1
2
3
4
5

MAT303

Premier Semestre — 2018-2019

Examen terminal - janvier 2019

1. (*a*) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. Donner la définition de norme et de produit scalaire.

(*b*) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel muni d'une norme N. Donner la définition d'adhérence $\bar{S}$, intérieur S° et frontière ∂S d'un ensemble $S \subseteq \mathbb{E}$. Exprimer chacun des ensembles $\bar{S}$, S° et ∂S en fonction des deux autres.

(*c*) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{E}$. Donner la définition de convergence pour $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Quand dit-on qu'une suite dans $\mathbb{E}$ est bornée ? Montrer que toute suite convergente est bornée.

(*d*) Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels munis de normes $N_{\mathbb{E}}$ et $N_{\mathbb{F}}$, respectivement, et soit $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application. Donner la définition de continuité pour f.

(*e*) On suppose désormais que $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est continue. Soit $S \subseteq \mathbb{E}$. Montrer que $f(\bar{S}) \subseteq \overline{f(S)}$. Donner un exemple ou l'inclusion est stricte.

Solution.

(*a*) Une norme est une application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(N1) pour tout $v \in \mathbb{E}$, $N(v) = 0$ implique $v = \mathbf{0}$;

(N2) pour tout $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$;

(N3) pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

D'ailleurs, un produit scalaire est une application $\langle\, ,\rangle : \mathbb{E}\times\mathbb{E} \to \mathbb{R}$ qui satisfait que

(PS1) pour tout $v \in \mathbb{E}$, $\langle v, v\rangle \geq 0$, et $\langle v, v\rangle = 0$ si et seulement si $v = \mathbf{0}$;

(PS2) pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$;

(PS3) pour tous $u, v, w \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle u + \lambda v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \lambda\langle v, w\rangle$.

(*b*) Un point $v \in \mathbb{E}$ appartient à $\bar{S}$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $s \in S$ tel que $N(v-s) < \epsilon$. D'ailleurs, un point $v \in \mathbb{E}$ appartient à ∂S si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $s \in S$ et $s' \in \mathbb{E} \setminus S$ tels que $N(v-s) < \epsilon$ et $N(v-s') < \epsilon$. Finalement, un point $v \in \mathbb{E}$ appartient à S° si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B^N_\epsilon(v) = \{w \in \mathbb{E} : N(w-v) < \epsilon\} \subseteq S$. On affirme que

(i) $\bar{S} = S^\circ \cup \partial S$;

(ii) $S^\circ = \bar{S} \setminus \partial S$;

(iii) $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$.

Pour prouver (i), on note d'abord l'inclusion évidente $\bar{S} \supseteq S^\circ \cup \partial S$. Il suffit de démontrer que $\bar{S} \subseteq S^\circ \cup \partial S$. Soit $v \in \bar{S}$ et $v \notin \partial S$. Alors, par définition de ∂S, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B^N_\epsilon(v) \cap (\mathbb{E} \setminus S) = \emptyset$ ou $B^N_\epsilon(v) \cap S = \emptyset$. Comme la dernière possibilité est impossible, vu que $v \in \bar{S}$, on conclut que $B^N_\epsilon(v) \cap (\mathbb{E} \setminus S) = \emptyset$, *i.e.* $B^N_\epsilon(v) \subseteq S$. En conséquence, $v \in S^\circ$.

Pour prouver (ii), on montre d'abord l'inclusion $S^\circ \subseteq \bar{S} \setminus \partial S$. L'inclusion $S^\circ \subseteq \bar{S}$ étant évidente, il suffit de montrer que $S^\circ \subseteq \mathbb{E} \setminus \partial S$ ou, de façon équivalente, $\partial S \cap S^\circ = \emptyset$. Si $v \in \partial S \cap S^\circ$, alors *a fortiori* il existe $\epsilon > 0$ tel que $B^N_\epsilon(v) \subseteq S$ et $\epsilon' > 0$ tel que $B^N_{\epsilon'}(v) \cap (\mathbb{E} \setminus S) \neq \emptyset$. Si l'on prend $\epsilon'' = \min(\epsilon, \epsilon')$, alors $B^N_{\epsilon''}(v) \subseteq S$ et $B^N_{\epsilon''}(v) \cap (\mathbb{E} \setminus S) \neq \emptyset$, ce qui est absurde. En conséquence, $\partial S \cap S^\circ = \emptyset$. Par ailleurs, on a démontré l'inclusion $S^\circ \supseteq \bar{S} \setminus \partial S$ dans la dernière partie du paragraphe précédent.

Pour prouver (iii), on montre d'abord l'inclusion $\partial S \subseteq \bar{S} \setminus S^\circ$. Comme l'inclusion $\partial S \subseteq \bar{S}$ est évidente et on a déjà démontré que $\partial S \subseteq \mathbb{E} \setminus S^\circ$, l'inclusion mentionnée est vérifiée. Il suffit alors de montrer que $\partial S \supseteq \bar{S} \setminus S^\circ$. Soit $v \in \bar{S} \setminus S^\circ$. Comme $v \in \bar{S}$, pour tout $\epsilon > 0$, $B^N_{\epsilon'}(v) \cap S \neq \emptyset$. En outre, la condition $v \notin S^\circ$ nous dit que, pour tout $\epsilon > 0$, $B^N_{\epsilon'}(v) \cap (\mathbb{E} \setminus S) \neq \emptyset$, ce qui montre que $v \in \partial S$.

(*c*) La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^\mathbb{N}$ est convergente s'il existe $u \in \mathbb{E}$ qui satisfait que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\Big(\big(n \geq n_0\big) \Rightarrow \big(N(u - u_n) \leq \epsilon\big)\Big).$$

L'élément u est forcément unique dans ce cas et il est appelé la *limite* de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^\mathbb{N}$. La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^\mathbb{N}$ est bornée s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_n) \leq C$. On suppose que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^\mathbb{N}$ est convergente, avec limite u. La définition de convergence pour $\epsilon = 1$ nous dit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$N(u - u_n) \leq 1.$$

Par l'inégalité triangulaire on conclut que $|N(u) - N(u_n)| \leq N(u - u_n) \leq 1$, et en particulier $N(u_n) \leq N(u) + 1$, pour tout $n \geq n_0$. On pose $C = \max(N(u_0, \dots, N(u_{n_0}), 1 + N(u)) > 0$. Alors, $N(u_n) \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(*d*) On dit que f est continue si, pour tout $v \in \mathbb{E}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(\forall v' \in \mathbb{E})\Big(\big(N(v - v') \leq \delta\big) \Rightarrow \big(N\big(f(v) - f(v')\big) \leq \epsilon\big)\Big).$$

On a vu dans le cours que cette définition équivaut à la propriété suivante : pour toute suite convergente $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^\mathbb{N}$ de limite u, la suite $\{f(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^\mathbb{N}$ est convergente de limite $f(u)$.

(*e*) On a vu dans le cours que $\bar{S}$ est formé précisément des limites de toutes les suites convergentes $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$. Soit $v \in \bar{S}$ et soit $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ une suite convergente de limite v. Comme f est continue, alors $\{f(v_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in f(S)^\mathbb{N}$ est une suite convergente de limite $f(v)$. Par notre dernière description de l'adhérence d'un ensemble, on conclut que $f(v) \in \overline{f(S)}$. En conséquence, $f(\bar{S}) \subseteq \overline{f(S)}$. Pour le contre-exemple, on considère $\mathbb{E} = \mathbb{F} = \mathbb{R}$ munis de la valeur absolue, $S = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 1/(x^2 + 1)$. Alors $\bar{S} = S$ et $f(S) = f(\bar{S}) =]\,0, 1] \subsetneq [0, 1] = \overline{f(S)}$.

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+1}{x^2-y}, & \text{si } x^2 \neq y, \\ 0, & \text{si } x^2 = y \end{cases}$$

(a) Trouver la partie $C \subseteq \mathbb{R}^2$ formée des points de continuité de f.
(b) L'ensemble C est-il ouvert ? et fermé ?

Solution.

(a) Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y\}$. On note d'abord que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, on considère $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = x^2 - y$. C'est clair que g est continue, puisqu'il s'agit d'un polynôme, ce qui implique que $U = g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, vu que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme la restriction $f|_U$ est un quotient de fonctions continues, avec dénominateur non nul, $f|_U$ est continue. Cela implique que $U \subseteq C$. On affirme que $U = C$. Il suffit de démontrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f n'est pas continue en (x_0, x_0^2). Si $x_0 \neq -1$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0^2)} \frac{|xy+1|}{|x^2-y|} = +\infty,$$

puisque la limite du dénominateur est nulle, tandis que la limite du numérateur est non nulle. Cela implique en particulier que f n'est pas continue en (x_0, x_0^2), si $x_0 \neq -1$. Finalement, si $x_0 = -1$, la limite

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{xy+1}{x^2-y}$$

n'existe pas. En effet, si l'on considère la restriction $x = -1$, la limite précédente devient

$$\lim_{y\to 1} \frac{-y+1}{1-y} = 1,$$

tandis que si l'on considère la restriction $y = 1$, on trouve

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Comme $U = C$ et U est ouvert, C est ouvert. Par ailleurs, C n'est pas fermé, puisque $(0,0) \notin C$, tandis que la suite $\{(0,1/n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ converge vers $(0,0)$.

3. Calculer la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x,y) = (xe^y + \cos(y), x, x + e^y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution. $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \sin(y) \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x$.

(a) Montrer que f est différentiable en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Montrer que les dérivées partielles de f en $(0,0)$ n'existent pas. En déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(c) Calculer les points critiques de f (dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

(d) Pour tout point critique, déterminer s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point-selle.

(e) Montrer que $(0,0)$ est un minimum global de f.

(f) La fonction f admet-elle un maximum global ?

Solution.

(a) On remarque d'abord que la fonction $\sqrt{-} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto \sqrt{x}$ est différentiable. Comme $x^2 + y^2 > 0$ si et seulement si $(x,y) \neq (0,0)$, on conclut que $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est différentiable, puisqu'elle s'obtient comme la somme et la composition de fonction différentiables.

(b) On voit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}+h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 + \frac{|h|}{h}$$

n'existe pas, puisque la limite pour $h > 0$ est 2, tandis que la limite pour $h < 0$ est 0. De même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt{k^2}+0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{|k|}{k}$$

n'existe pas. On conclut que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(c) On voit que

$$\nabla f(x,y) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. En particulier, l'ensemble des points critiques de f (dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) est $\{(x,0) : x < 0\}$.

(d)-(e) Le critère de la matrice hessienne ne permet pas de conclure dans ce cas, puisque le déterminant est nul. Par contre, on remarque que $-x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En conséquence, $\sqrt{x^2+y^2} + x \geq 0$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(x,0) = \sqrt{x^2+0^2} + x = |x| + x = 0$ si $x \leq 0$, on conclut que $(x,0)$ est un minimum global de f si $x \leq 0$.

(f) La limite

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y\to\infty}} \sqrt{x^2+y^2}+x = +\infty$$

nous dit que f n'admet pas de maxima globaux.

5. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et soit $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une norme qui satisfait

$$N(v+w)^2 + N(v-w)^2 = 2N(v)^2 + 2N(w)^2 \qquad \text{(PAR)}$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$. On définit l'application $\langle\, , \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ via

$$\langle v, w\rangle = \frac{N(v+w)^2 - N(v-w)^2}{4},$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$.

(a) Vérifier que $\langle v, v\rangle = N(v)^2$, pour tout $v \in \mathbb{E}$, et déduire que l'application $\langle\, , \rangle$ est définie positive.

(b) Montrer que $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$.

(c) Montrer que $\langle u_1+u_2, u_3\rangle = \langle u_1, u_3\rangle + \langle u_2, u_3\rangle$, pour tous $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{E}$.
Indication : Exprimer $N(u_1+u_2+u_3)^2$ comme une demi-somme des termes obtenus de (PAR) pour $v = u_1+u_3$ et $w = u_2$, et de (PAR) pour $v = u_2+u_3$ et $w = u_1$. Procéder de la même façon pour $N(u_1+u_2-u_3)^2$.

(d) Vérifier que $\langle (-v), w\rangle = -\langle v, w\rangle$, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$.

(e) Utiliser les deux items précédents pour montrer que $\langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

(f) À partir de l'item précédent, déduire que $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{Q}$.

(g) Montrer que la fonction $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ est continue, où $\mathbb{E}$ est muni de la norme N et $\mathbb{R}$ est muni de la valeur absolue.

(h) Montrer que, pour $v, w \in \mathbb{E}$ fixes, les applications $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données par $f(\lambda) = \langle \lambda v, w\rangle$ et $g(\lambda) = \lambda\langle v, w\rangle$ sont continues.

(i) Utiliser les trois items précédents pour montrer que $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En déduire que $\langle\, , \rangle$ est un produit scalaire dont la norme associée est N.

Solution.

(a) On voit bien que

$$\langle v, v\rangle = \frac{N(v+v)^2 - N(v-v)^2}{4} = \frac{N(2v)^2 - N(\mathbf{0})^2}{4} = N(v)^2,$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$, où l'on a utilisé (N2). En particulier, $\langle v, v\rangle \geq 0$, pour tout $v \in \mathbb{E}$. En plus, (N1) implique la dernière condition dans (PS1).

(b) On voit bien que

$$\langle v, w\rangle = \frac{N(v+w)^2 - N(v-w)^2}{4} = \frac{N(v+w)^2 - N(w-v)^2}{4} = \langle v, w\rangle,$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, vu que $N(-u) = N(u)$, pour tout $u \in \mathbb{E}$, d'après (N2). On conclut alors que la condition (PS2) est vérifiée.

(c) L'égalité (PAR) pour $v = u_1 + u_3$ et $w = u_2$ nous dit que

$$N(u_1+u_2+u_3)^2 = 2N(u_1+u_3)^2 + 2N(u_2)^2 - N(u_1+u_3-u_2)^2, \tag{1}$$

tandis que (PAR) pour $v = u_2 + u_3$ et $w = u_1$ nous dit que

$$N(u_1+u_2+u_3)^2 = 2N(u_2+u_3)^2 + 2N(u_1)^2 - N(u_2+u_3-u_1)^2. \tag{2}$$

En particulier, si l'on fait la demi-somme de (1) et de (2), on trouve

$$\begin{aligned} N(u_1+u_2+u_3)^2 =& N(u_1)^2 + N(u_2)^2 + N(u_1+u_3)^2 + N(u_2+u_3)^2 \\ &- \frac{N(u_1+u_3-u_2)^2 + N(u_2+u_3-u_1)^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Si l'on remplace u_3 par $-u_3$ dans (3) on trouve

$$\begin{aligned} N(u_1+u_2-u_3)^2 =& N(u_1)^2 + N(u_2)^2 + N(u_1-u_3)^2 + N(u_2-u_3)^2 \\ &- \frac{N(u_1-u_3-u_2)^2 + N(u_2-u_3-u_1)^2}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \langle u_1+u_2, u_3\rangle &= \frac{N(u_1+u_2+u_3)^2 - N(u_1+u_2-u_3)^2}{4} \\ &= \frac{N(u_1+u_3)^2 + N(u_1-u_3)^2}{4} + \frac{N(u_2+u_3)^2 - N(u_2-u_3)^2}{4} \\ &= \langle u_1, u_3\rangle + \langle u_2, u_3\rangle, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3) et (4) dans la deuxième égalité, ainsi que $N(u_1+u_3-u_2)^2 = N(u_2-u_3-u_1)^2$ et $N(u_2+u_3-u_1)^2 = N(u_1-u_3-u_2)^2$.

(d) On voit bien que

$$\langle (-v), w\rangle = \frac{N(-v+w)^2 - N(-v-w)^2}{4} = -\frac{N(v+w)^2 - N(w-v)^2}{4} = -\langle v, w\rangle,$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, où l'on a utilisé (N2).

(e) On fixe d'abord $v, w \in \mathbb{E}$. On va montrer que $\langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, à partir d'un argument par récurrence. En effet, si $n = 0$,

$$\langle 0v, w\rangle = \langle \mathbf{0}, w\rangle = \frac{N(w)^2 - N(-w)^2}{4} = 0 = 0\langle v, w\rangle,$$

comme on voulait montrer, tandis que le cas $n = 1$ est trivial. On suppose que $\langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$ est valable pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixe. On trouve alors

$$\langle (n+1)v, w\rangle = \langle nv + v, w\rangle = \langle nv, w\rangle + \langle v, w\rangle = n\langle v, w\rangle + \langle v, w\rangle = (n+1)\langle v, w\rangle,$$

où l'on a utilisé l'item (c).

En outre, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, alors $-n \in \mathbb{N}$, ce qui dit que

$$\langle nv, w\rangle = \langle (-(-n)v), w\rangle = -\langle (-n)v, w\rangle = -(-n)\langle v, w\rangle = n\langle v, w\rangle,$$

où l'on a utilisé l'item (d) dans la deuxième égalité et $\langle mv, w\rangle = m\langle v, w\rangle$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ dans la troisième égalité.

(f) Soit $\lambda = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. Alors, l'item précédent nous dit que

$$q\langle \lambda v, w\rangle = \langle q\lambda v, w\rangle = \langle pv, w\rangle = p\langle v, w\rangle.$$

On conclut que

$$\langle \lambda v, w\rangle = \frac{p}{q}\langle v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle.$$

(g) La continuité de $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ se déduit directement de l'inégalité triangulaire $|N(v) - N(w)| \leq N(v - w)$, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$.

(h) On remarque d'abord que la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ donnée par $\lambda \mapsto \lambda v$ est continue, puisque $N(h(\lambda) - h(\lambda')) = |\lambda - \lambda'|N(v)$. La fonction f s'écrit de la forme

$$f(\lambda) = \frac{N(\lambda v + w)^2 - N(\lambda v - w)^2}{4}.$$

Elle s'obtient alors à partir de sommes et compositions de fonctions continues, vu que h et N sont des applications continues.

L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire et donc *a fortiori* continue.

(i) D'après l'item (f) $f(\lambda) = g(\lambda)$, pour tous $\lambda \in \mathbb{Q}$. En outre, d'après l'item précédent, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite λ_0. Alors

$$f(\lambda_0) = \lim_{n\to+\infty} f(\lambda_n) = \lim_{n\to+\infty} g(\lambda_n) = g(\lambda_0).$$

Cela implique $f(\lambda) = g(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, *i.e.* $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En conséquence, la condition (PS3) est vérifiée. Les items (a) et (b), ainsi que la condition que l'on vient de montrer, nous disent que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire dont la norme associée est N.