MAT303

Premier Semestre — 2019-2020

Examen terminal - janvier 2020

Justifier toutes les réponses!

1
2
3
4
5
6

1. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel.

(a) Donner la définition de **norme** sur $\mathbb{E}$.

(b) On suppose désormais que $\mathbb{E}$ est muni d'une norme N. Donner la définition d'ensemble **ouvert**, d'ensemble **fermé** et d'ensemble **borné** dans $(\mathbb{E}, N)$.

(c) Soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Rappeler la définition d'**adhérence** $\bar{S}$, d'**intérieur** S° et de **frontière** ∂S.

Solution.

(a) Une norme est une application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(N1) pour tout $v \in \mathbb{E}$, $N(v) = 0$ implique $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$;

(N2) pour tout $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$;

(N3) pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

(b) Soit $S \subseteq \mathbb{E}$. Un ensemble $S \subseteq \mathbb{E}$ est ouvert par rapport à la norme N si pour tout $v \in S$ il existe $r > 0$ tel que $B_N(v, r) = \{w \in \mathbb{E} : N(w - v) < r\} \subseteq S$. On dit que S est fermé par rapport à la norme N si $\mathbb{E} \setminus S$ est ouvert. Finalement, un ensemble $S \subseteq \mathbb{E}$ est borné par rapport à la norme N s'il existe $C > 0$ tel que $N(v) \leq C$ pour tout $v \in S$.

(c) On rappelle que l'adhérence $\bar{S}$ de S est

$$\bar{S} = \bigcap_{\substack{F \supseteq S \\ F \text{fermé}}} F = \left\{w \in \mathbb{E} : \text{ pour tout } r > 0, B_N(v, r) \cap S \neq \emptyset\right\}.$$

L'intérieur S° de S est

$$S^\circ = \bigcup_{\substack{U \subseteq S \\ U \text{ouvert}}} U = \left\{w \in \mathbb{E} : \text{ il existe } r > 0, B_N(v, r) \subseteq S\right\}.$$

Finalement, $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$.

2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme N. Soient $S, U \subseteq \mathbb{R}^n$ deux parties telles que $\bar{S} = \bar{U}$. On suppose en plus que U est **ouvert**. Montrer que $\overline{S \cap U} = \bar{S}$.

Solution. La définition d'adhérence nous dit que $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^n$ implique que $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$. En conséquence, $S \cap U \subseteq S$ nous donne que $\overline{S \cap U} \subseteq \bar{S}$. Il suffit de démontrer que $\overline{S \cap U} \supseteq \bar{S}$. Soit $v \in \bar{S}$. On va démontrer que $v \in \overline{S \cap U}$. Comme $\bar{S} = \bar{U}$, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ tel que $N(v - u_n) \leq 2^{-n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in U$, il existe $r_n > 0$ tel que $B_N(u_n, r_n) \subseteq U \subseteq \bar{U} = \bar{S}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sans perte de généralité, on peut choisir $r_n < 2^{-n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La condition $u_n \in \bar{S}$ implique qu'il existe $s_n \in S$ tel que $N(u_n - s_n) < r_n$, *i.e.* $s_n \in B_N(u_n, r_n) \subseteq U$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En conséquence, $s_n \in S \cap U$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On affirme que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (S \cap U)^{\mathbb{N}}$ converge vers v quand n tend vers $+\infty$. En effet, comme

$$N(v - s_n) \leq N(v - u_n) + N(u_n - s_n) \leq 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-(n-1)},$$

on conclut que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (S \cap U)^{\mathbb{N}}$ converge vers v quand n tend vers $+\infty$. Cela nous dit que $v \in \overline{S \cap U}$, comme on voulait démontrer.

3. (*a*) Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{E}', N')$ deux espaces vectoriels réels normés, $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie et $f : S \to \mathbb{E}'$ une application. Donner la définition de **continuité** de f sur S.

(*b*) On considère $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. Soit $S \subseteq \mathbb{R}$ une partie qui satisfait que l'image $\mathrm{Im}(f)$ de toute application continue $f : S \to \mathbb{R}$ soit bornée. Montrer que S est **compact**.

Solution.

(*a*) On rappelle que $f : S \to \mathbb{E}'$ est continue en $v \in S$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $w \in S$, la condition $N(w - v) < \delta$ implique $N'(f(w) - f(v)) < \epsilon$. On dit que f est continue sur S si f est continue en v, pour tout $v \in S$.

(*b*) On remarque que $S \subseteq \mathbb{R}$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné. On va montrer la contraposée : si S n'est pas compact, alors il existe une application continue $f : S \to \mathbb{R}$ dont l'image $\mathrm{Im}(f)$ est non bornée. Or, S n'étant pas compact, il est non borné ou non fermé. Si S es non borné, soit $f : S \to \mathbb{R}$ l'inclusion de S dans $\mathbb{R}$, *i.e.* $f(x) = x$, pour tout $x \in S$. C'est clair que f est continue et $\mathrm{Im}(f) = S$ est non borné. Si S est non fermé, soit $s \in \bar{S} \setminus S$. On considère la fonction $g : S \to \mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto 1/|x - s|$, pour tout $x \in S$. C'est clair que g est continue, car c'est le quotient de fonctions continues avec dénominateur nulle part nul. Comme $s \in \bar{S}$, il existe une suite convergente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ dont la limite est s. En conséquence, la suite $(g(s_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Im}(g)^{\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, ce qui nous dit que $\mathrm{Im}(g)$ n'est pas borné.

4. Déterminer si la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \tag{1}$$

existe.

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la courbe $x = ay^2$. On voit bien que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=ay^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{ay^4}{a^2y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{a}{a^2+1} = \frac{a}{a^2+1}. \tag{2}$$

Si $a = 0$, la limite (2) donne zéro, et si $a = 1$, la limite (2) donne $1/2$. Cela nous dit que la limite double (1) n'existe pas.

5. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R}_{\geq a} \to \mathbb{R}$ une fonction **dérivable** sur $\mathbb{R}_{>a}$. On suppose en plus que f est **lipschitzienne**, *i.e.* il existe $C > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{\geq a}$. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $|f'(x)| \leq K$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>a}$.

(b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x^3)/x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, n'est pas lipschitzienne.

Solution.

(a) On pose $K = C$. On voit bien que

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left|\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} \leq \lim_{h\to 0} \frac{C|h|}{|h|} = C, \end{aligned} \tag{3}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{>a}$. En conséquence, $|f'(x)| \leq K = C$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>a}$.

(b) On voit bien que f est dérivable sur sur $\mathbb{R}_{>1}$, car $\sin(x^3)$ et x sont dérivables sur $\mathbb{R}_{>1}$ et la dernière fonction n'est nulle part nulle. En plus,

$$f'(x) = 3x\cos(x^3) - \frac{\sin(x^3)}{x^2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{>1}$. On remarque d'abord que

$$f'(x) = 3x\cos(x^3) - \frac{\sin(x^3)}{x^2} \geq 3x\cos(x^3) - 1, \tag{4}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{>1}$. En effet, comme $x > 1$ et $\sin(\alpha) \leq 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on trouve que

$$\sin(x^3) \leq 1 \leq x,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, ce qui implique que $\sin(x^3)/x^2 \leq 1$ et (4).

On considère finalement la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_{>1})^{\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \sqrt[3]{2(n+1)\pi}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Noter que $x_n = \sqrt[3]{2(n+1)\pi} \geq \sqrt[3]{2\pi} > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En plus, x_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Or, (4) nous dit que

$$f'(x_n) = 3x_n\cos(x_n^3) - \frac{\sin(x_n^3)}{x_n^2} \geq 3x_n\cos(x_n^3) - 1 = 3x_n - 1.$$

Comme x_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on conclut que $f'(x_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Cela implique qu'il n'existe aucun $K > 0$ tel que $|f'(x)| \leq K$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>1}$. D'après l'item précédent, f n'est pas lipschitzienne.

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = \frac{x+y^2}{2+x^2+y^4},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que f est de classe C^3.

(b) Calculer les **points critiques** de f et déterminer leur nature locale.

(c) La fonction f admet-elle des **extrema globaux** ? Si c'est le cas, les déterminer.

Solution.

(a) La fonction g est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^2$ puisque elle est le quotient de deux polynômes, *a fortiori* C^∞, dont le dénominateur n'est nulle part nul.

(b) On voit bien que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2-2xy^2+y^4+2}{(2+x^2+y^4)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(x^2-2xy^2-y^4+2)}{(2+x^2+y^4)^2},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Cela nous dit que les points critiques de f sont données par les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui satisfont

$$-x^2-2xy^2+y^4+2=0 \text{ et } 2y(x^2-2xy^2-y^4+2)=0. \tag{5}$$

Si $y=0$, la dernière équation est vérifiée, tandis que la première équation nous donne $x^2=2$, *i.e.* $x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{2}$.

Si $y \neq 0$, la dernière equation dans (5) est équivalente à $x^2-2xy^2-y^4+2=0$. La somme de cette équation avec la première équation dans (5) est $-4xy^2+4=0$, *i.e.* $xy^2=1$. Si l'on remplace $y^2=1/x$ dans la première équation dans (5) on trouve $-x^2+1/x^2=0$, *i.e.* $x^4=1$. Cela donne $x=-1$ et $x=1$. Par contre, si $x=-1$, comme $xy^2=1$, on aurait que $-y^2=1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $x=1$. L'identité $xy^2=1$, nous dit que $y=-1$ ou $y=1$. En plus, c'est facile à vérifier que $(1,-1)$ et $(1,1)$ sont des points critiques de f. En conséquence, les points critiques de f sont $(-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},0)$, $(1,-1)$ et $(1,1)$.

De façon analogue, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(x^3+3x^2y^2-3xy^4-6x-y^6-2y^2)}{(2+x^2+y^4)^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{4y(x^3-3x^2y^2-3xy^4+2x+y^6+2y^2)}{(2+x^2+y^4)^3}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$
$$= \frac{2(x^4 - 6x^3y^2 + 4x^2 - 12x^2y^4 + 10xy^6 - 12xy^2 + 3y^8 - 24y^4 + 4)}{(2+x^2+y^4)^3},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En particulier, comme

$$H_f(\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{2}/8 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

le critère de la matrice hessienne nous dit que $(-\sqrt{2},0)$ est un minimum local de f et que $(\sqrt{2},0)$ est un point-selle. Finalement, comme

$$H_f(1,\pm 1) = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

le critère de la matrice hessienne nous dit que $(1,\pm 1)$ est un maximum local de f.

(c) On remarque d'abord que $f(-\sqrt{2},0) = -\sqrt{2}/4$ et que $f(1,\pm 1) = 1/2$. On affirme que

$$\frac{x+y^2}{2+x^2+y^4} \leq \frac{1}{2} = f(1,\pm 1), \tag{6}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En effet, l'inégalité précédente équivaut à

$$2x + 2y^2 \leq 2 + x^2 + y^4,$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, qui est équivalente à

$$0 \leq (1 - 2x + x^2) + (1 - 2y^2 + y^4) = (1-x)^2 + (1-y^2)^2,$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme la dernière inégalité est évidente, (6) est vérifiée aussi. Cela nous dit que $(1,\pm 1)$ sont des maxima globaux de f.

Finalement,

$$\frac{x+y^2}{2+x^2+y^4} \geq -\frac{\sqrt{2}}{4} = f(-\sqrt{2},0), \tag{7}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En effet, l'inégalité précédente équivaut à

$$2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y^2 \geq -2 - x^2 - y^4,$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, qui est équivalente à

$$(\sqrt{2}+x)^2 + 2\sqrt{2}y^2 + y^4 = (2 + 2\sqrt{2}x + x^2) + (2\sqrt{2}y^2 + y^4) \geq 0,$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme la dernière inégalité est évidente, (7) est vérifiée aussi. Cela nous dit que $(-\sqrt{2},0)$ est le minimum global de f.