dans S.

(f) Donner la définition de **compacité** de S.
Indication : fermé et borné n'est pas juste !

(g) Démontrer que tout ensemble **compact** est **fermé**.

Solution.

(a) Un suite à valeurs dans S est une application $v : \mathbb{N} \to S$ de la forme $n \mapsto v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, que l'on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une sous-suite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ est une suite obtenue comme la composition d'une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $v : \mathbb{N} \to S$, que l'on écrit $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Une norme est une application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(N1) pour tout $v \in \mathbb{E}$, $N(v) = 0$ implique $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$;

(N2) pour tout $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$;

(N3) pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, $N(v+w) \leq N(v) + N(w)$.

(c) On remarque d'abord que $N(u) = N(-u)$ pour tout $u \in \mathbb{E}$, d'après (N2) pour $\lambda = -1$. D'après l'inégalité triangulaire (N3) on a que

$$N(v) = N(v-w+w) \leq N(v-w) + N(w)$$

et

$$N(w) = N(w-v+v) \leq N(w-v) + N(v) = N(v-w) + N(v),$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, où l'on a utilisé que $N(w-v) = N(v-w)$. Les inégalités précédentes sont équivalentes à

$$N(v) - N(w) \leq N(v-w) \text{ et } N(w) - N(v) \leq N(v-w),$$

respectivement, ce qui implique que

$$\left|N(v) - N(w)\right| \leq N(v-w)$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, où l'on a utilisé que $x \geq y$ et $x \geq -y$ impliquent que $x \geq |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(*d*) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{E}$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

(S1) convergente (pour N) s'il existe $v \in \mathbb{E}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N(v - v_n) < \varepsilon$;

(S2) de Cauchy (pour N) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N(v_n - v_m) < \varepsilon$;

(S3) bornée (pour N) s'il existe $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $N(v_n) < C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(*e*) Soit $S \subseteq \mathbb{E}$. On rappelle que S est fermé si et seulement si, étant donné une suite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$, sa limite appartient à S.

(*f*) On dit que S est (séquentiellement) compact (pour N) si toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S admet une sous-suite convergente dont la limite appartient à S.

(*g*) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente et soit $v \in \mathbb{E}$ sa limite. Il suffit de montrer que $v \in S$. Comme S est compact la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dont la limite appartient à S. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa sous-suite $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi et sa limite coïncide avec la limite v de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme la limite de $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à S, $v \in S$, comme on voulait démontrer.

5pt **2.** Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé, $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une partie compacte non vide et $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie fermée non vide. On définit

$$K.S = \left\{u \in \mathbb{E} : \text{ il existe } \lambda \in K \text{ et } v \in S \text{ tels que } u = \lambda.v\right\} \subseteq \mathbb{E}.$$

Prouver que $K.S$ est une partie **fermée** de $\mathbb{E}$.

Solution. Soit $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (K.S)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans $K.S$, avec limite $w \in \mathbb{E}$. On va montrer que $w \in K.S$. Comme $w_n \in K.S$, il existe $\lambda_n \in K$ et $v_n \in S$ tels que $w_n = \lambda_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme K est compact, la suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente $\{\lambda_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ avec limite $\lambda \in K$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Noter que $\lambda \neq 0$, car $0 \notin K$. Comme $v_{\phi(n)} = w_{\phi(n)}/\lambda_{\phi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\{v_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, car $\{w_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec limite w et $\{\lambda_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec limite non nulle λ. En plus, la limite de la suite $\{v_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} v_{\phi(n)} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} w_{\phi(n)}}{\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{\phi(n)}} = \frac{w}{\lambda}.$$

Comme S est fermé, $w/\lambda \in S$, ce qui implique que $w = \lambda.(w/\lambda) \in K.S$, comme on voulait démontrer.

1pt **3.** (a) Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{E}', N')$ deux espaces vectoriels réels normés, et $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ une application. Donner la définition de **continuité** et de **continuité uniforme** de f.

[bonus] (b) On considère $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0.$$

Montrer que f est **uniformément continue**.

Solution.

(a) On rappelle que $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est continue en $v \in \mathbb{E}$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $w \in \mathbb{E}$, la condition $N(w - v) < \delta$ implique $N'(f(w) - f(v)) < \epsilon$. On dit que f est continue sur $\mathbb{E}$ si f est continue en v, pour tout $v \in \mathbb{E}$.

Par ailleurs, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, la condition $N(w - v) < \delta$ implique $N'(f(w) - f(v)) < \epsilon$.

(b) Soit $\epsilon > 0$. Comme

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0,$$

il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq \epsilon/2$ si $|x| > C$. Comme $[-C, C]$ est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, il est compact. Cela implique que $f|_{[-C,C]}$ est uniformément continue, vu que toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. En particulier, il existe $\delta_C > 0$ tel que, si $x, x' \in [-C, C]$ satisfont que $|x - x'| \leq \delta_C$ alors $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$. On considère l'intervalle $K = [-C - \delta_C, C + \delta_C]$ de $\mathbb{R}$. Comme K est fermé et borné, il est compact, ce qui nous dit que $f|_K$ est uniformément continue. Il existe alors $\delta' > 0$ tel que, si $x, x' \in K$ satisfont que $|x - x'| \leq \delta'$ alors $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$.

On pose $\delta = \min(\delta', \delta_C) > 0$. Soient $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $|x - x'| \leq \delta$. On affirme que $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$. Si $x, x' \in [-C, C]$, comme $|x - x'| \leq \delta \leq \delta_C$, on voit que $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$. Si $x, x' \in \mathbb{R} \setminus [-C, C]$, alors

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x)| + |f(x')| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

On suppose finalement $x \in [-C, C]$ et $x' \in \mathbb{R} \setminus [-C, C]$, ou $x' \in [-C, C]$ et $x \in \mathbb{R} \setminus [-C, C]$. Comme les deux cas sont symétriques, on peut supposer sans perte de généralité que $x \in [-C, C]$ et $x' \in \mathbb{R} \setminus [-C, C]$. L'inégalité $|x - x'| \leq \delta \leq \delta_C$ nous dit que

$$|x'| = |x' - x + x| \leq |x' - x| + |x| \leq \delta_C + C.$$

En outre, $|x| \leq C \leq C + \delta_C$, ce qui implique que $x, x' \in K$. Comme $|x - x'| \leq \delta \leq \delta'$, on obtient alors que alors $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$. Dans tous les cas on trouve que $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$, comme on voulait démontrer.

4pt **4.** (a) Montrer que

$$\lim_{s\to 0} \frac{1-\cos(s)}{s^2} = \frac{1}{2}$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par $1+\cos(s)$.

(b) Déterminer si la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\Big(1-\cos\big((x+2)y^2\big)\Big)}{x^2+y^4} \tag{1}$$

existe et calculer sa valeur si elle existe.

Solution.

(a) On voit bien que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} \frac{1-\cos(s)}{s^2} &= \lim_{s\to 0} \frac{\big(1-\cos(s)\big)\big(1+\cos(s)\big)}{s^2\big(1+\cos(s)\big)} = \lim_{s\to 0} \frac{1-\cos^2(s)}{s^2\big(1+\cos(s)\big)} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\sin^2(s)}{s^2} \frac{1}{1+\cos(s)} = \left(\lim_{s\to 0} \frac{\sin(s)}{s}\right)^2 \left(\lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\cos(s)}\right) \\ &= 1^2 . \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que

$$\lim_{s\to 0} \frac{\sin(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\sin(s)-\sin(0)}{s} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

(b) L'item précédent nous dit que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\big((x+2)y^2\big)}{(x+2)^2y^4} = \frac{1}{2},$$

vu que $s=(x+2)y^2$ tend vers zéro quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Par ailleurs, on remarque que

$$0 \leq \left| \frac{x(x+2)^2y^4}{x^2+y^4} \right| \leq |x|(x+2)^2$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, où l'on a utilisé que $y^4 \leq x^2+y^4$. Comme $|x|(x+2)^2$ tend vers zéro quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on conclut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x+2)^2y^4}{x^2+y^4} = 0.$$

Cela nous dit que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\Big(1-\cos\big((x+2)y^2\big)\Big)}{x^2+y^4} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x+2)^2y^4}{x^2+y^4}\frac{1-\cos\big((x+2)y^2\big)}{(x+2)^2y^4} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x+2)^2y^4}{x^2+y^4}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\big((x+2)y^2\big)}{(x+2)^2y^4} \\
&= 0.\frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

4pt **5.** (*a*) Énoncer le règle de dérivation en chaîne pour la composition $H = G \circ F$ des fonctions différentiables F et G.

(*b*) Soient $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des applications différentiables. On considère les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$F(x,y) = \big(f(x,y), g(x,y)\big) \text{ et } k(x,y) = h\big(F(x,y)\big)$$

pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quelle relation en découle entre $\nabla k(p)$, $J_F(p)$, $\nabla h(q)$ quand p et q sont des points de $\mathbb{R}^2$ tels que $q = (f(p), g(p))$?

(*c*) On suppose maintenant que les fonctions f, g, h et k satisfont les relations suivantes :

(F.1) $f(1,2) = 2$, $g(1,2) = 3$, $\nabla f(1,2) = (10,5)$, $\nabla h(2,3) = (4,1)$ et

$$\frac{\partial g}{\partial w}(1,2) = 1 - 2\sqrt{2}$$

pour $w = (1, 2\sqrt{2})/3$;

(F.2) si $v = (1,1)/\sqrt{2}$ alors

$$\frac{\partial k}{\partial v}(1,2) = \frac{60}{\sqrt{2}}.$$

Calculer $\nabla g(1,2)$.

Solution.

(*a*) Le théorème de différentiation de compositions de fonctions nous dit que H est différentiable en tout point $x \in \mathrm{Dom}(F)$ et que

$$J_H(x) = J_G(F(x)) \cdot J_F(x),$$

pour tout $x \in \mathrm{Dom}(F)$.

(*b*) Pour fixer la notation on notera (x, y) les variables des arguments de f et g, et (u, v) les variables de l'argument de h. On remarque d'abord que le théorème de différentiation de compositions de fonctions nous dit que k est une fonction différentiable, car f, g et h le sont. En plus,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial k}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u}(f(x,y),g(x,y)) & \frac{\partial h}{\partial v}(f(x,y),g(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(*c*) En particulier, si $(x, y) = (1, 2)$ on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial k}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial k}{\partial y}(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u}(2,3) & \frac{\partial h}{\partial v}(2,3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) \end{pmatrix}.$$

D'après l'énoncé, cela nous donne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial k}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial k}{\partial y}(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) \end{pmatrix}.$$

Cela nous dit que

$$\frac{\partial k}{\partial x}(1,2) = 40 + \frac{\partial g}{\partial x}(1,2) \text{ et } \frac{\partial k}{\partial y}(1,2) = 20 + \frac{\partial g}{\partial y}(1,2). \tag{2}$$

Par ailleurs, la condition (F.2) est équivalente à

$$\frac{60}{\sqrt{2}} = \frac{\partial k}{\partial v}(1,2) = \frac{\frac{\partial k}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial k}{\partial y}(1,2)}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

En employant (2), l'équation (3) devient

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = 0. \tag{4}$$

D'ailleurs, la condition sur la dérivée directionnelle dans (F.1) est équivalente à

$$1 - 2\sqrt{2} = \frac{\partial g}{\partial w}(1,2) = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) + 2\sqrt{2}\frac{\partial g}{\partial y}(1,2)}{3},$$

i.e.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) + 2\sqrt{2}\frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = 3(1 - 2\sqrt{2}). \tag{5}$$

La solution au système linéaire donné par (4) et (5) est immédiate :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 3 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = -3.$$

En conséquence, $\nabla g(1, 2) = (3, -3)$.

3pt **6.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x,y) = e^{xy-1} - (x^2+y^2)/2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Justifier que la fonction est de classe C^3.

(b) Trouver les **points critiques** de f.

(c) Déterminer la nature des points critiques non dégénérés.

Solution.

(a) La fonction est de classe C^∞ car elle est obtenue comme composition, somme et produit de fonctions de classe C^∞. En particulier, elle est de classe C^3.

(b) On voit bien que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy-1} - x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy-1} - y,$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En conséquence, les points critiques (x,y) de f sont donnés par les identités

$$x = ye^{xy-1} \text{ et } y = xe^{xy-1}. \tag{6}$$

En particulier, $(0,0)$ est clairement un point critique. Par ailleurs, on voit bien que $x = 0$ si et seulement $y = 0$ dans les équations précédentes. On suppose alors que x et y sont non nuls. Dans ce cas, (6) impliquent $1 = e^{2(xy-1)}$, qui équivaut à $xy = 1$. Si l'on impose cette condition sur (6), on trouve aussi $x = y$. En conséquence, l'ensemble de points critiques de f est

$$\{(0,0)\} \cup \{(x,x) : x \in \{-1,1\}\}.$$

(c) On voit que

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy-1} - 1 & e^{xy-1}(1+xy) \\ e^{xy-1}(1+xy) & x^2e^{xy-1} - 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

En particulier,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & e^{-1} \\ e^{-1} & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Comme $\det(H_f(0,0)) = 1 - e^{-2} \neq 0$, $(0,0)$ est un points critique non dégénéré. Plus précisément, comme $\det(H_f(0,0)) = 1 - e^{-2} > 0$ et le premier élément dans la diagonale de $H_f(0,0)$ est négatif, $(0,0)$ est un maximum local strict de f.

Si $x \in \{-1,1\}$, alors

$$H_f(x,x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

et dans ce cas

$$\det(H_f(x,x)) = -4 < 0.$$

On conclut que $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont des points critiques non dégénérés de f et en plus ils sont des points cols de f.