1
2
3

MAT303

Premier Semestre — 2018-2019

Examen terminal - juin 2019

Justifier toutes les réponses!

---

1. (*a*) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel.

(i) Donner la définition de norme sur $\mathbb{E}$.

(ii) On rappelle qu'un ensemble $S \subseteq \mathbb{E}$ est **convexe** si, pour tous $v, w \in S$ et pour tout $t \in [0,1]$, $tv + (1-t)w \in S$. Montrer que si N est une norme sur $\mathbb{E}$, alors la boule unité ouverte $B_N(1) = \{v \in \mathbb{E} : N(v) < 1\}$ est convexe.

(iii) Pour une partie $S \subseteq \mathbb{E}$, on définit

$$-S = \left\{w \in \mathbb{E} : \exists v \in S \text{ tel que } w = -v\right\}.$$

On dit que $S \subseteq \mathbb{E}$ est **symétrique** si $S = -S$. Montrer que si S est convexe, non-vide et symétrique, alors $\mathbf{0}_{\mathbb{E}} \in S$, où $\mathbf{0}_{\mathbb{E}}$ est l'élément neutre de $\mathbb{E}$.

(iv) Montrer si N est une norme sur $\mathbb{E}$, alors $B_N(1)$ est symétrique.

(*b*) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel muni d'une norme N.

(i) Donner la définition d'ensemble **ouvert** et d'ensemble **borné** dans l'espace normé $(\mathbb{E}, N)$.

(ii) Soit $N' : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une norme équivalente à N. Montrer que $B_{N'}(1)$ est un ensemble ouvert et borné dans $(\mathbb{E}, N)$.

(*c*) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une norme N et soit $U \subseteq \mathbb{E}$ un ensemble borné, convexe, non-vide, symétrique et ouvert dans $(\mathbb{E}, N)$. On définit $\mathbf{N}_U : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ via

$$\mathbf{N}_U(v) = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \lambda^{-1} v \in U\right\},$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$. Le but de cette partie est de démontrer que l'application $U \mapsto \mathbf{N}_U$ est une bijection de l'ensemble de parties bornées, convexes, non-vides, symétriques et ouvertes de $(\mathbb{E}, N)$ dans l'ensemble formé de toutes les normes sur $\mathbb{E}$.

(i) Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{E}$, $\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \lambda^{-1} v \in U\} \neq \emptyset$.

(ii) Montrer que $\mathbf{N}_U(\lambda v) = |\lambda| \mathbf{N}_U(v)$, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{E}$.

(iii) Soient $v, w \in \mathbb{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\lambda^{-1} v \in U$ et $\mu^{-1} w \in U$. Montrer que $(\lambda + \mu)^{-1}(v + w) \in U$. Utiliser ce résultat pour montrer que $\mathbf{N}_U$ satisfait l'inégalité triangulaire.

(iv) Montrer finalement que $\mathbf{N}_U$ est une norme sur $\mathbb{E}$.

(v) Les normes $\mathbf{N}_U$ et N ne coïncident pas en général, mais elles satisfont une autre relation légèrement plus faible. Laquelle ?

(vi) On pose $V = B_{\mathbf{N}_U}(1)$. Montrer que $V = U$.
Indication : Utiliser la définition de V et la convexité de U pour montrer $V \subseteq U$. Montrer après $U \subseteq V$ à partir de la définition de V et le fait que U soit ouvert.

(vii) Soit N' une norme sur $\mathbb{E}$ et soit $U' = B_{N'}(1)$. Montrer que l'ensemble U' est borné, convexe, non-vide, symétrique et ouvert dans $(\mathbb{E}, N)$. Montrer que $\mathbf{N}_{U'} = N'$. Conclure.

Solution.

(a) (i) Une norme est une application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(N1) pour tout $v \in \mathbb{E}$, $N(v) = 0$ implique $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$;

(N2) pour tout $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$;

(N3) pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

(ii) Soient $v, w \in B_N(1)$, *i.e.* $N(v) < 1$ et $N(w) < 1$, et soit $t \in [0, 1]$. Alors,

$$N\big(tv+(1-t)w\big) \leq N\big(tv\big)+N\big((1-t)w\big) = tN(v)+(1-t)N(w) < t+1-t = 1,$$

i.e. $tv + (1-t)w \in B_N(1)$.

(iii) Soit $S \subseteq \mathbb{E}$ convexe, non-vide et symétrique. Comme $S \neq \emptyset$, il existe $v \in S$. Comme S est symétrique, $-v \in S$. Finalement, comme S est convexe,

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(-v) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}} \in S.$$

(iv) Soit $v \in B_N(1)$, *i.e.* $N(v) < 1$. Alors, $N(-v) = N(v) < 1$, *i.e.* $-v \in B_N(1)$, ce qui nous dit que $B_N(1)$ est symétrique.

(b) (i) Un ensemble $S \subseteq \mathbb{E}$ est ouvert par rapport à la norme N si pour tout $v \in S$ il existe $r > 0$ tel que $B_N(v, r) = \{w \in \mathbb{E} : N(w - v) < r\} \subseteq S$. Un ensemble $S \subseteq \mathbb{E}$ est borné par rapport à la norme N s'il existe $C > 0$ tel que $N(v) \leq C$ pour tout $v \in S$.

(ii) Comme N et N' sont équivalentes, il existe $C > C' > 0$ tels que $C'N'(v) \leq N(v) \leq CN'(v)$, pour tout $v \in \mathbb{E}$. C'est clair que $B_{N'}(1)$ est borné par rapport à N, puisque $N(v) \leq C$, pour tout $v \in B_{N'}(1)$. En outre, on va montrer que $B_{N'}(1)$ est ouvert par rapport à N. Soit $v \in B_{N'}(1)$ et soit $r = (1 - N'(v))/C$. Il suffit de démontrer que $B_N(v, r) = \{w \in \mathbb{E} : N(w - v) < r\} \subseteq B_{N'}(1)$. Soit $w \in B_N(v, r)$, *i.e.* $N(w - v) < r$. L'inégalité triangulaire nous dit que $N'(w) \leq N'(v) + N'(w - v)$, ce qui implique que

$$N'(w) \leq N'(v) + N'(w - v) \leq N'(v) + CN(w - v) < N'(v) + 1 - N'(v) = 1,$$

i.e. $w \in B_{N'}(1)$.

(*c*) (i) Soit $v \in \mathbb{E}$ quelconque. Il suffit de montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda^{-1}v \in U$. Comme U est convexe, non-vide et symétrique, $\mathbf{0}_{\mathbb{E}} \in U$. En outre, U étant ouvert nous dit qu'il existe $r > 0$ tel que $\{w \in \mathbb{E} : N(w) < r\} \subseteq U$. Si $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$, tout $\lambda > 0$ satisfait que $\lambda^{-1}v \in U$, puisque $\lambda^{-1}\mathbf{0}_{\mathbb{E}} = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$. On suppose que $v \neq \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$. On pose $\lambda = 2N(v)/r > 0$. Alors,

$$N\big(\lambda^{-1}v\big) = \frac{rN(v)}{2N(v)} = \frac{r}{2} < r,$$

ce qui nous dit que $\lambda^{-1}v \in U$.

(ii) On remarque d'abord que, si $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$, tout $\lambda > 0$ satisfait que $\lambda^{-1}v \in U$, puisque $\lambda^{-1}\mathbf{0}_{\mathbb{E}} = \mathbf{0}_{\mathbb{E}} \in U$. En conséquence, $\mathbf{N}_U(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = 0$, ce qui nous dit que

$$\mathbf{N}_U(0v) = \mathbf{N}_U(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = 0 = 0\mathbf{N}_U(v).$$

On suppose maintenant que $\lambda > 0$. On voit bien que

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_U(\lambda v) &= \inf\big\{\mu \in \mathbb{R}_{>0} : \mu^{-1}\lambda v \in U\big\} \\ &= \lambda \inf\left\{\frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{R}_{>0} : \Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^{-1} v \in U\right\} = \lambda\mathbf{N}_U(v),\end{aligned} \tag{1}$$

où l'on a utilisé que $\inf(c.S) = c.\inf(S)$, pour tout ensemble $S \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ et tout $c > 0$.

Par ailleurs,

$$\mathbf{N}_U(-v) = \inf\big\{\mu \in \mathbb{R}_{>0} : \mu^{-1}(-v) \in U\big\} = \inf\big\{\mu \in \mathbb{R}_{>0} : \mu^{-1}v \in U\big\} = \mathbf{N}_U(v),$$

où l'on a utilisé que $w \in U$ si et seulement si $-w \in U$, puisque U est symétrique. Si $\lambda < 0$, on considère $\lambda' = -\lambda > 0$. L'identité (1) nous dit que

$$\mathbf{N}_U(\lambda v) = \mathbf{N}_U\big(\lambda'(-v)\big) = \lambda'\mathbf{N}_U(-v) = |\lambda|\mathbf{N}_U(v),$$

puisque $\mathbf{N}_U(-v) = \mathbf{N}_U(v)$.

(iii) Soient $v, w \in \mathbb{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $\lambda^{-1}v \in U$ et $\mu^{-1}w \in U$. Comme U est convexe on voit bien que

$$(\lambda+\mu)^{-1}(v+w) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\lambda^{-1}v + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mu^{-1}w \in U.$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}&\big\{\nu \in \mathbb{R}_{>0} : \nu^{-1}(v+w) \in U\big\} \\ &\supseteq \big\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \lambda^{-1}v \in U\big\} + \big\{\mu \in \mathbb{R}_{>0} : \mu^{-1}w \in U\big\}.\end{aligned} \tag{2}$$

En outre,

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_U(v+w) &= \inf\big\{\nu \in \mathbb{R}_{>0} : \nu^{-1}(v+w) \in U\big\} \\ &\leq \inf\big\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \lambda^{-1}v \in U\big\} + \inf\big\{\mu \in \mathbb{R}_{>0} : \mu^{-1}v \in U\big\} \\ &= \mathbf{N}_U(v) + \mathbf{N}_U(w),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2) avec $\inf(S+T) = \inf(S) + \inf(T)$, pour tous $S, T \subseteq \mathbb{R}_{>0}$.

(iv) Soit $v \in \mathbb{E}$ tel que $\mathbf{N}_U(v) = 0$. Pour montrer que $\mathbf{N}_U$ est une norme, il reste à démontrer que $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$. Or, comme $\mathbf{N}_U(v) = 0$, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$ telle que λ_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $\lambda_n^{-1}v \in U$. Comme U est borné, il existe $C > 0$ tel que $N(w) \leq C$, pour tout $w \in U$. En conséquence, $N(\lambda_n^{-1}v) \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* $N(v) \leq C\lambda_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que

$$0 \leq N(v) \leq \lim_{n\to+\infty} C\lambda_n = 0.$$

Cela nous dit que $N(v) = 0$, *i.e.* $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$, puisque N est une norme.

(v) Comme $\mathbb{E}$ est de dimension finie, d'après un résultat du cours, on sait que les normes $\mathbf{N}_U$ et N sont équivalentes.

(vi) D'après la définition de $\mathbf{N}_U$, on voit bien que

$$V = \left\{v \in \mathbb{E} : \exists\lambda \in \,]0,1[\, \text{ tel que } \lambda^{-1}v \in U\right\}.$$

Soit $v \in V$. Alors, il existe $\lambda \in \,]0,1[\,$ tel que $\lambda^{-1}v \in U$. Comme $\mathbf{0}_{\mathbb{E}}$ (puisque U est convexe, non-vide et symétrique), on voit que

$$v = \lambda\lambda^{-1}v + (1-\lambda)\mathbf{0}_{\mathbb{E}} \in U,$$

puisque U est convexe. Cela nous dit que $V \subseteq U$.

Par ailleurs, soit $v \in U$. On considère l'application $\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{E}$ donnée par $t \mapsto t^{-1}v$. C'est facile à vérifier que α est continue, où $\mathbb{E}$ est muni de la norme N. C'est clair que $\alpha(1) = v \in U$. Comme U est ouvert et l'image réciproque par une application continue d'un ouvert est ouvert, $\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}_{>0}$ qui inclut 1. En conséquence, il existe $\lambda < 1$ tel que $\alpha(\lambda) = \lambda^{-1}v \in U$, *i.e.* $\mathbf{N}_U(v) < 1$. Cela nous dit que $U \subseteq V$.

(vii) Comme les normes N' et N sont équivalentes, et les notions d'ensemble ouvert et borné coïncident pour des normes équivalentes, on voit bien que U' est ouvert et borné. En outre, comme N' est une norme, les items (ii) et (iv) dans (a) nous disent que U' est convexe et symétrique, et la condition d'être une norme nous dit que U' est non-vide. On voit bien que

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{U'}(v) &= \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \lambda^{-1}v \in U'\right\} = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : N'(\lambda^{-1}v) < 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : N'(v) < \lambda\right\} = N'(v),\end{aligned}$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$. La conclusion finale suit directement de cet item et de l'item précédent.

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x-1)^{4/3}}{(x-1)^2+y^2|x|}, & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}, \\ 0, & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

(a) Montrer que, si $(x-1)^2+y^2<1/2$, alors

$$(x-1)^2+y^2|x| \geq \frac{(x-1)^2+y^2}{2}.$$

(b) Trouver la partie $C \subseteq \mathbb{R}^2$ formée des points de continuité de f.

Solution.

(a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x-1)^2+y^2<1/2$. Comme $(x-1)^2 \leq (x-1)^2+y^2<1/2$, on voit bien

$$0<1-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Or, l'inégalité demandée équivaut à $2(x-1)^2+2y^2|x| \geq (x-1)^2+y^2$, *i.e.*

$$(x-1)^2+y^2(2|x|-1) \geq 0. \tag{3}$$

Si $x \geq 1/2$, (3) est clairement vérifiée. Si $1-1/\sqrt{2} \leq x < 1/2$, on écrit

$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2(2|x|-1) &= (x-1)^2+y^2(2x-1)\\ &> (x-1)^2+(2x-1)\Big(\frac{1}{2}-(x-1)^2\Big) = 2(1-x)^3-(1-x)+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $y^2<1/2-(x-1)^2$. Comme $x \leq 1/2$, $1-x \geq 1/2$. Il suffit de démontrer que $p(z)=2z^3-z+1/2 \geq 0$ pour tout $z \geq 1/2$. Or, comme $p'(z)=6z^2-1>0$ si $z>1/2$, p est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_{>1/2}$, et comme $p(1/2)=1/4$, on conclut que $p(z)>0$ pour tout $z \geq 1/2$, comme on voulait démontrer.

(b) Soit $U=\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. C'est clair que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, puisque c'est la complémentaire d'un point, qui est un ensemble fermé. Par ailleurs, comme la restriction $f|_U$ est un quotient de fonctions continues, avec dénominateur non nul, $f|_U$ est continue. Cela implique que $U \subseteq C$. On affirme que $C=\mathbb{R}^2$. Il suffit de démontrer que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|y||x-1|^{4/3}}{(x-1)^2+y^2|x|}$$

existe et vaut 0. D'après l'item précédent on voit que

$$0 \leq \frac{|y||x-1|^{4/3}}{(x-1)^2+y^2|x|} \leq \frac{2|y||x-1|^{4/3}}{(x-1)^2+y^2} \leq |x-1|^{1/3},$$

pour tout $(x,y)\in U$, où l'on a utilisé que $ab \leq 2ab \leq a^2+b^2$, pour tous $a,b\in\mathbb{R}_{\geq 0}$. Cela nous dit que la limite demandée existe et vaut zéro. En conséquence, f est continue en $(1,0)$ et $C=\mathbb{R}^2$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que

$$f(0,1) = 0, \nabla f(0,1) = (0,2) \text{ et } H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$.

(a) Montrer que g est de classe C^2.

(b) Calculer $g(0,1)$, le gradient $\nabla g(0,1)$ et la matrice hessienne $H_g(0,1)$.

(c) La fonction g admet-elle un extremum relatif en $(0,1)$? Si oui, déterminer sa nature.

Solution.

(a) La fonction g est de classe C^2 puisque elle est la somme d'un polynôme, *a fortiori* C^∞, et d'une fonction donnée comme la composition de fonctions de classe C^2.

(b) La règle de différentiation de composition de fonctions nous dit que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 6xy + e^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + e^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2,$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De façon analogue, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= 6y + e^{f(x,y)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + e^{f(x,y)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= e^{f(x,y)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + e^{f(x,y)}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) &= 6x + e^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + e^{f(x,y)}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \end{aligned}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On voit bien alors que

$$g(0,1) = -1, \nabla g(0,1) = (0,0) \text{ et } H_g(0,1) = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après le calcul précédent on conclut que $(0,1)$ est un minimum relatif de g.