Topologie élémentaire et calcul différentiel
Notes du cours MAT303 (version préliminaire)

Estanislao Herscovich [1]

[1]Institut Fourier, Université Grenoble Alpes, France.

Résumé

Ces notes ont été conçues pour être utilisées pour un cours de topologie élémentaire et calcul différentiel basique au niveau L2. Tous les résultats sont standards et se trouvent dans des références basiques sur les sujets (voir par exemple [1]). Par des raisons évidentes, le premier chapitre, sur la topologie élémentaire, est plus long et abstrait, tandis que le deuxième chapitre, sur le calcul différentiel de fonctions de plusieurs variables, est "plus court" et concret.

Table de matières

Prérequis et notation

Suivant la tradition française, on notera $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers non négatifs. On rappelle que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble de nombres entiers. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$ on notera $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\}$. On rappelle que $\mathbb{R}$ (resp., $\mathbb{R}_{\geq 0}$) dénotera l'ensemble de nombres réels (resp., non négatifs). En outre, étant donnés deux nombres réels $a < b$, $]\,a, b\,[$ est l'intervalle ouvert formé des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$.

On supposera que la définition d'**espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{R}$ de nombres réels, aussi appelé **espace vectoriel réel**, est bien connue. On notera normalement un espace vectoriel réel avec les lettres $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \dots$, et un élément d'un espace vectoriel réel par les lettres $v, w, \dots$. On va omettre normalement l'adjectif réel, puisque tous les espaces vectoriels vectoriels que l'on va considérer sont réels, sauf si l'on dit autrement. Le mot **vecteur** n'est qu'un synonyme de "élément d'un espace vectoriel". Le **vecteur nul** de $\mathbb{E}$, *i.e.* l'élément neutre pour l'addition de $\mathbb{E}$, sera noté $\mathbf{0}_{\mathbb{E}}$, ou sinon $\mathbf{0}$, si l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ est clair. Pour simplifier, le lecteur pourra penser que $\mathbb{E}$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, où $\mathbb{Z}_{>0}$ est l'ensemble de nombres entiers (strictement) positifs. Dans ce cas, un élément générique x de $\mathbb{R}^n$ sera écrit $x = (x_1, \dots, x_n)$, où $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, et on rappelle que la somme et le produit (par un nombre réel) sont donnés par

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

pour tous $\lambda, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$. L'élément neutre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ pour l'addition de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $(0, \dots, 0)$.

En outre, étant donné $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, on dénote $M_{n\times m}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{nm}$ l'espace vectoriel de matrices avec n lignes et m colonnes à coefficients réels, où un élément $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ est donné par $A = (A_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,m]\!]}$, avec $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, m]\!]$. Si $n = m$ on écrira $M_n(\mathbb{R})$ au lieu de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. On rappelle que l'on identifie un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ avec un vecteur ligne $M_{1\times n}(\mathbb{R})$. Étant donné $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, on dénote A^t la matrice **transposée**, *i.e.* $A^t = (A^t_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,m]\!]} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfait que $A^t_{i,j} = A_{j,i}$ pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, m]\!]$. On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est **diagonale** si $A_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ différents.

Si X et Y sont deux ensembles, on notera $M(X, Y)$ ou Y^X l'ensemble formé de toutes les applications $f : X \to Y$. L'application identité de X sera notée id_X. Étant donné un ensemble X, on rappelle qu'une **propriété (sur les éléments)** de X est seulement une partie $Y \subseteq X$. On notera $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble formé de toutes les parties de X.

On va utiliser les inégalités suivantes, qui sont laissés comme exercice au lecteur.

Fait 0.0.1. *Si $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}, (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n_{\geq}$ sont deux n-uplets et $\mu \geq 0$, alors*

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]}(\mu x_i) = \mu \max_{i\in[\![1,n]\!]}(x_i) \ \text{ et } \ \max_{i\in[\![1,n]\!]}(x_i + y_i) \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]}(x_i) + \max_{i\in[\![1,n]\!]}(y_i). \tag{0.0.1}$$

Plus généralement, soit S un ensemble, $f, g : S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ deux applications et $\mu \geq 0$, alors

$$\sup\{\mu f(x) : x \in S\} = \mu \sup\{f(x) : x \in S\} \tag{0.0.2}$$

et

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in S\} \leq \sup\{f(x) : x \in S\} + \sup\{g(x) : x \in S\}. \tag{0.0.3}$$

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre on étudiera les espaces vectoriels munis des normes. Une norme est essentiellement une forme de mesurer des distances entre les éléments de l'espace vectoriel, ce qui induit une notion d'ensemble ouvert et fermé. On introduira une notion d'équivalence entre normes et on se consacrera après à étudier plusieurs propriétés qui sont préservés par des normes équivalentes. Le résultat le plus important que l'on démontrera c'est que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, ce qui implique que la topologie d'un espace de dimension finie est canonique.

1.1 La définition de norme et quelques propriétés

On commence avec la définition centrale de la notre cours.

Définition 1.1.1. *Une **norme** sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes:*

(N1) pour tout $v \in \mathbb{E}$, $N(v) = 0$ implique que $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$,

(N2) pour tous $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $N(\lambda \cdot v) = |\lambda| N(v)$,

(N3) pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

*On dira aussi que $(\mathbb{E}, N)$ est un **espace (vectoriel) normé**. La dernière propriété (N3) est appelé l'**inégalité triangulaire** pour la norme N.*

Notation 1.1.2. *Une autre terminologie typique pour dénoter une norme est du type $\| \ \| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dans ce cas, l'évaluation de la norme $\| \ \|$ en un vecteur $v \in \mathbb{E}$ sera notée $\|v\|$.*

Exemple 1.1.3. *On considère $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par la valeur absolue, i.e. $N(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors N est une norme sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.1.4. *Si N est une norme sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$, alors $N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = 0$ et $N(-v) = N(v)$, pour tout $v \in \mathbb{E}$.*

Preuve. Comme $\mathbf{0}_{\mathbb{E}} = 0.\mathbf{0}_{\mathbb{E}}$, alors, d'après (N2), $N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = |0| N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}})$, ce qui implique que $N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = 0$. Pour la deuxième partie, il faut remarquer que, d'après (N2), $N(-v) = N((-1)v) = |-1| N(v) = N(v)$, pour tout $v \in \mathbb{E}$. □

Définition 1.1.5. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé. On définit la **distance** $d(v, w)$ entre deux éléments v et w dans $\mathbb{E}$ à partir de $d(v, w) = N(v - w)$. C'est clair que $d(v, w) = d(w, v) \geq 0$, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$. En outre, d'après (N1), $d(v, w) = 0$ si et seulement si $v = w$.*

*Pour $v \in \mathbb{E}$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$, on définit la **boule ouverte** et la **boule fermée***

$$B_N(v, r) = \{w \in \mathbb{E} : N(w - v) < r\} \text{ et } \bar{B}_N(v, r) = \{w \in \mathbb{E} : N(w - v) \leq r\}$$

*centrées autour de v et de rayon r, respectivement. La boule $B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, 1)$ (resp., $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, 1)$) est appelée la **boules unité ouverte** (resp., **fermée**) de $(\mathbb{E}, N)$.*

On rappelle qu'une partie $S \subseteq \mathbb{E}$ d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est **convexe** si, pour tous $v, w \in S$ et pour tout $t \in [0,1]$, $t \cdot v + (1-t) \cdot w \in S$. Le résultat suivant dit qu'une boule ouverte ou fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, N)$ doit être toujours convexe. En particulier, une boule dans un espace vectoriel normé ne peut avoir n'importe quelle forme.

Proposition 1.1.6. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $v \in \mathbb{E}$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$, les boules $B_N(v,r)$ et $\bar{B}_N(v,r)$ sont des ensembles convexes de $\mathbb{E}$.*

Preuve. Soient w et w' deux éléments de $B_N(v,r)$ (resp., $\bar{B}_N(v,r)$). Alors, $N(w-v) < r$ et $N(w'-v) < r$ (resp., $N(w-v) \leq r$ et $N(w'-v) \leq r$). Pour tout $t \in [0,1]$, on voit bien que

$$\begin{aligned} N\big(t \cdot w + (1-t) \cdot w' - v\big) &= N\Big(t \cdot w + (1-t) \cdot w' - \big(t \cdot v + (1-t) \cdot v\big)\Big) \\ &= N\big(t \cdot (w-v) + (1-t) \cdot (w'-v)\big) \leq N\big(t \cdot (w-v)\big) + N\big((1-t) \cdot (w'-v)\big) \\ &= tN(w-v) + (1-t)N(w'-v). \end{aligned}$$

Comme $tN(w-v) + (1-t)N(w'-v) < tr + (1-t)r = r$ (resp., $tN(w-v) + (1-t)N(w'-v) \leq tr + (1-t)r = r$), on conclut que $t \cdot w + (1-t) \cdot w' \in B_N(v,r)$ (resp., $t \cdot w + (1-t) \cdot w' \in \bar{B}_N(v,r)$). En conséquence, $B_N(v,r)$ et $\bar{B}_N(v,r)$ sont des ensembles convexes de $\mathbb{E}$. □

1.2 Construction de normes à partir d'autres normes

On rappelle qu'une **application linéaire** $T : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ d'un espace vectoriel $\mathbb{F}$ dans un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une application qui satisfait que $T(v + \lambda w) = T(v) + \lambda T(w)$, pour tout $v, w \in \mathbb{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2.1. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels et $T : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ une application linéaire injective. On suppose que $\mathbb{E}$ est muni d'une norme $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. On définit l'application $N_T : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par $N_T = N \circ T$. Alors, N_T est une norme sur $\mathbb{F}$.*

Preuve. C'est clair que N_T satisfait (N2) et (N3), vu que

$$N_T(\lambda \cdot v) = N\big(T(\lambda \cdot v)\big) = N\big(\lambda \cdot T(v)\big) = |\lambda| N\big(T(v)\big) = |\lambda| N_T(v),$$

et

$$N_T(v+w) = N\big(T(v+w)\big) = N\big(T(v) + T(w)\big) \leq N\big(T(v)\big) + N\big(T(v)\big) = N_T(v) + N_T(w),$$

pour tous $v, w \in \mathbb{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, où l'on a utilisé que N satisfait (N2) et (N3).

On va finalement montrer que N_T satisfait (N1). Soit $v \in \mathbb{F}$ tel que $N_T(v) = N(T(v)) = 0$. Comme N satisfait (N1), on voit que $T(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$. Or, T étant injectif, $v = \mathbf{0}_{\mathbb{F}}$, comme on voulait démontrer. □

On rappelle qu'un **sous-espace vectoriel** d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une partie $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ qui satisfait que $\mathbf{0}_{\mathbb{E}} \in \mathbb{F}$ et que $v + \lambda w \in \mathbb{F}$ pour tous les éléments $v, w \in \mathbb{F}$ et et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, $\mathbb{F}$ est un espace-vectoriel pour la somme et le produit par scalaires induits de ceux de $\mathbb{E}$. Le vecteur nul de $\mathbb{F}$ est $\mathbf{0}_{\mathbb{E}} \in \mathbb{F}$. On commence avec le résultat suivant, dont la preuve est élémentaire.

Proposition 1.2.2. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel muni d'une norme $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et soit $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ un sous-espace vectoriel. Alors, la restriction $N|_{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ de N, donnée par $N|_{\mathbb{F}}(v) = N(v)$ pour tout $v \in \mathbb{F}$, est une norme sur $\mathbb{F}$.*

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de la Proposition 1.2.1, en employant $T : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ donné par l'inclusion de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{E}$. En effet, le fait que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ soit un sous-espace vectoriel implique que T est une application linéaire injective. □

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel. On rappelle qu'un ensemble S est **cône** (au sens de l'analyse convexe) si pour tout $v \in S$ et $t \in \mathbb{R}_{>0}$, $t \cdot v \in S$. Un **cône convexe** dans $\mathbb{E}$ est un cône qui satisfait la propriété de convexité rappelée dans la section précédente. On remarque $S \subseteq \mathbb{E}$ est un cône convexe si et seulement si, pour tous $v, v' \in S$ et $t, t' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que $t + t' > 0$, on a $t \cdot v + t' \cdot v' \in S$. On laisse la vérification de ce fait au lecteur.

On rappelle que $M(\mathbb{E}, \mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{E}}$ est l'ensemble formé de toutes les applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Soit $\mathrm{Norm}(\mathbb{E})$ la partie de $M(\mathbb{E}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ formée de toutes les normes sur $\mathbb{E}$. Le résultat suivant nous dit que $\mathrm{Norm}(\mathbb{E})$ est un cône convexe de l'espace vectoriel $M(\mathbb{E}, \mathbb{R}_{\geq 0})$.

Proposition 1.2.3. *Soient N et N' deux normes sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ et $\mu, \mu' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que $\mu + \mu' > 0$. L'application $N'' : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par $N''(v) = \mu N(v) + \mu' N'(v)$, pour tout $v \in \mathbb{E}$, est une norme aussi.*

Preuve. Si $N''(v) = \mu N(v) + \mu' N'(v) = 0$ pour $v \in \mathbb{E}$, alors $N(v) = 0$ ou $N'(v) = 0$, ce qui implique que $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$, d'après (N1) pour N et N'. Cela nous dit que N'' vérifié (N1). Par ailleurs, (N2) pour N et N' nous dit que

$$N''(\lambda \cdot v) = \mu N(\lambda \cdot v) + \mu' N'(\lambda \cdot v) = \mu|\lambda| N(v) + \mu'|\lambda| N'(v) = |\lambda| N''(v),$$

pour tous $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui dit que N'' vérifié (N2). Finalement, d'après (N3) pour N et N' on voit que

$$N''(v+w) = \mu N(v+w) + \mu' N'(v+w) \leq \mu\big(N(v) + N(w)\big) + \mu'\big(N'(v) + N'(w)\big) = N''(v) + N''(w),$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$. On a démontré que N'' vérifié (N3) et, en conséquence, N'' est une norme sur $\mathbb{E}$. $\square$

Soient $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ des espaces vectoriels. On rappelle que le **produit cartésien** $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ (aussi noté $\prod_{i=1}^n \mathbb{E}_i$) est l'ensemble formé des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$, où $x_i \in \mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Il s'agit d'un espace vectoriel dont la somme et le produit sont donnés par

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_i, y_i \in \mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Le vecteur nul $\mathbf{0}_{\mathbb{E}}$ de $\mathbb{E}$ est le vecteur $(\mathbf{0}_{\mathbb{E}_1}, \dots, \mathbf{0}_{\mathbb{E}_n})$. Si $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ sont des espaces vectoriels munis des normes $N_1, \dots, N_n$, respectivement. alors on définit les application $N_{\max}$ et N_{sum} de $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ via

$$N_{\max}(x) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(N_i(x_i)\big) \tag{1.2.1}$$

et

$$N_{\text{sum}}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i), \tag{1.2.2}$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, où $x_i \in \mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On a le résultat suivant.

Proposition 1.2.4. *Soient $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ des espaces vectoriels munis des normes $N_1, \dots, N_n$, respectivement. Alors les applications $N_{\max}$ et N_{sum} de $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ définies par* (1.2.1) *et* (1.2.2)*, respectivement, sont de normes sur $\mathbb{E}$.*

Preuve. On montrera d'abord que $N_{\max}$ est une norme sur $\mathbb{E}$. On voit bien que, si $N_{\max}(x) = 0$ pour un élément $x = (x_1, \dots, x_n)$, où $x_i \in \mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $N_i(x_i) = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme N_i est une norme sur $\mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, (N1) nous dit que $x_i = \mathbf{0}_{\mathbb{E}_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui implique que $x = (\mathbf{0}_{\mathbb{E}_1}, \dots, \mathbf{0}_{\mathbb{E}_n}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$ est le vecteur nul de $\mathbb{E}$, *i.e.* $N_{\max}$ vérifie (N1). Par ailleurs,

$$\begin{aligned} N_{\max}\big(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)\big) &= N_{\max}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(N_i(\lambda x_i)\big) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(|\lambda| N_i(x_i)\big) \\ &= |\lambda| \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(N_i(x_i)\big) = |\lambda| N_{\max}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_i \in \mathbb{E}_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, où l'on a utilisé (N2) pour N_i dans la troisième égalité, et la première identité de (0.0.1) dans la quatrième égalité. Cela implique que $N_{\max}$ vérifie (N2). Finalement, on voit bien que

$$\begin{aligned} N_{\max}\big((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) &= N_{\max}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(N_i(x_i + y_i)\big) \\ &\leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(N_i(x_i) + N_i(y_i)\big) \leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(N_i(x_i)\big) + \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(N_i(y_i)\big) \\ &= N_{\max}(x_1, \dots, x_n) + N_{\max}(y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

pour tous $x_i, y_i \in \mathbb{E}_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, où l'on a appliqué (N3) pour N_i au troisième membre, et la deuxième identité de (0.0.1) au quatrième membre. Cela nous dit que $N_{\max}$ vérifie (N3).

On va montrer finalement que N_{sum} est une norme sur $\mathbb{E}$. On remarque d'abord que, si $N_{\mathrm{sum}}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i) = 0$ pour un élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$, où $x_i \in \mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $N_i(x_i) = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, puisque une comme de termes non négatifs est zéro si et seulement si chaque opérande est zéro. Comme N_i est une norme sur $\mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, (N1) nous dit que $x_i = \mathbf{0}_{\mathbb{E}_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui implique que $x = (\mathbf{0}_{\mathbb{E}_1}, \ldots, \mathbf{0}_{\mathbb{E}_n}) = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$ est le vecteur nul de $\mathbb{E}$, *i.e.* $N_{\max}$ vérifie (N1). Par ailleurs,

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{sum}}\big(\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n)\big) = N_{\mathrm{sum}}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\lambda x_i) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| N_i(x_i) = \\ = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i) = |\lambda| N_{\mathrm{sum}}(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_i \in \mathbb{E}_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, où l'on a utilisé (N2) pour N_i dans le troisième égalité. Cela implique que N_{sum} vérifie (N2). Finalement, on voit bien que

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{sum}}\big((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)\big) &= N_{\mathrm{sum}}(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i + y_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \big(N_i(x_i) + N_i(y_i)\big) = \left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} N_i(y_i)\right) \\ &= N_{\mathrm{sum}}(x_1, \ldots, x_n) + N_{\mathrm{sum}}(y_1, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

pour tous $x_i, y_i \in \mathbb{E}_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, où l'on a appliqué (N3) pour N_i au troisième membre. Cela nous dit que N_{sum} vérifie (N3). □

1.3 Construction d'une norme à partir d'un produit scalaire

On rappelle qu'un **produit scalaire** sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une application $\langle\, , \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ qui satisfait

(PS1) $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour tout $v \in \mathbb{E}$, et $\langle v, v\rangle = 0$ implique $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$,

(PS2) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, pour tous $v, w \in \mathbb{E}$,

(PS3) $\langle v + \lambda \cdot v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \lambda\langle v', w\rangle$, pour tous $v, v', w \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Étant donné un produit scalaire $\langle\, , \rangle$ sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$, on définit l'application $\|\ \| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, pour tout $v \in \mathbb{E}$.

On a le résultat suivant.

Proposition 1.3.1. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\, , \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$. On a l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**, i.e.*

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\| \tag{CS}$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$. En plus, on a l'égalité si et seulement si v et w sont linéairement dépendants.

Preuve. Si $w = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$, alors (CS) est clairement vérifiée. On suppose désormais que $w \neq \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$. Dans ce cas, (PS1) nous dit que $\langle w, w\rangle \neq 0$. Soient $\alpha = \langle w, w\rangle = \|w\|^2 \neq 0$ et $\beta = \langle v, w\rangle$. On voit bien que

$$\begin{aligned} 0 \leq \big\|\alpha \cdot v - \beta \cdot w\big\|^2 &= \big\langle \alpha \cdot v - \beta \cdot w, \alpha \cdot v - \beta \cdot w\big\rangle = \alpha^2\langle v, v\rangle - 2\alpha\beta\langle v, w\rangle + \beta^2\langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2\|w\|^4 - \|w\|^2\langle v, w\rangle^2, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

i.e.

$$\|w\|^2\langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2.$$

Comme $\|w\|^2 \neq 0$, l'inégalité précédente équivaut à $\langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$. La fonction racine carrée étant croissante, on voit bien que l'inégalité précédente est équivalente à

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|,$$

comme on voulait démontrer. En plus, elle devient une égalité si et seulement si l'inégalité dans (1.3.1) est une égalité, *i.e.* $0 = \|\alpha \cdot v - \beta \cdot w\|$. D'après (PS1), cela implique que $\alpha \cdot v - \beta \cdot w$ est le vecteur nul, *i.e.* v et w sont linéairement dépendants. □

Proposition 1.3.2. *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $\langle\, , \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$. *Alors, l'application* $\|\ \| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *donnée par* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ *est une norme.*

Preuve. C'est clair que (PS1) nous dit exactement que $\|\ \|$ satisfait (N1). En outre,

$$\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda|\|v\|,$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, où l'on a utilisé (PS3) dans la deuxième égalité. Cela nous dit que $\|\ \|$ satisfait (N2).

Finalement, on va démontrer que $\|\ \|$ satisfait (N3). En effet,

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = \big(\|v\| + \|w\|\big)^2,\end{aligned}$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, où l'on a utilisé (PS2) et (PS3) dans la deuxième égalité, et l'inégalité (CS). La fonction racine carrée étant croissante, on voit bien que l'inégalité précédente est équivalente à

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

comme on voulait démontrer. En conséquence, $\|\ \|$ est une norme. □

L'application $\|\ \| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est appelée la **norme associée** au produit scalaire $\langle\, , \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$.

1.4 Premiers exemples

1.4.1 Classification des normes sur l'espace vectoriel de dimension 1

On peut classifier toutes les normes sur l'espace vectoriel de dimension 1.

Proposition 1.4.1. *Soit* N *une norme sur l'espace vectoriel* $\mathbb{R}$. *Alors il existe* $c \in \mathbb{R}_{>0}$ *unique tel que* $N(x) = c|x|$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Réciproquement, pour tout* $c > 0$, *l'application* $x \mapsto c|x|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}$. *Cela nous donne une bijection entre* $\mathbb{R}_{>0}$ *et* $\mathrm{Norm}(\mathbb{R})$.

Preuve. Pour la première partie de l'énoncé, on pose $c = N(1)$. D'après (N1), $c > 0$. En outre,

$$N(x) = N(x.1) = |x|N(1) = |x|c,$$

où l'on a utilisé (N2) dans la deuxième égalité. L'unicité de c est claire, vu que $N(x) = c|x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous dit *a fortiori* que $N(1) = c$.

La dernière partie suit de la proposition précédente et de l'Exemple 1.1.3. □

1.4.2 La norme infini

Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. On défini la **norme infini** $\|\ \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante. Étant donné $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(|x_i|\big). \tag{1.4.1}$$

Proposition 1.4.2. *Soit* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *et soit* $\|\ \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *l'application définie par* (1.4.1). *Alors,* $\|\ \|_\infty$ *est une norme.*

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de la Proposition 1.2.4, vu que la norme infini de $\mathbb{R}^n$ est la norme $N_{\max}$ sur $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n facteurs), où chaque $\mathbb{R}$ est muni de la norme donnée par la valeur absolue. □

1.4.3 La norme L^1

Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. On défini la **norme** L^1, aussi appelée **norme** 1, $\| \ \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante. Étant donné $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \tag{1.4.2}$$

Proposition 1.4.3. *Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et soit $\| \ \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ l'application définie par* (1.4.2)*. Alors, $\| \ \|_1$ est une norme.*

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de la Proposition 1.2.4, vu que la norme infini de $\mathbb{R}^n$ est la norme N_{sum} sur $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n facteurs), où chaque $\mathbb{R}$ est muni de la norme donnée par la valeur absolue. □

1.4.4 La norme L^2

Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. On défini la **norme** L^2, aussi appelée **norme** 2 ou **norme euclidienne**, $\| \ \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante. Étant donné $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2 \right)^{1/2}. \tag{1.4.3}$$

Proposition 1.4.4. *Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et soit $\| \ \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ l'application définie par* (1.4.3)*. Alors, $\| \ \|_2$ est une norme.*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la Proposition 1.3.2, vu que la norme 2 de $\mathbb{R}^n$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

pour tous les vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$. □

1.5 Équivalence de normes

Définition 1.5.1. *Soient N et N' deux normes sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$. On dit que N est **équivalente** à N' s'il existe $C, C' \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que*

$$CN(v) \leq N'(v) \leq C'N(v), \tag{Equiv}$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$.

On la caractérisation suivante de la équivalence en termes de boules.

Proposition 1.5.2. *Soient N et N' deux normes sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$. Alors N est équivalente à N' si et seulement s'il existe $C, C' \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que*

$$\bar{B}_{N'}(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, C) \subseteq \bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, 1) \subseteq \bar{B}_{N'}(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, C'). \tag{Equiv'}$$

En fait, de façon équivalente, on peut prendre n'importe quel vecteur $v \in \mathbb{E}$ pour le centre des boules dans (Equiv')*, au lieu de $\mathbf{0}_{\mathbb{E}}$.*

Preuve. On laisse au lecteur la vérification directe de l'équivalence entre (Equiv) et (Equiv'). □

Proposition 1.5.3. *Soit* $\mathrm{Norm}(\mathbb{E})$ *la partie de $M(\mathbb{E}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ formée de toutes les normes sur $\mathbb{E}$. Pour N et N' dans* $\mathrm{Norm}(\mathbb{E})$*, on écrit $N \sim N'$ si N est équivalente à N'. Alors $\sim$ définit une relation d'équivalence sur* $\mathrm{Norm}(\mathbb{E})$*.*

Preuve. C'est clair que (Equiv) est vérifiée pour $N = N'$ et $C = C' = 1$. Cela implique que $N \sim N$, pour tout $N \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$. En outre, supposons que $N \sim N'$, *i.e.* il existe $C, C' \in \mathbb{R}_{>0}$ qui vérifient (Equiv). Alors,

$$(C')^{-1}N'(v) \leq N(v) \leq C^{-1}N'(v),$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$, *i.e.* $N' \sim N$. Finalement, soient $N, N', N'' \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$ tels que $N \sim N'$ et $N' \sim N''$. On suppose en particulier qu'il existe $C, C', C'', C''' \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$CN(v) \leq N'(v) \leq C'N(v) \text{ et } C''N'(v) \leq N''(v) \leq C'''N'(v),$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$. Cela nous dit que

$$CC''N(v) \leq N''(v) \leq C'C'''N(v),$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$, *i.e.* $N \sim N''$. En conséquence, $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $\mathrm{Norm}(\mathbb{E})$. □

D'après le résultat précédent, au lieu de dire que N est équivalente à N', on dira plutôt que N et N' sont **équivalentes**.

Proposition 1.5.4. *Soient $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ des espaces vectoriels munis des normes $N_1, \dots, N_n$, respectivement. Alors les normes N_{max} et N_{sum} sur $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$, définies par* (1.2.1) *et* (1.2.2)*, respectivement, sont équivalentes. En conséquence, les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Preuve. On voit bien que

$$N_{\mathrm{max}}(x) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(N_i(x_i)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i) = N_{\mathrm{sum}}(x),$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, où $x_i \in \mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par ailleurs,

$$N_{\mathrm{sum}}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \max_{j \in [\![1,n]\!]} \big(N_j(x_j)\big) = n \max_{j \in [\![1,n]\!]} \big(N_j(x_j)\big) = nN_{\mathrm{max}}(x),$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, où $x_i \in \mathbb{E}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cela implique que N_{max} et N_{sum} sont équivalentes.

La dernière partie de l'énoncé suit de la première et du fait que la norme $\| \ \|_\infty$ (resp., $\| \ \|_1$) sur $\mathbb{R}^n$ est précisément la norme N_{max} (resp., N_{sum}) sur $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n facteurs), où chaque $\mathbb{R}$ est muni de la norme donnée par la valeur absolue. □

On va démontrer dans la suite que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Il s'agit de l'un des résultats les plus importants de ce cours. Pour cela il faut introduire quelques notions topologiques.

1.6 Suites

Soit X un ensemble. On rappelle qu'une **suite à valeurs dans** X est une application $x : \mathbb{N} \to X$. On écrira la suite x sous la forme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $x_n = x(n)$. L'ensemble de suites à valeurs dans X est $X^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.6.1. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{E}$. On dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est*

(S1) ***convergente*** *(pour N) s'il existe $v \in \mathbb{E}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N(v - v_n) < \varepsilon$;*

(S2) ***de Cauchy*** *(pour N) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N(v_n - v_m) < \varepsilon$;*

(S3) ***bornée*** *(pour N) s'il existe $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $N(v_n) < C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Si besoin, dans les deux premières définitions on écrira $n_0(\varepsilon)$ et $n_1(\varepsilon)$ pour remarquer la dépendance de ε. En outre, on ne mentionnera la norme si la même est claire du contexte.

Proposition 1.6.2. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. On suppose que v et v' satisfont la condition dans la définition de convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (resp., $n'_0 \in \mathbb{N}$) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ (resp., $n \geq n'_0$) implique que $N(v - v_n) < \varepsilon$ (resp., $N(v' - v_n) < \varepsilon$). Alors, $v = v'$. On appelle cet élément la **limite** de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = v.$$

Preuve. On voit bien que

$$N(v - v') = N(v - v_n + v_n - v') \leq N(v - v_n) + N(v_n - v'),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après (N3) pour N. On affirme que $N(v - v') = 0$. Si ce n'est pas le cas, alors $N(v - v') > 0$ et on prend $\varepsilon = N(v - v')/4$. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n'_0 \in \mathbb{N}$ les éléments correspondants dans le définition de convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, la condition $n \geq \max(n_0, n'_0)$ implique que $N(v - v_n) < \varepsilon$ et $N(v' - v_n) < \varepsilon$. En conséquence,

$$N(v - v') = N(v - v_n + v_n - v') \leq N(v - v_n) + N(v_n - v') < \varepsilon + \varepsilon = \frac{N(v - v')}{2},$$

ce qui est absurde si $N(v - v') > 0$. En conséquence, $N(v - v') = 0$. D'après (N1) pour N on conclut que $v = v'$, comme on voulait démontrer. □

On a les résultats standards sur l'arithmétique basique de suites convergentes, de Cauchy et cornées.

Proposition 1.6.3. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ deux suites. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les résultats suivants:*

(i) si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes avec limites $v \in \mathbb{E}$ et $w \in \mathbb{E}$, respectivement, alors la suite $(v_n + \lambda \cdot w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec limite $v + \lambda \cdot w$;

(ii) si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont suites de Cauchy, alors $(v_n + \lambda \cdot w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy;

(iii) si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont suites bornées, alors $(v_n + \lambda \cdot w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite bornée.

Preuve. Si $\lambda = 0$, il n'y a rien à démontrer (dans les trois cas), donc on va supposer désormais $\lambda \neq 0$.

On démontrera d'abord l'item (i). Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers v et w, respectivement, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n'_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N(v - v_n) < \varepsilon$ et la condition $n \geq n'_0$ implique que $N(w - w_n) < \varepsilon$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on définit $\bar{n}_0(\varepsilon) = \max(n_0(\varepsilon/2), n_0(\varepsilon/(2|\lambda|))) \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq \bar{n}_0(\varepsilon)$, on a

$$N\big((v+\lambda\cdot w)-(v_n+\lambda\cdot w_n)\big) = N\big((v-v_n)+\lambda\cdot(w-w_n)\big) \leq N(v-v_n)+|\lambda|N(w-w_n) < \frac{\varepsilon}{2}+|\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon,$$

i.e. la suite $(v_n + \lambda w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v + \lambda \cdot w$.

On va procéder à démontrer l'item (ii). Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de Cauchy, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n'_1 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N(v_n - v_m) < \varepsilon$ et la condition $n, m \geq n'_1$ implique que $N(w_n - w_m) < \varepsilon$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on définit $\bar{n}_1(\varepsilon) = \max(n_1(\varepsilon/2), n_1(\varepsilon/(2|\lambda|))) \in \mathbb{N}$. Pour tous $n, m \geq \bar{n}_1(\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} N\big((v_n + \lambda \cdot w_n) - (v_m + \lambda \cdot \cdot w_m)\big) &= N\big((v_n - v_m) + \lambda \cdot (w_n - w_m)\big) \leq N(v_n - v_m) + |\lambda| N(w_n - w_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

i.e. la suite $(v_n + \lambda w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Finalement, on va démontrer l'item (iii). Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites bornées, alors il existe $C > 0$ et $C' > 0$ tels que $N(v_n) < C$ et $N(w_n) < C'$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $N(v_n + \lambda \cdot w_n) \leq N(v_n) + |\lambda| N(w_n) < C + |\lambda C'|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* la suite $(v_n + \lambda \cdot w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Proposition 1.6.4. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite.*

(i) Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy.

(ii) Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est bornée.

Preuve. On démontrera d'abord l'item (i). On suppose alors que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est $v \in \mathbb{E}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N(v - v_n) < \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $n_1(\varepsilon) = n_0(\varepsilon/2)$. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n, m \geq n_1(\varepsilon)$, on trouve alors

$$N(v_n - v_m) = N(v_n - v + v - v_m) \leq N(v_n - v) + N(v - v_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

i.e. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

On démontrera finalement l'item (ii). On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N(v_n - v_m) < \varepsilon$. On prend $\varepsilon = 1$. Alors pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n, m \geq n_1(1)$, on a que $N(v_n - v_m) < 1$. En conséquence,

$$N(v_n) = N(v_n - v_{n_1(1)} + v_{n_1(1)}) \leq N(v_n - v_{n_1(1)}) + N(v_{n_1(1)}) < 1 + N(v_{n_1(1)}),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1(1)$. Soit

$$C' = \max_{i \in [\![1, n_1(1)]\!]} \big(N(x_i)\big) \geq 0$$

et $C = \max(C', 1 + N(v_{n_1(1)}))$. C'est clair que $C > 0$ et que $N(v_n) < C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. On rappelle qu'une **propriété** sur les suites à valeurs dans $\mathbb{E}$ est par définition une partie de $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$. Soit

$$\mathcal{P} : \mathrm{Norm}(\mathbb{E}) \to \mathscr{P}\big(\mathbb{E}^{\mathbb{N}}\big)$$

une application. De façon intuitive, pour une norme $N \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$ sur $\mathbb{E}$, $\mathcal{P}(N)$ dénote une propriété sur les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ qui est définie en termes de N. Par exemple, on peut considérer l'application

$$\mathcal{P}_{\mathrm{conv}} : \mathrm{Norm}(\mathbb{E}) \to \mathscr{P}\big(\mathbb{E}^{\mathbb{N}}\big)$$

donnée par

$$\mathcal{P}_{\mathrm{conv}}(N) = \big\{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}} : (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergent}\big\}$$

pour tout $N \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$. De façon analogue, on peut aussi considérer les applications

$$\mathcal{P}_{\mathrm{dC}}, \mathcal{P}_{\mathrm{bor}} : \mathrm{Norm}(\mathbb{E}) \to \mathscr{P}\big(\mathbb{E}^{\mathbb{N}}\big)$$

données par

$$\mathcal{P}_{\mathrm{dC}}(N) = \big\{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}} : (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy}\big\}$$

et

$$\mathcal{P}_{\mathrm{bor}}(N) = \big\{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}} : (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est borné}\big\}$$

pour tout $N \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$. On dira qu'une application $\mathcal{P}$ comme ci-dessus est **fortement topologique** si $\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(N')$ pour toute paire de normes $N, N' \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$ équivalentes. Le résultat suivant nous dit que les propriétés $\mathcal{P}_{\mathrm{conv}}$ d'être convergent, $\mathcal{P}_{\mathrm{dC}}$ d'être de Cauchy et $\mathcal{P}_{\mathrm{bor}}$ d'être borné sont fortement topologiques.

Proposition 1.6.5. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit N' une norme sur $\mathbb{E}$ équivalente à N. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite. On a les résultats suivants:*

(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v \in \mathbb{E}$ pour N si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v \in \mathbb{E}$ pour N';

(ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour N si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour N';

(iii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite bornée pour* N *si et seulement si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite bornée pour* N'.

Preuve. On suppose qu'il existe $C, C' \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$CN(v) \leq N'(v) \leq C'N(v),$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$. C'est clair que pour tous les items, il suffit de démontrer que si la propriété est vérifiée pour N alors elle est aussi vérifiée pour N'.

On démontrera d'abord l'item (i). Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N(v - v_n) < \varepsilon$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on définit $n'_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon/C') \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq n'_0(\varepsilon)$, on a

$$N'(v - v_n) \leq C'N(v - v_n) < C'\frac{\varepsilon}{C'} = \varepsilon,$$

i.e. la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v pour N'.

On va procéder à démontrer l'item (ii). Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N(v_n - v_m) < \varepsilon$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on définit $n'_1(\varepsilon) = n_1(\varepsilon/C') \in \mathbb{N}$. Pour tous $n, m \geq n'_1(\varepsilon)$, on a

$$N'(v_n - v_m) \leq C'N(v_n - v_m) < C'\frac{\varepsilon}{C'} = \varepsilon,$$

i.e. la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour N'.

Finalement, on va démontrer l'item (iii). Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suites bornée, alors il existe $\bar{C} > 0$ tel que $N(v_n) < \bar{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $N'(v_n) \leq C'N(v_n) < C'\bar{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Le résultat suivant est immédiat. On laisse la preuve au lecteur.

Proposition 1.6.6. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espaces vectoriels et* $T : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ *une application linéaire injective. On suppose que* $\mathbb{E}$ *est muni d'une norme* $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*. On considère la norme* $N_T : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *donnée par* $N_T = N \circ T$ *(voir la Proposition 1.2.1). Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ *une suite. Alors,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* $v \in \mathbb{F}$ *(resp., de Cauchy, bornée) pour* N_T *si et seulement si* $(T(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* $T(v) \in \mathbb{E}$ *(resp., de Cauchy, bornée) pour* N.

Proposition 1.6.7. *Soient* $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ *des espaces vectoriels munis des normes* $N_1, \dots, N_n$*, respectivement. On considère le produit cartésien* $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$*. Soit* $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ *une suite. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on écrit* $x_n = x_{n,i} \in \mathbb{E}_i$ *avec* $i \in [\![1, n]\!]$*. Alors* $(x_{n,i}) \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ *est une suite pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*. On a les résultats suivants:*

(i) $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ *converge vers* $x_{\lim} = (x_{\lim,1}, \dots, x_{\lim,n}) \in \mathbb{E}$ *pour* $N_{\max}$ *(ou* N_{sum}*) si et seulement si* $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ *converge vers* $x_{\lim,i} \in \mathbb{E}_i$ *pour* N_i *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*;*

(ii) $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy pour* $N_{\max}$ *(ou* N_{sum}*) si et seulement si* $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy pour* N_i *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*;*

(iii) $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ *est une suite bornée pour* $N_{\max}$ *(ou* N_{sum}*) si et seulement si* $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ *est une suite bornée pour* N_i *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$.

Preuve. On note d'abord que, vu que $N_{\max}$ et N_{sum} sont des normes équivalentes sur $\mathbb{E}$ (voir la Proposition 1.5.4), la Proposition 1.6.5 nous dit qu'une suite est convergente (resp., de Cauchy, bornée) pour $N_{\max}$ si et seulement si elle est convergente (resp., de Cauchy, bornée) pour N_{sum}. Cela nous dit qu'il suffit de démontrer les items précédents avec $N_{\max}$.

On montrera d'abord l'item (i). Supposons que $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ converge vers $x_{\lim} = (x_{\lim,1}, \dots, x_{\lim,n}) \in \mathbb{E}$ pour $N_{\max}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N_{\max}(x_{\lim} - x_n) < \varepsilon$. Comme $N_i(x_{\lim,i} - x_{n,i}) \leq N_{\max}(x_{\lim} - x_n)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N_i(x_{\lim,i} - x_{n,i}) < \varepsilon$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, *i.e.* $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ converge vers $x_{\lim,i} \in \mathbb{E}_i$ pour N_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On suppose maintenant que $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ converge vers $x_{\lim,i} \in \mathbb{E}_i$ pour N_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cela veut dire que pour tous $\varepsilon > 0$ et $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $n_{0,i} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_{0,i}$ implique que $N_i(x_{\lim,i} - x_{n,i}) < \varepsilon$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on prend $n_{0,i} \in \mathbb{N}$ comme ci-dessus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On pose

$$n_0 = \max_{i \in [\![1,n]\!]} (n_{0,i}).$$

On voit bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la condition $n \geq n_0$ implique que $N_i(x_{\lim,i} - x_{n,i}) < \varepsilon$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui nous dit que $N_{\max}(x_{\lim} - x_n) < \varepsilon$ par la définition de maximum. En conséquence, $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ converge vers $x_{\lim} = (x_{\lim,1}, \ldots, x_{\lim,n}) \in \mathbb{E}$ pour $N_{\max}$.

On montrera maintenant l'item (ii). Supposons que $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $N_{\max}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N_{\max}(x_n - x_m) < \varepsilon$. Comme $N_i(x_{n,i} - x_{m,i}) \leq N_{\max}(x_n - x_m)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N_i(x_{n,i} - x_{m,i}) < \varepsilon$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, *i.e.* $(x_{n,i})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour N_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On suppose maintenant que $(x_{n,i})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour N_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cela veut dire que pour tous $\varepsilon > 0$ et $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $n_{1,i} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_{0,i}$ implique que $N_i(x_{n,i} - x_{m,i}) < \varepsilon$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on prend $n_{1,i} \in \mathbb{N}$ comme ci-dessus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On pose

$$n_1 = \max_{i \in [\![1,n]\!]} (n_{1,i}).$$

On voit bien que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la condition $n, m \geq n_1$ implique que $N_i(x_{n,i} - x_{m,i}) < \varepsilon$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui nous dit que $N_{\max}(x_n - x_m) < \varepsilon$ par la définition de maximum. En conséquence, $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $N_{\max}$.

On montrera finalement l'item (iii). Supposons que $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée pour $N_{\max}$. Alors, il existe $C > 0$ tel que $N_{\max}(x_n) < C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $N_i(x_{n,i}) \leq N_{\max}(x_n) < C$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $(x_{n,i})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée pour N_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Réciproquement, supposons que $(x_{n,i})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}_i^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée pour N_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ il existe $C_i > 0$ tel que $N_i(x_{n,i}) < C_i$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $C = \max(C_1, \ldots, C_n)$. Comme $N_i(x_{n,i}) < C_i \leq C$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $N_{\max}(x_n) < C$, par la définition de maximum. Cela nous dit que $(x_n) \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée pour $N_{\max}$. □

1.7 Espaces complets

Définition 1.7.1. *Soit* $(\mathbb{E}, N)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(\mathbb{E}, N)$ *est* ***complet*** *si toute suite de Cauchy* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ *admet une limite* $v \in \mathbb{E}$. *Par abus de notation, on dira plus simplement que* $\mathbb{E}$ *est* ***complet****, où la norme est sous-entendue.*

Exemple 1.7.2. *On admettra que l'espace vectoriel* $(\mathbb{R}, |\ |)$ *est complet. Il s'agit d'une conséquence de la construction des nombres réels.*

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et soit $\mathcal{P}$ une propriété sur les normes sur $\mathbb{E}$, *i.e.* une partie de $\mathrm{Norm}(\mathbb{E})$. De la même façon que dans le cas de suites, on dira que $\mathcal{P}$ est **fortement topologique** si, pour toute norme N' sur $\mathbb{E}$ équivalente à N, $N \in \mathcal{P}$ si et seulement si $N' \in \mathcal{P}$. Par exemple, soit

$$\mathcal{P} = \big\{ N \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E}) : (\mathbb{E}, N) \text{ est complet} \big\}.$$

Le résultat suivant nous dit que la propriété précédente est fortement topologique.

Proposition 1.7.3. *Soit* $(\mathbb{E}, N)$ *un espace vectoriel normé et soit* N' *une norme sur* $\mathbb{E}$ *équivalente à* N. *Alors* $(\mathbb{E}, N)$ *est complet si et seulement si* $(\mathbb{E}, N')$ *est complet.*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la Proposition 1.6.5. □

Proposition 1.7.4. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espaces vectoriels et* $T : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ *une application linéaire bijective. On suppose que* $\mathbb{E}$ *est muni d'une norme* $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et on considère la norme* $N_T : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *donnée par* $N_T = N \circ T$ *(voir la Proposition 1.2.1). Alors,* $(\mathbb{E}, N)$ *est complet si et seulement si* $(\mathbb{F}, N_T)$ *est complet.*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence directe de la Proposition 1.2.1. □

Proposition 1.7.5. *Soient $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$ des espaces vectoriels munis des normes $N_1, \ldots, N_n$, respectivement. On considère le produit cartésien $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$. Si $(\mathbb{E}_i, N_i)$ est complet pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $(\mathbb{E}, N_{\max})$ et $(\mathbb{E}, N_{\text{sum}})$ sont complets.*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la Proposition 1.6.7. □

Exemple 1.7.6. *Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Comme la norme $\| \ \|_\infty$ (resp., $\| \ \|_1$) sur $\mathbb{R}^n$ est précisément la norme $N_{\max}$ (resp., N_{sum}) sur $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n facteurs), où chaque $\mathbb{R}$ est muni de la norme donnée par la valeur absolue et $(\mathbb{R}, | \ |)$ est complet, alors $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ et $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$ sont des espaces vectoriels normés complets.*

Non-exemple 1.7.7. *On va voir après que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet (voir Corollaire 1.13.1). Ce résultat n'est pas vrai si l'on considère des espaces vectoriels normés de dimension infinie. Par exemple, soit $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel formé de toutes les fonctions polynomiales $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme*

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

On peut démontrer que $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé. Par contre, il n'est pas complet. En effet, on considère par exemple la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ donnée par

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!},$$

pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Ce n'est pas difficile à montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy (pour $\| \ \|$) mais elle n'a pas de limite dans $\mathbb{E}$. De façon un peu intuitive, la limite "devrait" être la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$, pour $x \in [0, 1]$, qui n'est pas polynômiale.

On autre example d'espace non complet peut s'obtenir si l'on travaille sur des espaces vectoriels définis sur un corps autre que $\mathbb{R}$. En particulier, on remarque d'abord que toutes les définitions que l'on a considéré de norme, suites et complétude ont du sens si l'on travaille avec des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{Q}$ de nombres rationnels. Dans ce cas, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 1, muni de la norme donnée par la valeur absolue, n'est pas complet. Sans rentrer dans les détails, qui nécessitent d'une étude plus approfondie de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$, on peut montrer que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ donnée par

$$q_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite de Cauchy qui n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$. De façon intuitive, la limite de $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ serait e (dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue), qui n'est pas rationnel.

1.8 Première preuve de l'équivalence de normes sur un espace vectoriel de dimension finie (optionnel)

On va donner une première démonstration de l'équivalence de normes sur un espace vectoriel de dimension finie. Par contre, on ne va pas utiliser ce résultat dans les sections 1.9-1.12 suivantes. On verra plus tard une autre preuve, plus simple, qui utilise la notion de compacité.

Théorème 1.8.1. *Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et soient N et N' deux normes sur $\mathbb{E}$. Alors, N et N' sont équivalentes.*

Preuve. Soit $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{E}$ une base (ordonnée) de $\mathbb{E}$. On considère l'application $T : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ qui associe à chaque $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ (où $c_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$) le n-uplet $T(v) = (c_1, \ldots, c_n)$. On définit $N_\infty : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ via $N_\infty = \| \ \|_\infty \circ T$. D'après la Proposition 1.2.1, N_∞ est une norme sur $\mathbb{E}$. C'est clair que

$$N_\infty(v) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(|c_i|\big), \tag{1.8.1}$$

pour tout $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i \in \mathbb{E}$. Comme l'équivalence de normes est une relation d'équivalence (voir la Proposition 1.5.3), on peut supposer sans perte de généralité que $N' = N_\infty$.

D'abord, on voit bien que

$$N(v) = N\bigg(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\bigg) \leq \sum_{i=1}^{n} N(c_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} |c_i| N(v_i),$$

pour tout $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \in \mathbb{E}$. Soit $C' = \sum_{i=1}^{n} N(v_i)$. Comme $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{E}$ est une base, $N(v_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui dit que $C' > 0$. Alors, (1.8.1) implique que

$$N(v) \leq C' N_\infty(v),$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$.

On va démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$N(v) \geq C N_\infty(v), \tag{1.8.2}$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$. On va procéder par induction sur la dimension n de $\mathbb{E}$. Le cas $n = 1$ suit directement de la Proposition 1.4.1. On suppose désormais que $n > 1$ et que le théorème est vrai pour les espaces vectoriels de dimension (strictement) inférieure à n. On va procéder par l'absurde. Supposons alors que (1.8.2) n'est pas vérifiée dans $\mathbb{E}$, *i.e.* pour tout $C > 0$, il existe $w \in \mathbb{E}$ (forcement non nul) tel que $N(w) < C N_\infty(w)$. De façon équivalente, pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, il existe $w_m \in \mathbb{E}$ (forcement non nul) tel que

$$N(w_m) < \frac{1}{m} N_\infty(w_m).$$

Comme $w_m \neq \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $N_\infty(w_m) \neq 0$. On définit $\bar{w}_m = w_m / N_\infty(w_m) \in \mathbb{E}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Alors, l'hypothèse de l'absurde est équivalente à dire qu'il existe une suite $(\bar{w}_m)_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ telle que $N_\infty(\bar{w}_m) = 1$ et

$$N(\bar{w}_m) < \frac{1}{m}, \tag{1.8.3}$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Comme $\mathscr{B}$ est une base, on peut écrire $\bar{w}_m = \sum_{i=1}^{n} d_{i,m} v_i$, pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. On définit $A_j = \{m \in \mathbb{Z}_{>0} : |d_{m,j}| = 1\}$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. C'est clair qu'il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que l'ensemble A_j soit infini. En effet, comme $N_\infty(\bar{w}_m) = 1$, pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\cup_{j=1}^{n} A_j = \mathbb{Z}_{>0}$. Si A_j est fini pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, alors $\cup_{j=1}^{n} A_j = \mathbb{Z}_{>0}$ est fini, ce qui est absurde.

Soit $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que l'ensemble A_j soit infini. On pose $A_{j_0}^+ = \{m \in \mathbb{Z}_{>0} : d_{m,j_0} = 1\}$ et $A_{j_0}^- = \{m \in \mathbb{Z}_{>0} : d_{m,j_0} = -1\}$. Comme $A_{j_0}^+ \cup A_{j_0}^- = A_{j_0}$ et A_{j_0} est infini, $A_{j_0}^+$ est infini ou $A_{j_0}^-$ est infini. On suppose sans perte de généralité que $A_{j_0}^+$ est infini (sinon, il faut changer $\bar{w}_m$ par $-\bar{w}_m$, pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$). Il existe alors une application croissante et bijective $\phi : \mathbb{Z}_{>0} \to A_{j_0}^+$. Soit $\tilde{w}_m = \bar{w}_{\phi(m)}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, et soit $\mathbb{F}$ l'espace vectoriel engendré par $\mathscr{B} \setminus \{v_{j_0}\}$. Alors, $\mathbb{F}$ a dimension $n-1$ et, par récurrence, toutes les normes sur $\mathbb{F}$ sont équivalentes. On remarque que $\mathbb{F}$ est complet pour la norme $N_\infty|_{\mathbb{F}}$, d'après la Proposition 1.7.4. Comme les normes $N|_{\mathbb{F}}$ et $N_\infty|_{\mathbb{F}}$ sont équivalentes, $\mathbb{F}$ est complet pour la norme $N|_{\mathbb{F}}$.

On pose $\tilde{u}_m = \bar{w}_{\phi(m)} - v_{j_0}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. C'est clair que $(\tilde{u}_m)_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{F}$. Soit $\varepsilon > 0$. On prend $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 > 2/\varepsilon$. Alors,

$$N(\tilde{u}_n - \tilde{u}_m) = N(\tilde{w}_n - \tilde{w}_m) < N(\tilde{w}_n) + N(\tilde{w}_m) < \frac{1}{\phi(n)} + \frac{1}{\phi(m)} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{n_1} < \varepsilon,$$

pour tous $n, m \geq n_1$, où l'on a appliqué (1.8.3) au troisième membre, et le fait que $\phi(n) \geq n$ au quatrième membre. Cela nous dit que $(\tilde{u}_m)_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{F}$ pour la norme Comme $\mathbb{F}$ est complet pour la norme $N|_{\mathbb{F}}$, alors $(\tilde{u}_m)_{m \in \mathbb{Z}_{>0}}$ a une limite $\tilde{u} \in \mathbb{F}$ pour $N|_{\mathbb{F}}$. En conséquence,

$$\begin{aligned} 0 \leq N(\tilde{u} + v_{j_0}) &= N(\tilde{u} - \tilde{u}_m + \tilde{u}_m + v_{j_0}) \leq N(\tilde{u} - \tilde{u}_m) + N(\tilde{u}_m + v_{j_0}) = N(\tilde{u} - \tilde{u}_m) + N(\tilde{w}_m) \\ &< N(\tilde{u} - \tilde{u}_m) + \frac{1}{\phi(m)} \leq N(\tilde{u} - \tilde{u}_m) + \frac{1}{m}, \end{aligned} \tag{1.8.4}$$

pour tout $m \geq n_1$. Si l'on prend la limite quand m tend vers plus $+\infty$, le dernier membre de 1.8.4 tend vers zéro. Cela implique que la limite de $N(\tilde{u} + v_{j_0})$ quand m tend vers plus $+\infty$ est aussi zéro. Comme $N(\tilde{u} + v_{j_0})$ ne dépend pas de m, on conclut que $N(\tilde{u} + v_{j_0}) = 0$, *i.e.* $\tilde{u} + v_{j_0} = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$. Cela donne une contradiction, puisque $\tilde{u} \in \mathbb{F}$ et v_{j_0} forment un ensemble libre. En conséquence, (1.8.2) est vérifiée et N et N_∞ sont équivalentes. $\square$

Remarque 1.8.2. *On remarque que le théorème précédent n'est pas valable dans le cas des espaces vectoriels de dimension infinie. On verra des exemples dans la dernière fiche d'exercices.*

1.9 Premières définitions topologiques: ouverts et fermés

Définition 1.9.1. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $U \subseteq \mathbb{E}$. On dit que U est **ouvert** (pour N) si, pour tout $v \in U$, il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(v, r) \subseteq U$. Un ensemble $F \subseteq \mathbb{E}$ est **fermé** (pour N) si $\mathbb{E} \setminus F$ est ouvert.*

*Plus généralement, soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, N)$. Un ensemble $U \subseteq S$ est dit un **ouvert relatif de** S (pour N) si, pour tout $v \in U$, il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(v, r) \cap S \subseteq U$. Un ensemble $F \subseteq S$ est un **fermé relatif de** S (pour N) si $S \setminus F$ est un ouvert relatif de S. On dira souvent **ouvert de** S (resp., **fermé de** S) au lieu de ouvert relatif de S (resp., fermé relatif de S). C'est clair qu'un ensemble $T \subseteq \mathbb{E}$ est un ouvert relatif de $\mathbb{E}$ (resp., fermé relatif de $\mathbb{E}$) si et seulement si T est ouvert (resp., fermé).*

Exemple 1.9.2. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie quelconque. Alors les ensembles S et $\emptyset$ sont des ouverts relatifs de S. Cela implique que S et $\emptyset$ sont aussi des fermés relatifs de S.*

Le résultat suivant nous donne l'un des exemples les plus importants d'ensemble ouvert.

Proposition 1.9.3. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé, $v \in \mathbb{E}$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Alors la boule ouverte $B_N(v, r)$ es un ensemble ouvert.*

Preuve. Soit $w \in B_N(v, r)$. Il faut montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(w, s) \subseteq B_N(v, r)$. Comme $w \in B_N(v, r)$, $N(w - v) < r$, *i.e.* $r - N(w - v) > 0$. On pose $s = r - N(w - v)$. On va montrer que $B_N(w, s) \subseteq B_N(v, r)$. Soit $u \in B_N(w, s)$, *i.e.* $N(u - w) < s = r - N(w - v)$. Cela équivaut à $N(u - w) + N(w - v) < r$. Or, $N(u - v) = N(u - w + w - v) \leq N(u - w) + N(w - v) < r$, *i.e.* $u \in B_N(v, r)$, comme on voulait démontrer. □

Avant de préciser quelques propriétés des ensembles ouverts, on rappelle que, étant donné une famille $\{S_i\}_{i \in I}$ de parties d'un ensemble S, la **réunion** (ou l'**union**) de la famille est

$$\bigcup_{i \in I} C_i = \{v \in S : \text{ il existe } i \in I \text{ tel que } v \in S_i\},$$

et l'**intersection** de la famille est donnée par

$$\bigcap_{i \in I} C_i = \{v \in S : v \in S_i \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Lemme 1.9.4. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie.*

(i) Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille de parties ouvertes de S, indexé par un ensemble arbitraire I. Alors la réunion $\cup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de S. En plus, si I est fini, l'intersection $\cap_{i \in I} U_i$ est un ouvert de S.

(ii) Soit $\{F_i\}_{i \in I}$ une famille de parties fermées de S, indexé par un ensemble arbitraire I. Alors l'intersection $\cap_{i \in I} F_i$ est un fermé de S. En plus, si I est fini, la réunion $\cup_{i \in I} F_i$ est un fermé de S.

Preuve. On va démontrer seulement les énoncés pour les ensembles ouverts de S, puisque les propriétés pour les ensembles fermés de S est un corollaire. En effet, le cas des ensembles fermés suit des égalités standards des ensembles

$$S \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} F_i \Big) = \bigcup_{i \in I} (S \setminus F_i) \text{ et } S \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} F_i \Big) = \bigcap_{i \in I} (S \setminus F_i).$$

On va montrer d'abord que $\cup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de S. Soit $v \in \cup_{i \in I} U_i$. Alors, il existe $i \in I$ tel que $v \in U_i$. Comme U_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_N(v, r) \cap S \subseteq U_i \subseteq \cup_{i \in I} U_i$. Cela nous dit que $\cup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de S.

On suppose par ailleurs que I est fini et soit $v \in \cap_{i\in I} U_i$. Alors, pour tout $i \in I$, $v \in U_i$. Comme U_i est ouvert, il existe $r_i > 0$ tel que $B_N(v, r_i) \cap S \subseteq U_i$. Soit $r = \min(r_i : i \in I)$. Comme I est fini, $r > 0$. En plus, $B_N(v, r) \subseteq B_N(v, r_i) \cap S \subseteq U_i$, pour tout $i \in I$. Cela nous dit que $B_N(v, r) \subseteq \cap_{i\in I} U_i$ et que $\cap_{i\in I} U_i$ est un ouvert de S. □

On a la caractérisation suivante d'ensembles ouverts et fermés relatifs.

Proposition 1.9.5. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Un ensemble $T \subseteq S$ est un ouvert relatif de S (resp., un fermé relatif de S) si et seulement s'il existe un ouvert (resp., un fermé) $\hat{T} \subseteq \mathbb{E}$ tel que $T = \hat{T} \cap S$.*

Preuve. On suppose que T est un ouvert relatif de S. Par définition, pour tout $v \in T$, il existe $r_v \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(v, r_v) \cap S \subseteq T$. Soit $\hat{T} = \cup_{v\in T} B_N(v, r_v)$. Comme les boules ouvertes sont des ensembles ouverts, d'après la Proposition 1.9.3, et la réunion arbitraire d'ouverts est un ensemble ouvert, d'après le Lemme 1.9.4, $\hat{T}$ est un ouvert. Comme $T \subseteq \hat{T}$, c'est clair que $T \subseteq \hat{T} \cap S$. En outre,

$$\hat{T} \cap S = \left(\bigcup_{v\in T} B_N(v, r_v) \right) \cap S = \bigcup_{v\in T} \big(B_N(v, r_v) \cap S \big) \subseteq T,$$

puisque $B_N(v, r_v) \cap S \subseteq T$ pour tout $v \in T$. Cela nous dit que $T = \hat{T} \cap S$. Réciproquement, o suppose qu'il existe un ouvert $\hat{T} \subseteq \mathbb{E}$ tel que $T = \hat{T} \cap S$. Comme $\hat{T}$ est un ouvert, pour tout $v \in T$, il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(v, r) \subseteq \hat{T}$, ce qui implique $B_N(v, r) \cap S \subseteq \hat{T} \cap S = T$, *i.e.* T est un ouvert relatif de S.

L'énoncé pour les fermés est un corollaire de l'énoncé pour les ouverts. En effet, T est un fermé relatif de S si et seulement si $S \setminus T$ est un ouvert relatif de S. Cela équivaut à l'existence d'un ensemble ouvert $\hat{U} \subseteq \mathbb{E}$ tel que $\hat{U} \cap S = S \setminus T$, qui est équivalent à l'existence d'un ensemble fermé $\hat{T} \subseteq \mathbb{E}$ tel que $(\mathbb{E} \setminus \hat{T}) \cap S = S \setminus T$. En prenant le complémentaire, la dernière égalité équivaut à $\hat{T} \cap S = T$, ce qui montre le résultat. □

D'après le résultat précédent, on voit que l'étude des propriétés d'ensembles ouvertes et fermés relatifs suit généralement de l'étude des propriétés d'ensembles ouvertes et fermés, donc on va se concentrer souvent à considérer la dernière, sans que cela représente une perte de généralité.

Définition 1.9.6. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. On définit l'**intérieur** S° de S (pour N) par*

$$S^\circ = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert}, \\ U \subseteq S}} U.$$

*Par la Proposition 1.9.4, S° est un ensemble ouvert. En outre, on définit l'**adhérence** $\bar{S}$ de S (pour N) par*

$$\bar{S} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé}, \\ S \subseteq F}} F.$$

*La Proposition 1.9.4 nous dit que $\bar{S}$ est un ensemble fermé. On définit la **frontière** ∂S de S (pour N) par $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$.*

Remarque 1.9.7. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Noter que $S^\circ \subseteq S \subseteq \bar{S}$. En outre, c'est clair que S est ouvert (resp., fermé) si et seulement si $S = S^\circ$ (resp., $S = \bar{S}$). En particulier, S est fermé si et seulement si $\partial S \subseteq S$.*

On a la caractérisation suivante d'intérieur d'une partie.

Proposition 1.9.8. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Alors,*

$$S^\circ = \{x \in \mathbb{E} : \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } B_N(x, r) \subseteq S\}.$$

Preuve. On définit

$$S^i = \{x \in \mathbb{E} : \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } B_N(x, r) \subseteq S\}.$$

Il faut montrer que $S^\circ = S^i$.

D'abord, on voit bien que, si $x \in S^i$, il existe $r > 0$ tel que $x \in B_N(x,r) \subseteq S$, ce qui implique que $x \in S$. En conséquence, $S^i \subseteq S$. En plus, on affirme que S^i est un ouvert. En effet, si $x \in S^i$, il existe $r > 0$ tel que $B_N(x,r) \subseteq S$. Comme $B_N(x,v)$ est ouvert (voir la Proposition 1.9.3), pour tout $y \in B_N(x,v)$ il existe $s > 0$ tel que $B_N(y,s) \subseteq B_N(x,r) \subseteq S$, *i.e.* $y \in S^i$. Comme $S^i \subseteq S$ et S^i est ouvert, $S^i \subseteq S^\circ$.

Finalement, si $x \in S^\circ$, il existe $r > 0$ tel que $x \in B_N(x,r) \subseteq S^\circ$, puisque S° est ouvert. L'inclusion $S^\circ \subseteq S$ nous dit alors que $B_N(x,r) \subseteq S$, ce qui implique que $x \in S^i$. En conséquence, $S^\circ \subseteq S^i$, comme on voulait démontrer. □

Définition 1.9.9. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. On dit que S est **borné** (pour N) s'il existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $N(v) < C$, pour tout $v \in S$.*

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. On rappelle qu'une **propriété** sur les parties de $\mathbb{E}$ est par définition une partie de $\mathscr{P}(\mathbb{E})$. Soit

$$\mathcal{P} : \mathrm{Norm}(\mathbb{E}) \to \mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\mathbb{E})\big)$$

une application. De façon intuitive, pour une norme $N \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$ sur $\mathbb{E}$, $\mathcal{P}(N)$ dénote une propriété sur les parties de $\mathbb{E}$ qui est définie en termes de N. Par exemple, on peut considérer les applications

$$\mathcal{P}_{\mathrm{o}}, \mathcal{P}_{\mathrm{f}}, \mathcal{P}_{\mathrm{b}} : \mathrm{Norm}(\mathbb{E}) \to \mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\mathbb{E})\big)$$

données par

$$\mathcal{P}_{\mathrm{o}}(N) = \big\{U \in \mathscr{P}(\mathbb{E}) : U \text{ est un ensemble ouvert de } (\mathbb{E}, N)\big\},$$

$$\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(N) = \big\{F \in \mathscr{P}(\mathbb{E}) : F \text{ est un ensemble fermé de } (\mathbb{E}, N)\big\}$$

et

$$\mathcal{P}_{\mathrm{b}}(N) = \big\{B \in \mathscr{P}(\mathbb{E}) : B \text{ est un ensemble borné de } (\mathbb{E}, N)\big\},$$

pour tout $N \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$. On dira qu'une application $\mathcal{P}$ comme ci-dessus est **fortement topologique** si $\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(N')$ pour toute paire de normes $N, N' \in \mathrm{Norm}(\mathbb{E})$ équivalentes. Le résultat suivant nous dit que les notions $\mathcal{P}_{\mathrm{o}}$ d'être ouvert, $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}$ d'être fermé et $\mathcal{P}_{\mathrm{b}}$ d'être borné sont fortement topologiques.

Proposition 1.9.10. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Soient N et N' deux normes équivalentes sur $\mathbb{E}$. Alors, S est ouvert (resp., fermé, borné) pour N si et seulement si S est ouvert (resp., fermé, borné) pour N'.*

Preuve. On suppose qu'il existe $C, C' \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$CN(v) \leq N'(v) \leq C'N(v),$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$. C'est clair que pour chaque propriété, il suffit de montrer que si elle est vérifiée pour N alors elle est aussi vérifiée pour N'.

On suppose que S est ouvert pour N. Alors, pour tout $w \in S$, il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(w,r) \subseteq S$. On affirme que $B_{N'}(w, Cr) \subseteq S$. En effet, soit $u \in B_{N'}(w, Cr)$, *i.e.* $N'(u-w) < Cr$, alors $CN(u-w) \leq N'(u-w) < Cr$, ce qui nous dit que $N(u-w) < r$, *i.e.* $u \in B_N(w,r) \subseteq S$, comme on voulait démontrer. Cela implique que S est ouvert pour N'. Si S est fermé pour N, *i.e.* $\mathbb{E} \setminus S$ est ouvert pour N, alors l'argument précédent nous dit que $\mathbb{E} \setminus S$ est ouvert pour N', *i.e.* S est fermé pour N'.

Finalement, on suppose que S est borné pour N. Alors, il existe $\bar{C} \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $N(v) \leq \bar{C}$, pour tout $v \in S$. Alors $N'(v) \leq C'N(v) \leq C'\bar{C}$, pour tout $v \in S$, ce qui dit que S est borné pour N'. □

1.10 Lien entre la convergence de suites et la topologie

Le résultat suivant met en évidence le lien très fort qui existe entre la notion de convergence de suites et les notions topologiques introduites dans la Section 1.9.

Proposition 1.10.1. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Alors, S est fermé si et seulement la limite de toute suite convergente $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S apparient à S.*

Preuve. On suppose d'abord que S est fermé et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite $v \in \mathbb{E}$. Il faut montrer que sa limite v apparient à S. Supposons que $v \in \mathbb{E} \setminus S$. Comme S est fermé, alors $\mathbb{E} \setminus S$ est ouvert, ce qui nous dit qu'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(v, r) \subseteq \mathbb{E} \setminus S$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ converge vers v, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(v_n - v) < r$ pour tout entier $n \geq n_0$. En conséquence, $v_n \in B_N(v, r) \subseteq \mathbb{E} \setminus S$ pour tout entier $n \geq n_0$. Comme $v_n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a trouvé un absurde.

Réciproquement, on suppose que la limite de toute suite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S apparient à S. On va montrer que S est fermé. Supposons que ce n'est pas le cas. Cela veut dire qu'il existe $v \in \mathbb{E} \setminus S$ tel que, pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$, il existe $w_r \in S$ tel que $N(w_r - v) < r$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $v_n = w_{1/n}$ tel que $v_n \in S$ tel que $N(w_n - v) < 1/n$. Cela nous dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S converge vers un élément $v \in \mathbb{E} \setminus S$, ce qui est absurde. □

Exemple 1.10.2. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et $v \in \mathbb{E}$. Alors $S = \{v\}$ est un ensemble fermé. En effet, toute suite à valeurs dans S est constante, avec limite $v \in S$. Comme l'union fini de fermés est fermée, tout ensemble fini est fermé.*

Une conséquence assez directe de la caractérisation précédente d'ensemble fermé est l'exemple suivant.

Exemple 1.10.3. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé, $v \in \mathbb{E}$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Alors la boule fermée $\bar{B}_N(v, r)$ est un ensemble fermé. En effet, on affirme que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{B}_N(v, r)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $w \in \mathbb{E}$, alors $w \in \bar{B}_N(v, r)$. Comme $w_n \in \bar{B}_N(v, r)$, $N(w_n - v) \leq r$, ce qui nous dit que*

$$N(w - v) \leq N(w - w_n) + N(w_n - v) \leq N(w - w_n) + r,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve que $N(w - v) \leq r$, i.e. $w \in \bar{B}_N(v, r)$, comme on voulait montrer.

Une autre version de la relation entre la notion de convergence et la notion de topologie est la suivante.

Proposition 1.10.4. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Alors, $v \in \bar{S}$ si et seulement s'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ qui converge vers v.*

Preuve. Soit $\hat{S} \subseteq \mathbb{E}$ l'ensemble formé de toutes les limites (dans $\mathbb{E}$) des suites convergentes $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S. Il faut démontrer que $\hat{S} = \bar{S}$.

On remarque d'abord que $S \subseteq \hat{S}$. En effet, pour tout $v \in S$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S donnée par $v_n = v$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est convergente et sa limite est v, *i.e.* $v \in \hat{S}$. On va maintenant montrer que $\hat{S}$ est un ensemble fermé. D'après la Proposition 1.10.1, il suffit de montrer que la limite $\hat{v}$ de toute suite convergente $(\hat{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{S}^{\mathbb{N}}$ appartient à $\hat{S}$. Par définition, $\hat{v}_n$ est la limite d'une suite convergente $(v_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. Cela nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i_n \in \mathbb{N}$ tel que $N(\hat{v}_n - v_{n,m}) < 1/n$ pour tout entier $m \geq i_n$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par $u_n = v_{n,i_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est clair que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. On affirme que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\hat{v}$. En effet, on remarque d'abord que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$N(\hat{v} - \hat{v}_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout entier $n \geq n_0$. Sans perte de généralité, on suppose en plus que $n_0 > 2/\varepsilon$. Alors,

$$\begin{aligned} N(\hat{v} - u_n) = N(\hat{v} - v_{n,i_n}) &= N(\hat{v} - \hat{v}_n + \hat{v}_n - v_{n,i_n}) \leq N(\hat{v} - \hat{v}_n) + N(\hat{v}_n - v_{n,i_n}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

pour tout entier $n \geq n_0$, comme on voulait démontrer. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ converge vers $\hat{v}$, $\hat{v}$ appartient à $\hat{S}$, par définition de $\hat{S}$, et $\hat{S}$ est donc fermé. Or, d'après l'inclusion $S \subseteq \hat{S}$ et le fait que $\hat{S}$ soit fermé, on conclut que $\bar{S} \subseteq \hat{S}$, par définition d'adhérence.

Finalement, on va démontrer que $\hat{S} \subseteq \bar{S}$. Pour cela, il faut montrer que si $F \subseteq \mathbb{E}$ est un ensemble fermé et $S \subseteq F$, alors $\hat{S} \subseteq F$. Or, comme F est fermé, d'après la Proposition 1.10.1, la limite de toute suite convergente à valeurs dans F appartient à F, ce qui nous dit *a fortiori* que la limite de toute suite convergente à valeurs dans $S \subseteq F$ appartient à F. Comme $\hat{S}$ est l'ensemble de limites de suites convergentes à valeurs dans S, on conclut que $\hat{S} \subseteq F$, comme on voulait démontrer. □

Une version plus topologique du résultat précédent est le suivant. On laisse la preuve au lecteur.

Proposition 1.10.5. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Alors,*

$$\bar{S} = \{x \in \mathbb{E} : \text{ pour tout } r > 0, B_N(x, r) \cap S \neq \emptyset\}.$$

1.11 Compacité (séquentielle)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un ensemble S. On rappelle qu'une **sous-suite** de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$, aussi appelée une **suite extraite**, est une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = v_{\phi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante et injective. On remarque que l'application ϕ est aussi une donnée dans la définition de sous-suite. On mentionne le fait suivante, que l'on utilisera souvent dans la suite: toute sous-suite d'une suite convergente dans un espace vectoriel normé est aussi convergente et a la même limite. On laisse la preuve au lecteur.

Définition 1.11.1. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. On dit que S est **séquentiellement compact** (pour N) si toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S admet une sous-suite convergente dont la limite appartient à S. Comme la compacité séquentielle est la seule propriété de compacité que l'on va considérer dans ce cours, à exception de la Section 1.15, on va omettre désormais l'adjectif pour simplicité, sauf dans la Section 1.15, où l'on va comparer la notion de compacité séquentielle avec une notion de compacité obtenue de la propriété de Borel-Lebesgue.*

Exemple 1.11.2. *Le Théorème de Bolzano-Weierstrass (pour $\mathbb{R}$) affirme précisément que tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est compact.*

On peut donner une version plus topologique équivalente de la définition de compacité séquentielle, basé sur la notion suivante.

Définition 1.11.3. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espaces vectoriel normés et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie infinie. On dit que $v \in \mathbb{E}$ est un **point d'accumulation** de S si, pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$, il existe $w \in S\backslash\{v\}$ tel que $N(v-w) \leq r$. De façon équivalente, $v \in \mathbb{E}$ est un point d'accumulation de S si et seulement si $v \in \overline{S \setminus \{v\}}$. C'est aussi clair que $v \in \mathbb{E}$ est un point d'accumulation de S si et seulement si, pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$, l'ensemble $\{w \in S \setminus \{v\} : N(v-w) \leq r\}$ est infini.*

Proposition 1.11.4. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espaces vectoriel normés et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Alors, S est compact si et seulement si toute partie infinie $T \subseteq S$ a un point d'accumulation dans S.*

Preuve. On suppose que S est compact. On va montrer que toute partie infinie $T \subseteq S$ a un point d'accumulation dans S. Comme T est infinie, il existe une application injective $f : \mathbb{N} \to T$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}} \subseteq S^{\mathbb{N}}$ donnée par $v_n = f(n)$. D'après la compacité de S, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite convergente $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ avec limite $v \in S$. Par définition, $v \in S$ est un point d'accumulation de T, ce qui montre que T a un point d'accumulation dans S. Réciproquement, on suppose que toute partie infinie $T \subseteq S$ a un point d'accumulation dans S. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ une suite. On va montrer qu'elle possède une sous-suite convergente, dont la limite appartient à S. Soit $T = \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$ l'ensemble sous-jacent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. Si T est fini, il existe $v \in S$ tel que $\{n \in \mathbb{N} : v_n = v\}$ est infini. Soit $\phi : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N} : v_n = v\}$ la seule fonction bijective et croissante. Alors $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ est une sous-suite constante de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ et *a fortiori* convergente, avec limite $v \in S$. Si T est infini, par hypothèse T possède un point d'accumulation $v \in S$. On construit par récurrence une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ qui converge vers v. On prend $w_0 = v_0$ et on suppose que l'on a construit entiers non négatifs $\phi(0) < \cdots < \phi(n)$ tels $N(v_{\phi(i)} - v) \leq 1/2^i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par définition de point d'accumulation, l'ensemble $\{w \in T \setminus \{v\} : N(w - v) \leq 2^{-(n+1)}\}$ est infini. Il existe alors $m > \phi(n)$ tel que $N(v_m - v) \leq 2^{-(n+1)}$. On pose $\phi(n+1) = m$. Par récurrence, on a un application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante et injective telle que $N(v_{\phi(n)} - v) \leq 1/2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui nous dit que la sous-suite $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ converge vers v, comme on voulait démontrer. □

Le résultat suivant nous dit que la notion de compacité d'une partie d'un espace vectoriel normé est fortement topologique.

Proposition 1.11.5. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Soient N et N' deux normes équivalentes sur $\mathbb{E}$. Alors, S est compact pour N si et seulement si S est compact pour N'.*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence directe de la Proposition 1.6.5. □

Proposition 1.11.6. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie compacte. Alors, S est fermé et borné.*

Preuve. On va d'abord démontrer que S est fermé. D'après la Proposition 1.10.1, il suffit de montrer que la limite de toute suite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ appartient à S. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $v \in \mathbb{E}$. Comme S est compact, il existe une sous-suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$, dont la limite w appartient à S. Or, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ est convergente, toute sous-suite est aussi convergente et elle possède la même limite. Cela implique que $v = w \in S$, comme on voulait démontrer.

Finalement, on va montrer que S est borné. Si ce n'est pas le cas, pour tout $C > 0$, il existe une suite $v \in S$ tel que $N(v) \geq C$. On construit par récurrence la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ suivante. On choisit n'importe quel élément $v_0 \in S$ et on suppose que l'on a construit $v_0, \dots, v_n \in S$ tels que $N(v_i) \geq N(v_{i-1}) + 1$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, où $n \in \mathbb{N}$. On pose $C = N(v_n) + 1$. D'après l'hypothèse de l'absurde, il existe $v_{n+1} \in S$ tel que $N(v_n) \geq C = N(v_n) + 1$, ce qui nous donne la récurrence. Cette suite satisfait clairement que $N(v_{n+m}) - N(v_n) \geq m$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$. Para ailleurs, on voit bien que

$$1 \leq m \leq N(v_{n+m}) - N(v_n) = \big|N(v_{n+m}) - N(v_n)\big| \leq N(v_{n+m} - v_n),$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, où la dernière inégalité suit de (N3). Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = v_{\phi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante et injective, alors

$$1 \leq \phi(m+n) - \phi(n) \leq N(w_{n+m}) - N(w_n) = \big|N(w_{n+m}) - N(w_n)\big| \leq N(w_{n+m} - w_n),$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. En conséquence, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, et *a fortiori* elle n'est pas convergente (voir la Proposition 1.6.4). Cela est un absurde, parce que S est compact. $\square$

Proposition 1.11.7. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie compacte. Soit $T \subseteq S$ un ensemble fermé. Alors, T est compact.*

Preuve. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans T. Comme elle appartient aussi à S, il existe une sous-suite convergente $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ dont la limite w appartient à S. Comme T est fermé, d'après la Proposition 1.10.1, $w \in T$, comme on voulait démontrer. $\square$

Proposition 1.11.8. *Soient $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ des espaces vectoriels munis des normes $N_1, \dots, N_n$, respectivement. On muni $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ de la norme $N_{\max}$ (voir la Proposition 1.2.4). Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $S_i \subseteq \mathbb{E}_i$ une partie compacte (pour la norme N_i). Alors $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ est une partie compacte de $\mathbb{E}$ (pour la norme $N_{\max}$).*

Preuve. Soit $(x_n) \in S^{\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $x_n = x_{n,i} \in \mathbb{E}_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$. Alors $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \in S_i^{\mathbb{N}}$ est une suite pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On va construire une sous-suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$, dont la limite appartient à S. On procède par récurrence sur $i \in [\![1, n]\!]$. On suppose que l'on a une application injective et croissante $\phi_{i-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(x_{\phi_{i-1}(n),j})_{n\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$ de $(x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\bar{x}_j$ de S_j, pour tout $j \in [\![1, i-1]\!]$, où $i \in [\![1, n]\!]$. On va montrer que cette affirmation est aussi vérifié pour i. Pour cela, on considère la suite $(x_{\phi_{i-1}(n),i})_{n\in\mathbb{N}} \in S_i^{\mathbb{N}}$. Comme S_i est compact, il existe une application injective et croissante $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\phi_{i-1}(\psi(n)),i})_{n\in\mathbb{N}} \in S_i^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\bar{x}_i$ de S_i. On pose $\phi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\phi_i = \phi_{i-1} \circ \psi$. Comme la composition de fonctions injectives et croissante est aussi injective et croissante, ces propriétés sont vérifiées par ϕ_i. Si $j \in [\![1, i-1]\!]$, $(x_{\phi_i(n),j})_{n\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite convergente $(x_{\phi_{i-1}(n),j})_{n\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$, ce qui implique que $(x_{\phi_i(n),j})_{n\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$ converge vers l'élément $\bar{x}_j$ de S_j. On conclut que la sous-suite $(x_{\phi_i(n),j})_{n\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$ de $(x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\bar{x}_j$ de S_j, pour tout $j \in [\![1, i]\!]$. Finalement, on considère $\phi = \phi_n$ et la sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. Par construction, $(x_{\phi(n),j})_{n\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\bar{x}_j$ de S_j, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. La Proposition 1.6.7 nous dit que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n = S$, ce qui montre que S est compact. $\square$

On a la réciproque de la Proposition 1.11.6 dans le cas de la norme infini.

Proposition 1.11.9. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Soit $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{E}$ une base (ordonnée) de $\mathbb{E}$. On considère l'application $T : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ qui associe à chaque $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ (où $c_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$) le n-uplet $T(v) = (c_1, \dots, c_n)$ et on définit la norme $N_\infty : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ via $N_\infty = \|\ \|_\infty \circ T$ (voir la Proposition 1.2.1). Si l'ensemble S est fermé et borné pour la norme N_∞, alors il est compact.*

Preuve. On remarque la norme N_∞ coïncide avec la norme $N_{\max}$ du produit des espaces vectoriels normés $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$, où $\mathbb{E}_i$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ engendré par v_i muni de la norme $N_i(\lambda \cdot v_i) = |\lambda|$.

Soit S une ensemble fermé et borné de $\mathbb{E}$ pour la norme N_∞. Comme S est borné, il existe $C > 0$ tel que $S \subseteq B_N(\mathbf{0}_\mathbb{E}, C)$. D'après les commentaires dans le paragraphe précédent,

$$\bar{B}_N(\mathbf{0}_\mathbb{E}, C) = \prod_{i=1}^{n} \bar{B}_{N_i}(\mathbf{0}_{\mathbb{E}_i}, C).$$

D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est un compact, pour la norme donnée par la valeur absolue (voir l'Exemple 1.11.2). La Proposition 1.11.5 nous dit aussi que $\bar{B}_{N_i}(\mathbf{0}_{\mathbb{E}_i}, C)$ est un compact de $\mathbb{E}_i$ pour la norme N_i, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. D'après la Proposition 1.11.8, $\bar{B}_N(\mathbf{0}_\mathbb{E}, C)$ est un compact de $\mathbb{E}$ pour la norme N_∞. Comme S est un ensemble fermé et il est inclus dans le compact $\bar{B}_N(\mathbf{0}_\mathbb{E}, C)$, la Proposition 1.11.7 implique que S est compact, comme on voulait démontrer. □

Remarque 1.11.10. *Les Propositions 1.11.5, 1.11.6 et 1.11.9, et le Théorème 1.8.1 impliquent qu'un ensemble d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compact si et seulement s'il est fermé et borné. Comme on veut donner une preuve différente du Théorème 1.8.1, basée sur la notion de compacité, on ne va pas énoncer ce résultat pour l'instant.*

On remarque aussi que l'équivalence entre les notions de compacité d'un côté et celle d'ensemble fermé et borné d'un autre côté n'est pas valable pour des espaces vectoriels normés de dimension infinie.

1.12 Applications continues

Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soit $S \subseteq \mathbb{E}$. Soit $f : S \to \mathbb{F}$ une application et $v \in S$. On rappelle que $f(x)$ **converge** vers l'élément $w \in \mathbb{F}$ quand $x \in S$ tend vers v (pour N et N') si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x \in S$ et $N(x - v) < \delta$ impliquent que $N'(w - f(v)) < \varepsilon$.

Proposition 1.12.1. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soit $S \subseteq \mathbb{E}$. Soit $f : S \to \mathbb{F}$ une application et $v \in S$. Si $f(x)$ converge vers $w \in \mathbb{F}$ et $w' \in \mathbb{F}$ quand $x \in S$ tend vers v (pour N et N'), alors $w = w'$. On appelle cet élément la **limite** de $f(x)$ quand $x \in S$ tend vers v (pour N et N') et on écrit*

$$\lim_{\substack{x \to v \\ x \in S}} f(x) = w.$$

Preuve. On voit bien que

$$N'(w - w') = N'\big(w - f(x) + f(x) - w'\big) \le N'\big(w - f(x)\big) + N'\big(f(x) - w'\big),$$

pour tout $x \in S$, d'après (N3) pour N'. On affirme que $N'(w - w') = 0$. Si ce n'est pas le cas, alors $N'(w - w') > 0$ et on prend $\varepsilon = N'(w - w')/4$. Soient $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\delta' \in \mathbb{R}_{>0}$ les éléments correspondants dans le définition de convergence de $f(x)$ quand $x \in S$ tend vers v. Alors, les conditions $x \in S$ et $N(x - v) < \min(\delta, \delta')$ impliquent que $N'(f(x) - w) < \varepsilon$ et $N'(w' - f(x)) < \varepsilon$. En conséquence,

$$N'(w - w') = N'\big(w - f(x) + f(x) - w'\big) \le N'\big(w - f(x)\big) + N'\big(f(x) - w'\big) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{N'(w - w')}{2},$$

ce qui est absurde si $N'(w - w') > 0$. En conséquence, $N'(w - w') = 0$. D'après (N1) pour N' on conclut que $w = w'$, comme on voulait démontrer. □

Si le domaine de définition S de $f : S \to \mathbb{F}$ est un ouvert de $\mathbb{E}$, on l'omettra dans la terminologie et la notation de limite. En particulier, dans ce cas on dira que $f(x)$ converge vers $w \in \mathbb{F}$ quand x tend vers v (pour N et N') et on écrira

$$\lim_{x \to v} f(x) = w.$$

Définition 1.12.2. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soit $S \subseteq \mathbb{E}$. Soit $f : S \to \mathbb{F}$ une application. Étant donné $v \in S$, on dit que f est **continue** en v (pour N et N') si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $w \in S$ et $N(w - v) < \delta$ impliquent que $N'(f(w) - f(v)) < \varepsilon$. De façon équivalente,*

f est continue en v si et seulement si la limite de $f(x)$ quand $x \in S$ tend vers v existe et elle coïncide avec $f(v)$. On dit que f est ***continue*** *(sur S, pour N et N') si elle est continue en v, pour tout $v \in S$.*

En outre, l'application f est dite ***uniformément continue*** *(pour N et N') si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les conditions $v, w \in S$ et $N(w - v) < \delta$ impliquent que $N'(f(w) - f(v)) < \varepsilon$.*

Remarque 1.12.3. *C'est clair qu'une application uniformément continue $f : S \to \mathbb{F}$ est aussi continue sur S.*

Le résultat suivant nous dit que les notions de continuité et de continuité uniforme d'applications sont fortement topologiques. On laisse au lecteur la formulation précise de la notion de propriété fortement topologique pour des applications.

Proposition 1.12.4. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soit $S \subseteq \mathbb{E}$. Soit $f : S \to \mathbb{F}$ une application et $v \in S$. On considère $\bar{N} : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\bar{N}' : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ deux normes équivalentes à N et à N', respectivement. Alors, f est continue en v (resp., uniformément continue) pour N et N' si et seulement si f est continue en v (resp., uniformément continue) pour $\bar{N}$ et $\bar{N}'$.*

Preuve. On suppose qu'il existe $C, C', \bar{C}, \bar{C}' \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$CN(v) \leq \bar{N}(v) \leq \bar{C}N(v) \text{ et } C'N'(w) \leq \bar{N}'(w) \leq \bar{C}'N'(w),$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$ et $w \in \mathbb{F}$. C'est clair que pour chaque propriété, il suffit de montrer que, si elle est vérifiée pour N et N', alors elle est aussi vérifiée pour $\bar{N}$ et $\bar{N}'$. On fera uniquement la preuve pour le cas de la continuité en v, la preuve de la continuité uniforme étant donné *mutatis mutandi*.

On suppose que f est continue en $v \in S$ pour N et N'. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $v' \in S$ et $N(v' - v) < \delta$ impliquent que $N'(f(v') - f(v)) < \varepsilon/\bar{C}'$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on prend $\delta > 0$ comme ci-dessus. On pose $\bar{\delta} = C\delta$. Alors, pour tout $v' \in S$, la condition $\bar{N}(v' - v) < \bar{\delta}$ implique que $N(v' - v) < \delta$. Par continuité de f en v et le choix des paramètres précédents, on voit que $N'(f(v') - f(v)) < \varepsilon/\bar{C}'$, ce qui implique que $\bar{N}'(f(w) - f(v)) < \varepsilon$, comme on voulait démontrer. □

Exemple 1.12.5. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé. On considère les applications $\mathfrak{s} : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ et $\mathfrak{p} : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ données par*

$$\mathfrak{s}(x, y) = x + y \text{ et } \mathfrak{p}(\lambda, x) = \lambda \cdot x,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On muni $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ avec les normes $N_{\max}$ induites par N, et par la valeur absolue $|\ |$ et N, respectivement (voir la Proposition 1.2.4). C'est facile à vérifier que $\mathfrak{s}$ est uniformément continue. En effet, la continuité uniforme de $\mathfrak{s}$ est une conséquence de l'équivalence des normes $N_{\max}$ et N_{sum} (voir la Proposition 1.5.4). Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ on pourrait aussi considérer l'application $\mathfrak{s}_n : \mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ (avec n facteurs dans le domaine de définition) donnée par $\mathfrak{s}(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{E}$. Un argument par récurrence assez direct nous dit que $\mathfrak{s}_n$ est uniformément continue.

Par ailleurs, l'application $\mathfrak{p}$ est continue. Pour montrer la continuité de $\mathfrak{p}$ en $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ on remarque que

$$\begin{aligned} N\big(\mathfrak{p}(\lambda, x) - \mathfrak{p}(\lambda_0, x_0)\big) &= N(\lambda \cdot x - \lambda_0 \cdot x_0) = N(\lambda \cdot x - \lambda_0 \cdot x + \lambda_0 \cdot x - \lambda_0 \cdot x_0) \\ &\leq N(\lambda \cdot x - \lambda_0 \cdot x) + N(\lambda_0 \cdot x - \lambda_0 \cdot x_0) = |\lambda - \lambda_0| N(x) + |\lambda_0| N(x - x_0) \\ &\leq N_{\max}\big((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\big)\Big(N(x) + |\lambda_0|\Big), \end{aligned} \tag{1.12.1}$$

où l'on a utilisé que $|\lambda - \lambda_0| \leq N_{\max}((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0))$ et $N(x - x_0) \leq N_{\max}((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0))$. Étant donné $\epsilon > 0$ (et $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$), on pose

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{2N_{\max}(\lambda_0, x_0) + 1}\right).$$

Alors, si $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ satisfait que $N_{\max}((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)) \leq \delta$, on conclut en particulier que

$$N(x) - N(x_0) \leq N(x - x_0) \leq N_{\max}\big((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\big) \leq \delta \leq 1,$$

ce qui nous dit que $N(x) \leq N(x_0) + 1$, tandis que (1.12.1) *implique finalement que*

$$\begin{aligned} N\big(\not{p}(\lambda, x) - \not{p}(\lambda_0, x_0)\big) &\leq N_{\max}\big((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\big)\Big(N(x) + |\lambda_0|\Big) \\ &\leq N_{\max}\big((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\big)\Big(N(x_0) + |\lambda_0| + 1\Big) \\ &\leq N_{\max}\big((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\big)\Big(2N_{\max}(\lambda_0, x_0) + 1\Big) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\not{p}$ est continue en (λ_0, x_0), pour tout $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$. On remarque finalement que, étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $\not{p}_\lambda : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ donnée par $\not{p}_\lambda(x) = \not{p}(\lambda, x)$ pour $x \in \mathbb{E}$ est uniformément continue, vu que

$$N\big(\not{p}_\lambda(x) - \not{p}_\lambda(x')\big) = |\lambda| N(x - x'),$$

pour tous $x, x' \in \mathbb{E}$.

Exemple 1.12.6. *Soient $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$ des espaces vectoriels munis des normes $N_1, \ldots, N_n$, respectivement. Soit $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_n$ l'espace vectoriel muni de la norme $N_{\max}$ définie par* (1.2.1)*. On considère les applications $\iota_i^{\mathbb{E}} : \mathbb{E}_i \to \mathbb{E}$ et $\pi_i^{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_i$ données par l'inclusion canonique et la projection canonique. Alors, elles sont uniformément continues.*

Lemme 1.12.7. *Soient $(\mathbb{E}, N)$, $(\mathbb{F}, N')$ et $(\mathbb{G}, N'')$ trois espaces vectoriels normés et soient $S \subseteq \mathbb{E}$ et $T \subseteq \mathbb{F}$ deux parties. Soit $v_0 \in S$. Soit $f : S \to \mathbb{F}$ une application continue en v_0 (resp., uniformément continues) et $g : T \to \mathbb{G}$ une application continue en $f(v_0)$ (resp., uniformément continue), où l'on suppose en plus que $f(S) \subseteq T$. Alors, la composition $g \circ f : S \to \mathbb{G}$ donnée par $(g \circ f)(v) = g(f(v))$, pour tout $v \in S$, est continue en v_0 (resp., uniformément continue).*

Preuve. On va prouver les cas de la continuité simple et on laissera au lecteur la preuve de l'énoncé pour la continuité uniforme: il s'agit seulement du même argument, sans fixer le point v_0.

Comme f est continue en v_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $w \in S$ et $N(w - v_0) < \delta$ impliquent que $N'(f(w) - f(v_0)) < \varepsilon$. En outre, comme g est continue en $f(v_0)$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $u \in T$ et $N'(u - f(v_0)) < \eta$ impliquent que $N''(g(u) - g(f(v_0))) < \epsilon$. On fixe $\epsilon > 0$ et on prend $\hat{\delta} = \delta(\eta)$, où η est déterminé par la continuité de g en $f(v_0)$. Alors, $w \in S$ et $N(w - v_0) < \hat{\delta}$ impliquent que $N'(f(w) - f(v_0)) < \eta$, ce qui nous donne que $N''(g(f(w)) - g(f(v_0))) < \epsilon$, *i.e.* $g \circ f$ est continue en v_0. $\square$

Voici un critère assez simple pour construire des application à partir d'autres application continues.

Proposition 1.12.8. *Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_n$ des espaces vectoriels munis des normes $N, N'_1, \ldots, N'_n$, respectivement. On pose $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_n$ muni de la norme $N'_{\max}$, définie par* (1.2.1) *à partir des normes des facteurs respectifs. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a une application $f_i : S \to \mathbb{F}_i$, où $S \subseteq \mathbb{E}$. On considère l'application $f : S \to \mathbb{F}$ donnée par $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, où $x \in S$. Alors, f est continue en $v_0 \in S$ (resp., uniformément continue) si et seulement si f_i est continue en $v_0 \in S$ (resp., uniformément continue) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

Preuve. On suppose que f est continue en v_0 (resp., uniformément continue). On note que $f_i = \pi_i^{\mathbb{F}} \circ f$, avec les applications uniformément continues $\pi_i^{\mathbb{F}}$ définies dans l'Exemple 1.12.6. D'après le Lemme 1.12.7, on conclut que f_i est continue en v_0 (resp., uniformément continue) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Réciproquement, on suppose que f_i est continue en v_0 (resp., uniformément continue) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On montrera que f est continue en v_0, le cas de la continuité uniforme étant obtenu *mutatis mutandi.* Comme f_i est continue en v_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_i > 0$ tel que $w \in S$ et $N(w - v_0) < \delta_i$ impliquent que $N'_i(f(w) - f(v_0)) < \varepsilon$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on prend $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n) > 0$. Alors, $w \in S$ et $N(w - v_0) < \delta$ impliquent que

$$N'_{\max}\big(f(w) - f(v_0)\big) \leq \varepsilon,$$

comme on voulait démontrer. $\square$

Corollaire 1.12.9. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés, soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie et $v_0 \in S$. Soient $f, g : S \to \mathbb{F}$ deux applications continues en v_0 (resp., uniformément continues) Alors, l'application $f + \lambda \cdot g : S \to \mathbb{F}$ donnée par $(f + \lambda \cdot g)(v) = f(v) + \lambda \cdot g(v)$, pour tout $v \in S$, est continue en v_0 (resp., uniformément continue), où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Preuve. C'est clair que $f + \lambda \cdot g$ est la composition de l'application $(f, g) : S \to \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ donnée par $x \mapsto (f(x), g(x))$ pour tout $x \in S$, $\mathrm{id}_{\mathbb{F}} \times \mathfrak{p}_\lambda : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ et $\mathfrak{s} : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. La Proposition 1.12.8 nous dit que (f, g) est continue v_0 (resp., uniformément continue). De même, le Lemme 1.12.7, la Proposition 1.12.8 et l'Exemple 1.12.5 nous dissent que $\mathrm{id} \times \mathfrak{p}_\lambda$ est uniformément continue. En effet, on peut écrire $\mathrm{id}_{\mathbb{F}} \times \mathfrak{p}_\lambda = (q_1, q_2)$ avec $q_1 = \pi_1^{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}$ et $q_2 = \mathfrak{p}_\lambda \circ \pi_2^{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}$, où $\pi_1^{\mathbb{F}\times\mathbb{F}} : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ et $\pi_2^{\mathbb{F}\times\mathbb{F}} : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ sont les projections canoniques. Les résultats mentionnés nous disent que $\mathrm{id} \times \mathfrak{p}_\lambda$ est uniformément continue. En outre, l'application $\mathfrak{s}$ est uniformément continue, d'après l'Exemple 1.12.5. Le corollaire suit alors du Lemme 1.12.7. □

On a la caractérisation topologique suivante de la continuité d'une application.

Proposition 1.12.10. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soient $S \subseteq \mathbb{E}$. Soit $f : S \to \mathbb{F}$ une application. Alors, f est continue sur S si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert (resp., fermé) de S pour tout ensemble ouvert (resp., fermé) $U \subseteq \mathbb{F}$.*

Preuve. On va démontrer d'abord l'énoncé pour les ouverts. On suppose que f est continue sur S. Soit $U \subseteq \mathbb{F}$ un ensemble ouvert et soit $v \in f^{-1}(U)$. Comme U est ouvert et $f(v) \in U$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_{N'}(f(v), r) \subseteq U$. Par la continuité de f en v, il existe $\delta > 0$ tel que $w \in S$ et $N(w - v) < \delta$ impliquent que $N'(f(w) - f(v)) < \varepsilon$, *i.e.* $B_N(v, \delta) \cap S \subseteq f^{-1}(B_{N'}(f(v), \delta)) \subseteq f^{-1}(U)$. Cela nous dit que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de S. Réciproquement, on suppose que $f^{-1}(U)$ est ouvert de S pour tout ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{F}$. Soit $v \in S$ et $U = B_{N'}(f(v), \varepsilon)$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire. En particulier, U est ouvert d'après la Proposition 1.9.3. Par hypothèse, $f^{-1}(U)$ est ouvert de S. Comme $v \in f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(U)$ est ouvert de S, il existe $\delta > 0$ tel que $B_N(v, \delta) \cap S \subseteq f^{-1}(U)$, *i.e.* f et continue en v.

L'énoncé pour les ensembles fermés suit du cas des ensembles ouverts et de l'égalité $f^{-1}(\mathbb{F} \setminus F) = S \setminus f^{-1}(F)$, pour toute partie F de $\mathbb{F}$. □

On a aussi une caractérisation séquentielle de la continuité d'une application.

Proposition 1.12.11. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soient $S \subseteq \mathbb{E}$. Soit $f : S \to \mathbb{F}$ une application. Alors, f est continue en v si et seulement si la image directe $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ de toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ qui converge vers v est convergente de limite $f(v)$.*

Preuve. On suppose que f est continue en v et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers v. On veut montrer que $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(v)$. On fixe $\varepsilon > 0$. D'après la continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que $w \in S$ et $N(w - v) < \delta$ impliquent que $N'(f(w) - f(v)) < \varepsilon$. Par ailleurs, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ converge vers v, pour $\delta > 0$ ci-dessus, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(v_n - v) < \delta$ pour tout entier $n \geq n_0$. En conséquence, $N'(f(v_n) - f(v)) < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_0$, *i.e.* $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(v)$.

On suppose maintenant que la image directe $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ de toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ qui converge vers v est convergente de limite $f(v)$. On va montrer que f est continue en v. On procède par l'absurde. Si ce n'est pas vrai, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $w \in S$ avec $N(w - v) < \delta$ mais $N'(f(w) - f(v)) \geq \varepsilon$. De façon équivalente, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ tel que $N(v_n - v) < 1/n$ mais $N'(f(v_n) - f(v)) \geq \varepsilon$. Cela veut dire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ qui converge vers v mais $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(v)$, ce qui est absurde. □

Le résultat suivante est clé dans la suite, pour démontrer que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Proposition 1.12.12. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés, $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie compacte et $f : S \to \mathbb{F}$ une application continue. Alors $f(S) \subseteq \mathbb{F}$ est compact aussi.*

Preuve. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(S)^{\mathbb{N}}$ une suite. On va monter qu'elle possède une sous-suite convergente dont la limite appartient à $f(S)$. Comme $w_n \in f(S)$, soit $v_n \in S$ tel que $f(v_n) = w_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme S est compact, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ possède une sous-suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ convergente dont la limite $\bar{v}$ appartient à S. Comme f est continue, la Proposition 1.12.11 nous dit que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \in f(S)^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(\bar{v}) \in f(S)$, comme on voulait démontrer. □

1.13 Une autre preuve de l'équivalence de normes sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans cette section on va donner une autre preuve du Théorème 1.8.1, indépendante de celle que l'on a donnée dans la Section 1.8. Plus précisément, on ne va pas modifier les deux premiers paragraphes dans la preuve du Théorème 1.8.1. Cela démontre en particulier que

$$N(v) \leq C' N_\infty(v), \tag{1.13.1}$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$, où l'on utilise la même notation que celle considérée dans les deux premiers paragraphes de la preuve du Théorème 1.8.1.

Il reste à démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$N(v) \geq C N_\infty(v), \tag{1.13.2}$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$. C'est cette partie qui sera différente à ce que l'on a fait dans la Section 1.8. C'est clair que (1.13.2) est vérifiée pour $v = \mathbf{0}_\mathbb{E}$. On suppose désormais $v \neq \mathbf{0}_\mathbb{E}$.

Or, (1.13.1) nous dit que l'application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est continue pour N_∞ et $|\ |$. En effet, l'inégalité triangulaire pour N et (1.13.1) impliquent que

$$\big|N(v) - N(w)\big| \leq N(v - w) \leq C' N_\infty(v - w),$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, ce qui donne la continuité de l'application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour N_∞ et $|\ |$.

Soit $S = \{w \in \mathbb{E} : N_\infty(w) = 1\}$. C'est clair que S est fermé et borné pour N_∞, et donc compact pour N_∞, d'après la Proposition 1.11.9. On remarque que $\mathbf{0}_\mathbb{E} \notin S$, puisque N_∞ est une norme. La Proposition 1.12.12 nous dit que l'image $N(S) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc *a fortiori* fermé. Comme N est une norme et $\mathbf{0}_\mathbb{E} \notin S$, $0 \notin f(S)$, ce qui dit qu'il existe $C > 0$ tel que $N(w) \geq C$ pour tout $w \in S$. Pour $v \in \mathbb{E}$ non nul, on considère $w = v/N_\infty(v) \in S$. D'après nos arguments précédents, $N(v/N_\infty(v)) \geq C$, *i.e.* $N(v) \geq C N_\infty(v)$, comme on voulait démontrer.

Corollaire 1.13.1. *Tout espace vectoriel normé* $(\mathbb{E}, N)$ *de dimension finie est complet. En plus, une partie* S *de* $\mathbb{E}$ *est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Preuve. La première partie est une conséquence immédiate des Propositions 1.7.3, 1.7.4 et 1.7.5, et du Théorème 1.8.1. La deuxième partie suit directement des Propositions 1.11.5, 1.11.6 et 1.11.9, et du Théorème 1.8.1. □

1.14 D'autres applications de la compacité

Proposition 1.14.1. *Soient* $(\mathbb{E}, N)$ *et* $(\mathbb{F}, N')$ *deux espaces vectoriels normés,* $S \subseteq \mathbb{E}$ *une partie compacte et* $f : S \to \mathbb{F}$ *une application continue. Alors,* f *est uniformément continue*

Preuve. On procède par l'absurde. Si f n'est pas uniformément continue, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $v, w \in S$ avec $N(v - w) < \delta$ mais $N'(f(v) - f(w)) \geq \varepsilon_0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n, w_n \in S$ avec $N(v_n - w_n) < 1/2^n$ mais $N'(f(v_n) - f(w_n)) \geq \varepsilon_0$. Comme S est compact, il existe une sous-suite convergente $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ avec limite $\bar{v} \in S$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante et injective. Le même raisonnement nous dit qu'il existe une sous-suite convergente $(w_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ de la suite $(w_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ avec limite $\bar{w} \in S$, où $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante et injective. Comme toute sous-suite d'une suite convergente est convergente avec la même limite, $(v_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ converge vers $\bar{v} \in S$. Soit l'application croissante et injective $\rho = \phi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et les sous-suites convergentes $(v_{\rho(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ et $(w_{\rho(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^\mathbb{N}$ avec limites $\bar{v}$ et $\bar{w}$, respectivement, Comme f est continue, $(f(v_{\rho(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^\mathbb{N}$ et $(f(w_{\rho(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^\mathbb{N}$ convergent vers $f(\bar{v})$ et $f(\bar{w})$, respectivement. Or,

$$\begin{aligned} 0 \leq N(\bar{v} - \bar{w}) &\leq N(\bar{v} - v_{\rho(n)}) + N(v_{\rho(n)} - w_{\rho(n)}) + N(w_{\rho(n)} - \bar{w}) \\ &\leq N(\bar{v} - v_{\rho(n)}) + \frac{1}{2^{\rho(n)}} + N(w_{\rho(n)} - \bar{w}) \leq N(\bar{v} - v_{\rho(n)}) + \frac{1}{2^n} + N(w_{\rho(n)} - \bar{w}), \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où l'on a utilisé que $\rho(n) \geq n$. Si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$ du dernier membre, on conclut que $N(\bar{v} - \bar{w}) = 0$, *i.e.* $\bar{v} = \bar{w}$. Par contre, l'inégalité triangulaire nous dit que

$$\begin{aligned} N'\big(f(\bar{v}) - f(\bar{w})\big) &\geq N'\big(f(v_{\rho(n)}) - f(w_{\rho(n)})\big) - N'\big(f(v_{\rho(n)}) - f(\bar{v})\big) - N'\big(f(w_{\rho(n)}) - f(\bar{w})\big) \\ &\geq \varepsilon_0 - N'\big(f(v_{\rho(n)}) - f(\bar{v})\big) - N'\big(f(w_{\rho(n)}) - f(\bar{w})\big), \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'on prend la limite quand n tend vers $+\infty$ du dernier membre, on conclut que $N'\big(f(\bar{v}) - f(\bar{w})\big) \geq \varepsilon_0$, ce qui est absurde, car $\bar{v} = \bar{w}$. □

Définition 1.14.2. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés, $S \subseteq \mathbb{E}$ et $T \subseteq \mathbb{F}$ Soit $f : S \to T$ une application continue sur S. On dit que f est un* ***homéomorphisme*** *(pour N et N') s'il existe une application continue $g : T \to S$ (pour N' et N) telle que $g \circ f = \mathrm{id}_S$ et $f \circ g = \mathrm{id}_T$.*

Remarque 1.14.3. *De façon équivalente, une application continue $f : S \to T$ est un homéomorphisme si f est bijective et l'application réciproque $f^{-1} : T \to S$ est continue (pour N' et N).*

Proposition 1.14.4. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés, $S \subseteq \mathbb{E}$ et $T \subseteq \mathbb{F}$. Soit $f : S \to T$ une application continue et bijective. Si S est compact, alors f est un homéomorphisme.*

Preuve. Il suffit de démontrer que l'application réciproque $f^{-1} : T \to S$ est continue. D'après, la Proposition 1.12.11, cela équivaut à montrer que, pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans S, si $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ converge vers $w \in T$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ converge vers $f^{-1}(w) \in S$. On pose $v = f^{-1}(w)$, *i.e.* $f(v) = w$. On va procéder par l'absurde. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ ne converge pas vers v, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une sous-suite $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ telle que $N(v_{\phi(n)} - v) \geq \varepsilon_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante et injective. Or, S étant compact, $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ a une sous-suite convergente $(v_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ avec limite v' dans S, où $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante et injective. On considère l'application croissante et injective $\rho = \phi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Comme $N(v_{\phi(n)} - v) \geq \varepsilon_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$N(v - v') \geq N(v - v_{\rho(n)}) - N(v_{\rho(n)} - v') \geq \varepsilon_0 - N(v_{\rho(n)} - v'),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'on prend la limite du dernier membre quand n tend vers $+\infty$, on trouve que $N(v - v') \geq \varepsilon_0 > 0$. En conséquence, $v' \neq v$, ce qui nous dit que $f(v') \neq f(v)$, puisque f est injective. Par ailleurs, comme f est continue, la sous-suite $(f(v_{\rho(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ de $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(v')$. Comme $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ est convergente avec limite $f(v)$ et toute sous-suite d'une suite convergente est aussi convergente avec la même limite, $f(v') = f(v)$, ce qui est absurde. □

1.15 Compacité par recouvrements (optionnel)

Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. Un **recouvrement ouvert** de S est une famille $\{U_i\}_{i\in I}$ d'ensembles ouverts de $\mathbb{E}$ telle que $S \subseteq \cup_{i\in I} U_i$. Dans ce cas, on dit aussi que $\{U_i\}_{i\in I}$ **recouvre** S. Si I est fini, on dit que le recouvrement est **fini**.

Définition 1.15.1. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie. On dit que S est* ***compact*** *(pour N), ou qu'il satisfait la* ***propriété de Borel-Lebesgue****, si, pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de S, il existe $J \subseteq I$ fini tel que $\{U_i\}_{i\in J}$ recouvre S aussi.*

Même si cette propriété s'avère compliquée, elle est en fait très souple et permet de démontrer plusieurs résultats très puissants en topologie, analyse et algèbre. Le but de cette section sera de démontrer que la notion introduite ci-dessus est équivalente avec la notion de compacité séquentielle introduite dans la Section 1.11: c'est aussi la raison pour laquelle on peut se permettre d'utiliser le mot "compacité" pour les deux notions. Par contre, dans cette section, pour des raisons de clarté, on va distinguer les deux notions et on ne va pas omettre l'adjectif "séquentielle" (resp., l'adverbe "séquentiellement") devant le nom "compacité" (resp., l'adjectif "compact(e)") si l'on veux faire allusion à la notion introduite dans la Définition 1.11.1. On remarque aussi que, dans tous les résultats dans les autres sections de ces notes, où l'on a utilisé le mot "compact", cela ne fait allusion qu'à la notion de compacité séquentielle.

On commence avec un résultat préliminaire.

Proposition 1.15.2. *Soient* $(\mathbb{E}, N)$ *un espaces vectoriel normé et* $S \subseteq \mathbb{E}$ *une partie séquentiellement compacte. Pour tout* $r \in \mathbb{R}_{>0}$*, il existe un ensemble fini* $S' \subseteq S$ *tel que* $\{B_N(v,r))\}_{v \in S'}$ *recouvre* S*.*

Preuve. On procède par l'absurde. L'hypothèse de l'absurde nous dit que l'on peut construire par récurrence une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in S \setminus \cup_{i=1}^{n-1} B_N(v_i, r)$. Comme S est séquentiellement compact $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ avec limite $w \in S$. C'est clair que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ satisfait aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in S \setminus \cup_{i=1}^{n-1} B_N(w_i, r)$. La convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ nous dit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(w_n - w) < r/2$, pour tout entier $n \geq n_0$. Cela implique que

$$N(w_{n+1} - w_n) \leq N(w_{n+1} - w) + N(w - w_n) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

pour tous entier $n \geq n_0$, ce qui est absurde. □

On va démontrer l'équivalence entre les deux notions de compacité que l'on a introduites.

Théorème 1.15.3. *Soient* $(\mathbb{E}, N)$ *un espaces vectoriel normé et* $S \subseteq \mathbb{E}$ *une partie. Alors* S *est séquentiellement compact si et seulement si* S *est compact.*

Preuve. On suppose d'abord que S est séquentiellement compact. On va montrer que S satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de S. On affirme d'abord qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $v \in S$, il existe $i \in I$ satisfaisant $B_N(v, 1/2^n) \subseteq U_i$. Si ce n'est pas vrai, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in S$ tel que $B_N(v_n, 1/2^n) \cap (\mathbb{E} \setminus U_i) \neq \emptyset$, pour tout $i \in I$. Par compacité séquentielle, il existe une sou-suite convergente $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ avec limite $w \in S$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante et injective. Comme $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de S et $w \in S$, il existe $i_0 \in I$ tel que $w \in U_{i_0}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $B_N(w, 2^{-m}) \subseteq U_{i_0}$, dont l'existence est assurée puisque U_{i_0} est ouvert. Comme $(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ converge vers w, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{\phi(n)} \in B_N(w, 2^{-m}) \subseteq U_{i_0}$, pour tout entier $n \geq n_0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $n_0 \geq m$. Cela implique que $\phi(n) \geq \phi(n_0) \geq \phi(m) \geq m$ et en conséquence

$$B_N(v_{\phi(n)}, 1/2^{\phi(n)}) \subseteq B_N(v_{\phi(n)}, 1/2^m) \subseteq U_{i_0},$$

pour tout entier $n \geq n_0$. Cela contredit le fait que $B_N(v_{\phi(n)}, 1/2^{\phi(n)}) \cap (\mathbb{E} \setminus U_i) \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $v \in S$, il existe $i \in I$ satisfaisant $B_N(v, 1/2^n) \subseteq U_i$. On fixe n comme ci-dessus. D'après la Proposition 1.15.2, il existe un ensemble fini $S' \subseteq S$ tel que $\{B_N(v, 1/2^n)\}_{v\in S'}$ recouvre S. Pour tout $v \in S'$, on choisit $i_v \in I$ tel que $B_N(v, 1/2^n) \subseteq U_{i_v}$. Alors $\{U_{i_v}\}_{v\in S'}$ est un recouvrement fini de S, ce qui dit que S est compact.

On va démontrer la réciproque. On suppose que S satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. On va montrer que S est séquentiellement compact. Pour le faire, on va utiliser la description de compacité séquentielle donnée par la Proposition 1.11.4, *i.e.* on va montrer que toute partie infinie $T \subseteq S$ admet un point d'accumulation dans S. On va procéder par l'absurde, *i.e.* on suppose que pour tout point $v \in S$, il existe $r_v \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $B_N(v, r_v) \cap T$ est fini. On considère le recouvrement ouvert $\{B_N(v, r_v)\}_{v\in S}$ de S. Comme S est compact, *i.e.* il satisfait la propriété de Borel-Lebesgue, il existe une partie finie $S' \subseteq S$ telle que $\{B_N(v, r_v)\}_{v\in S'}$ couvre S. En conséquence,

$$T = T \cap S \subseteq T \cap \left(\bigcup_{v\in S'} B_N(v, r_v) \right) = \bigcup_{v\in S'} \big(T \cap B_N(v, r_v)\big).$$

Comme le dernier ensemble est une réunion finie d'ensembles finis, il est fini. Cela qui implique que T est fini, ce qui est absurde. En conséquence, S est séquentiellement compact. □

1.16 Normes sur l'espace des applications linéaires

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels. On définit $\mathrm{Lin}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'espace vectoriel formé des applications linéaires $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. On rappelle que, étant donnés $T, T' \in \mathrm{Lin}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $T + \lambda T' : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est l'application linéaire définie par $(T + \lambda T')(v) = T(v) + \lambda \cdot T'(v)$, pour tout $v \in \mathbb{E}$, et l'élément neutre pour l'addition de $\mathrm{Lin}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est la fonction nulle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés. On définit maintenant $L(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \subseteq \mathrm{Lin}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ la partie formée des applications linéaires continues $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. D'après le Lemme 1.12.7, $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Lin}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Proposition 1.16.1. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soit $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) il existe $C > 0$ tel que

$$N'\big(T(v)\big) \leq CN(v), \tag{1.16.1}$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$;

(ii) T est uniformément continue;

(iii) T est continue;

(iv) T est continue en $\mathbf{0}_{\mathbb{E}}$;

(v) T est borné sur un ouvert de $\mathbf{0}_{\mathbb{E}}$.

Preuve. Les implications (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) $\to$ (iv) $\to$ (v) sont évidentes. Il suffit de démontrer que la condition (v) implique (i). On suppose qu'il existe $r, C' > 0$ tels que $N'(T(v)) \leq C'$ pour tout $v \in B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, r)$. C'est clair que (1.16.1) est vérifiée pour $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$, puis $T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{F}}$. Soit $v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}$ et on considère $w = r \cdot v/(2N(v))$. Alors $w \in B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}, r)$, ce qui implique que $N'(T(w)) \leq C'$, *i.e.*

$$N'\big(T(v)\big) \leq \frac{2C'}{r} N(v).$$

Cela nous que (1.16.1) est vérifiée avec $C = 2C'/r$. □

On a encore une autre conséquence du Théorème 1.8.1.

Proposition 1.16.2. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soit $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application linéaire. Si la dimension de $\mathbb{E}$ est finie, alors T est continue.*

Preuve. Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base $\mathbb{E}$ et soit $U : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ la bijection linéaire donnée par $U(v_i) = e_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère la norme N_U donnée par U et la norme $\| \ \|_\infty$ (voir la Proposition 1.2.1). D'après le Théorème 1.8.1, il existe $K > 0$ tel que $N_U(v) \leq KN(v)$, pour tout $v \in \mathbb{E}$. On pose $C' = \max\{N'(T(v_i) : i \in [\![1, n]\!]\}$. Soit $v \in \mathbb{E}$. On écrit $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, avec $c_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. C'est clair que

$$N'\big(T(v)\big) \leq \sum_{i=1}^n |c_i| N'\big(T(v_i)\big) \leq C' \sum_{i=1}^n |c_i| \leq nC' \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(|c_i|\big) = nC' N_U(v) \leq nC'KN(v),$$

ce qui implique que T est continue. □

On définit l'application $\mathbf{N}_{N,N'} : L(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ par

$$\mathbf{N}_{N,N'}(T) = \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N'\big(T(v)\big)}{N(v)}. \tag{1.16.2}$$

La Proposition 1.16.1 nous dit que ce supremum est fini et que l'application $\mathbf{N}_{N,N'}$ est bien définie.

Proposition 1.16.3. *Soient $(\mathbb{E}, N)$ et $(\mathbb{F}, N')$ deux espaces vectoriels normés et soit $\mathbf{N}_{N,N'} : L(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ l'application définie dans (1.16.2). Alors $\mathbf{N}_{N,N'}$ est une norme sur $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, appelée la **norme associée (ou subordonnée) aux normes N et N'**.*

Preuve. Soit $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application linéaire continue. C'est clair que $\mathbf{N}_{N,N'}(T) = 0$, alors $N'(T(v)) = 0$, *i.e.* $T(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{F}}$, pour tout $v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}$. En outre, comme T est linéaire, $T(\mathbf{0}_{\mathbb{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{F}}$. Cela nous dit que T est le vecteur nul de $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, *i.e.* $\mathbf{N}_{N,N'}$ satisfait (N1). Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{N,N'}(\lambda T) &= \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N'\big((\lambda T)(v)\big)}{N(v)} = \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N'\big(\lambda \cdot T(v)\big)}{N(v)} = \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} |\lambda| \frac{N'\big(T(v)\big)}{N(v)} \\ &= |\lambda| \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N'\big(T(v)\big)}{N(v)} = |\lambda| \mathbf{N}_{N,N'}(T),\end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, où l'on a utilisé (0.0.2) dans la quatrième égalité. En conséquence, $\mathbf{N}_{N,N'}$ satisfait (N2).

Finalement, soient $T, T' : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ deux applications linéaires continues.

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{N,N'}(T + T') &= \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N'\big((T + T')(v)\big)}{N(v)} = \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N'\big(T(v) + T'(v)\big)}{N(v)} \\ &\le \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \left(\frac{N'\big(T(v)\big)}{N(v)} + \frac{N'\big(T'(v)\big)}{N(v)} \right) \le \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N'\big(T(v)\big)}{N(v)} + \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N'\big(T'(v)\big)}{N(v)} \\ &= \mathbf{N}_{N,N'}(T) + \mathbf{N}_{N,N'}(T'),\end{aligned}$$

où l'on a appliqué (0.0.3) au quatrième membre. Par conséquent, $\mathbf{N}_{N,N'}$ satisfait (N3). □

Par définition de $\mathbf{N}_{N,N'}$, on voit bien que

$$N'\big(T(v)\big) \le \mathbf{N}_{N,N'}(T) N(v), \tag{1.16.3}$$

pour tout $v \in \mathbb{E}$.

Proposition 1.16.4. *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé. On muni $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ de la norme $\mathbf{N}_{N,N}$. Soient $T, T' \in L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$. Alors, la norme $\mathbf{N}_{N,N}$ est **sous-multiplicative**, i.e.*

$$\mathbf{N}_{N,N}(T \circ T') \le \mathbf{N}_{N,N}(T) \mathbf{N}_{N,N}(T'). \tag{1.16.4}$$

En plus, $\mathbf{N}_{N,N}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = 1$.

Preuve. Soit $v \in \mathbb{E}$ non nul. Alors, (1.16.3) nous dit que

$$\frac{N\big((T \circ T')(v)\big)}{N(v)} \le \frac{\mathbf{N}_{N,N}(T) N\big(T'(v)\big)}{N(v)} \le \frac{\mathbf{N}_{N,N}(T) \mathbf{N}_{N,N}(T') N(v)}{N(v)} = \mathbf{N}_{N,N}(T) \mathbf{N}_{N,N}(T').$$

La définition de supremum implique alors

$$\mathbf{N}_{N,N}(T \circ T') = \sup_{v \in \mathbb{E} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{E}}\}} \frac{N\big((T \circ T')(v)\big)}{N(v)} \le \mathbf{N}_{N,N}(T) \mathbf{N}_{N,N}(T'),$$

comme on voulait démontrer. L'égalité $\mathbf{N}_{N,N}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = 1$ est immédiate de la définition. □

Si l'on note $\| \ \|_{\mathbb{E}}$ et $\| \ \|_{\mathbb{F}}$ les normes sur $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, respectivement, au lieu de N et N', on écrira $\| \ \|_{\mathbb{E},\mathbb{F}}$ (ou simplement $\| \ \|$) au lieu de $\mathbf{N}_{N,N'}$.

Remarque 1.16.5. *Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$. Il existe un isomorphisme $\phi : L(\mathbb{E}, \mathbb{E}) \to M_{n \times n}(\mathbb{R})$ d'espaces vectoriels, où $\phi(T) = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ est donnée par*

$$T(e_j^{\mathbb{R}^n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i^{\mathbb{R}^n},$$

où $\{e_j^{\mathbb{R}^n} : j \in [\![1, n]\!]\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En plus, c'est clair que $\phi(T \circ T') = \phi(T)\phi(T')$, pour tous $T, T' \in L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, où $\phi(T)\phi(T')$ dénote le produit matriciel. D'après l'identification évidente $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, on peut munir $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ de la norme $N_\infty = \| \ \|_\infty \circ \phi$, où $\| \ \|_\infty$ est la norme infini de

$\mathbb{R}^{n^2}$. *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *la matrice telle que toutes les coefficients valent* 1 *et* $T = \phi^{-1}(A)$. *Comme* $N_\infty(T) = 1$ *et* $N_\infty(T\circ T) = n$, *on voit bien que* N_∞ *ne satisfait pas la condition* (1.16.4) *de la Proposition 1.16.4, ce qui implique que* N_∞ *n'est pas la norme associée à une norme sur* $\mathbb{R}^n$ *si* $n > 1$.

Si l'on utilise l'identification précédente $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, *on peut aussi munir* $L(\mathbb{E},\mathbb{E})$ *de la norme* $N_2 = \| \ \|_2 \circ \phi$, *où* $\| \ \|_2$ *est la norme 2 de* $\mathbb{R}^{n^2}$. *Dans ce cas, la norme* N_2, *appelée* ***norme de Frobenius***, *est sous-multiplicative, comme le lecteur pourra démontrer en employant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, on considère la produit scalaire* $\langle\, , \rangle : L(\mathbb{E},\mathbb{E}) \times L(\mathbb{E},\mathbb{E}) \to \mathbb{R}$ *donné par* $\langle T, T'\rangle = \sum_{i=1}^n \langle T(v_i), T'(v_i)\rangle_2$, *pour* $T, T' \in L(\mathbb{E},\mathbb{E})$, *où* $\langle\, , \rangle_2$ *est le produit scalaire euclidien de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\{v_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$. *Alors, c'est facile à démontrer que la définition précédente est indépendante de la base* $\{v_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et* N_2 *est la normé associée à* $\langle\, , \rangle$. *En plus, si* $\phi(T) = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ *et* $\phi(T') = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$, *on a*

$$\langle T, T'\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} b_{i,j},$$

et en conséquence

$$N_2(T\circ T')^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \le \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{k'=1}^n b_{k',j}^2\right) = \sum_{i,k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{j,k'=1}^n b_{j,k'}^2 = N_2(T)^2 N_2(T')^2,$$

comme on voulait démontrer, où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$. *Par contre,* N_2 *n'est pas associée à une norme sur* $\mathbb{R}^n$ *si* $n > 1$, *puisque* $N_2(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \sqrt{n} > 1$ *(voir la dernière condition dans la Proposition 1.16.4).*

Chapitre 2

Calcul différentiel

Le but du deuxième chapitre c'est d'étudier le comportement local des fonctions définies sur des ouverts des espaces vectoriels de dimension finie. En particulier, on étudiera le problème d'optimisation de fonctions.

2.1 Dérivées directionnelles et dérivées partielles

On introduit les notions fondamentales de dérivée directionnelle et de différentiabilité.

Définition 2.1.1. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$ un point de U. Étant donné une vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^n$, la **dérivée directionnelle** de f en v_0 dans la direction de w, aussi appelée **dérivée au sens de Gateaux**, est donnée par la limite*

$$\frac{\partial f}{\partial w}(v_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(v_0 + t \cdot w) - f(v_0)}{t} \in \mathbb{R}^m, \tag{2.1.1}$$

*si elle existe. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, la i**-ème dérivée partielle** de f en v_0, aussi appelée la **dérivée partielle de f en v_0 selon x_i** et notée*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(v_0) \text{ ou } D_i f(v_0),$$

est donnée par la dérivée directionnelle de f en v_0 dans la direction du vecteur e_i, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.2. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$. On dit que f est **(Fréchet) différentiable** en v_0, s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que*

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{f(v_0 + h) - f(v_0) - L(h)}{\|h\|} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, \tag{2.1.2}$$

où $\| \ \|$ dénote la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.1.3. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $v_0 \in U$. Soient $L, L' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires telles que*

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{f(v_0 + h) - f(v_0) - L(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{f(v_0 + h) - f(v_0) - L'(h)}{\|h\|} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, \tag{2.1.3}$$

où $\| \ \|$ dénote la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Alors $L = L'$.

Preuve. D'après (2.1.3) on voit bien que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{L'(h) - L(h)}{\|h\|} &= \lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \left(\frac{f(v_0 + h) - f(v_0) - L(h)}{\|h\|} - \frac{f(v_0 + h) - f(v_0) - L'(h)}{\|h\|} \right) \\
&= \lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{f(v_0 + h) - f(v_0) - L(h)}{\|h\|} - \lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{f(v_0 + h) - f(v_0) - L'(h)}{\|h\|} \\
&= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} - \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}.
\end{aligned}$$

Or, $(L'(h)-L(h))/\|h\| = (L'-L)(h/\|h\|)$, vu que $L'-L$ est une application linéaire. Cela nous dit que

$$\lim_{h\to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} (L'-L)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

En particulier, soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque de norme 1 et on pose $h = tv$, avec $t \in \mathbb{R}_{>0}$. La limite précédente implique *a fortiori* que

$$\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} = \lim_{t\to 0^+} (L'-L)\left(\frac{tv}{\|tv\|}\right) = \lim_{t\to 0^+} (L'-L)\left(\frac{tv}{t\|v\|}\right) = \lim_{t\to 0^+} (L'-L)(v) = (L'-L)(v),$$

car le dernier membre ne dépend pas de t. On a bien montré que L et L' coïncident en tout vecteur de norme 1. Soit w un vecteur non nul et on pose $v = w/\|w\|$, *i.e.* $w = \|w\|v$. Alors,

$$L(w) = L\big(\|w\|v\big) = \|w\|L(v) = \|w\|L'(v) = L'\big(\|w\|v\big) = L'(w),$$

Finalement, comme $L(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} = L(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n})$, car toute application linéaire envoie le vecteur nul dans le vecteur nul, on conclut que $L = L'$. □

Définition 2.1.4. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $v_0 \in U$. D'après la proposition précédente, l'application linéaire L dans* (2.1.2) *est unique. Elle est appelée la* ***différentielle (de Fréchet)*** *de f en v_0 et sera notée $Df(v_0)$.*

On dira que f est ***différentiable (sur U)*** *si f est différentiable en tout point $v \in U$. Cela induit une fonction $Df : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ donnée par $v \mapsto Df(v)$, pour tout $v \in U$, que l'on appelle* ***différentielle*** *de f.*

Remarque 2.1.5. *C'est facile à vérifier que si* (2.1.2) *est vérifiée pour la norme euclidienne, elle est aussi vérifiée pour une norme équivalente. Comme toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ son équivalentes, d'après le Théorème 1.8.1, la définition de différentiabilité d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^m$ est indépendante de la norme choisie.*

Remarque 2.1.6. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$, avec U ouvert. Il existe alors $r > 0$ tel que $B_{\|\ \|}(v_0, r) \subseteq U$. C'est facile à voir que f est différentiable en v_0 si et seulement s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et une fonction $\psi : B_{\|\ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) \to \mathbb{R}^m$ telles que*

$$f(v_0 + h) = f(v_0) + L(h) + \psi(h)\|h\|, \tag{2.1.4}$$

pour tout $h \in B_{\|\ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$ et que

$$\lim_{h\to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \psi(h) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}. \tag{2.1.5}$$

Exemple 2.1.7. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application constante. Alors, f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $Df(v) = \mathbf{0}_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.*

Notation 2.1.8. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $v_0 \in U$. Si $n = 1$, on identifiera la différentielle $Df(v_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ avec le vecteur $Df(v_0)(1) \in \mathbb{R}^m$, que l'on notera $f'(v_0)$ et que l'on appelle la* ***dérivée*** *de f en v_0. Par ailleurs, si $m = 1$, on identifiera la différentielle $Df(v_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec le vecteur $\nabla f(v_0) = (Df(v_0)(e_1), \dots, Df(v_0)(e_n))$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est clair que $Df(v_0)(w) = \langle \nabla f(v_0), w\rangle$ pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, où $\langle\ ,\ \rangle$ dénote le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$. Le vecteur $\nabla f(v_0)$ est appelé le* ***gradient*** *de f en v_0.*

Proposition 2.1.9. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$. Si f est différentiable en v_0, alors f est continue en v_0.*

Preuve. D'après la Remarque 2.1.6, il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et une fonction $\psi : B_{\|\ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) \to \mathbb{R}^m$ (où $r > 0$ est donné par la condition $B_{\|\ \|}(v_0, r) \subseteq U$) telles que

$$f(v_0 + h) - f(v_0) = L(h) + \psi(h)\|h\|, \tag{2.1.6}$$

pour tout $h \in B_{\|\ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$ et que

$$\lim_{h\to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \psi(h) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}. \tag{2.1.7}$$

Si l'on prend la limite de (2.1.6) quand h tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, on utilise que toute application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie est continue (voir la Proposition 1.16.2) et (2.1.7), on conclut que $f(v_0 + h) - f(v_0)$ tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$, quand h tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, *i.e.* f est continue en v_0. □

Exemple 2.1.10. *Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. C'est facile à vérifier que la dérivée directionnelle de L en tout point $v \in \mathbb{R}^n$ dans la direction de tout vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^n$ existe. En plus, L est différentiable en tout point $v \in \mathbb{R}^n$ et sa différentielle $DL(v)$ est précisément L. En conséquence, les fonction considérées dans l'Exemple 1.12.6 sont différentiables.*

Remarque 2.1.11. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$. Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'application $\alpha(t) = v_0 + t \cdot w$, où $w \in \mathbb{R}^n$ est une vecteur non nul. Comme α est évidemment continue, $\alpha(0) = v_0 \in U$ et U est ouvert, d'après la Proposition 1.12.10, $\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ incluant 0. On choisit un intervalle ouvert $J \subseteq \alpha^{-1}(U)$ incluant 0. Alors, on voit bien que la dérivée directionnelle de f en v_0 dans la direction du vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^n$ existe si et seulement la fonction $f_w : J \to \mathbb{R}^m$ donnée par $f_w = f \circ \alpha|_J$ est différentiable en 0, et la dérivée directionnelle est précisément $f'_w(0)$.*

On va démontrer le résultat le plus important de fonctions différentiables.

Théorème 2.1.12. *Soient $n, m, p \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ des parties ouvertes, $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^p$ des applications. Soit $v_0 \in U$ et $w_0 = f(v_0) \in V$. Si f est différentiable en v_0 et g est différentiable en w_0, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en v_0 et*

$$D(g \circ f)(v_0) = Dg(w_0) \circ Df(v_0). \tag{2.1.8}$$

Preuve. On choisit $s > 0$ tel que $B_{\| \ \|}(w_0, s) \subseteq V$. Comme f est continue en v_0 (voir la Proposition 2.1.9), il existe $r > 0$, tel que $f(B_{\| \ \|}(v_0, r)) \subseteq B_{\| \ \|}(w_0, s)$. Or, comme f est différentiable en v_0 et g est différentiable en $w_0 = f(v_0)$, il existe des applications linéaires $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $L' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, et des fonctions $\psi : B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) \to \mathbb{R}^m$ et $\psi' : B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, s) \to \mathbb{R}^p$ telles que

$$f(v_0 + h) = f(v_0) + L(h) + \psi(h)\|h\| \text{ et } g(w_0 + k) = g(w_0) + L'(k) + \psi'(k)\|k\| \tag{2.1.9}$$

pour tout $h \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$ et $k \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, s)$ et que

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \psi(h) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} \text{ et } \lim_{k \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}} \psi'(k) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}. \tag{2.1.10}$$

On remarque que $L = Df(v_0)$ et $L' = Dg(w_0)$.

On considère maintenant la deuxième égalité dans (2.1.9) avec $k = f(v_0 + h) - f(v_0)$, *i.e.*

$$\begin{aligned}(g \circ f)(v_0 + h) &= (g \circ f)(v_0) + L'\big(f(v_0 + h) - f(v_0)\big) + \psi'(f(v_0 + h) - f(v_0))\|f(v_0 + h) - f(v_0)\| \\ &= (g \circ f)(v_0) + (L' \circ L)(h) + L'\big(\psi(h)\big)\|h\| + \psi'\big(f(v_0 + h) - f(v_0)\big)\|f(v_0 + h) - f(v_0)\|,\end{aligned}$$

pour tout $h \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$. On pose $\bar{\psi} : B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) \to \mathbb{R}^p$ via

$$\bar{\psi}(h) = L'\big(\psi(h)\big) + \psi'\big(f(v_0 + h) - f(v_0)\big)\frac{\|f(v_0 + h) - f(v_0)\|}{\|h\|},$$

pour tout $h \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$. Or, comme L' est une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, elle est continue (voir la Proposition 1.16.2). Cela implique que le premier opérande dans la définition de $\bar{\psi}(h)$ tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$, quand h tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, d'après la première égalité dans (2.1.10). En outre, à partir de la continuité de f en v_0 (voir la Proposition 2.1.9), $f(v_0 + h) - f(v_0)$ tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$, quand h tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. D'après la deuxième égalité dans (2.1.10), on conclut que $\psi'\big(f(v_0 + h) - f(v_0)\big)$ tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$, quand h tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Pour démontrer que le deuxième opérande dans la définition de $\bar{\psi}(h)$ tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$, quand h tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ et $K > 0$ tels que

$$\frac{\|f(v_0 + h) - f(v_0)\|}{\|h\|} \leq K$$

pour tout $h \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$. Or,

$$\begin{aligned}\frac{\|f(v_0 + h) - f(v_0)\|}{\|h\|} &= \frac{\big\|Df(v_0)(h) + \psi(h)\|h\|\big\|}{\|h\|} \leq \frac{\|Df(v_0)(h)\| + \|\psi(h)\|\|h\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{\|Df(v_0)(h)\|}{\|h\|} + \|\psi(h)\| \leq C + \|\psi(h)\|,\end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante telle que $\|Df(v_0)(h)\| \leq C\|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ (voir Propositions 1.16.1 et 1.16.2). D'après la première égalité dans (2.1.10), on trouve qu'il existe $r > 0$ et $K > 0$ tels que

$$\frac{\|f(v_0 + h) - f(v_0)\|}{\|h\|} \leq K,$$

comme on voulait démontrer. En conséquence,

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \bar{\psi}(h) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p},$$

ce qui nous dit que $g \circ f$ est différentiable en v_0 et sa différentielle en v_0 est $L' \circ L = Dg(w_0) \circ Df(v_0)$. $\square$

Proposition 2.1.13. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$. Si f est différentiable en v_0, alors pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ non nul, la dérivée directionnelle de f en v_0 dans la direction de w existe et*

$$\frac{\partial f}{\partial w}(v_0) = Df(v_0)(w).$$

En particulier, si f est différentiable en v_0, toutes les dérivés partielles en v_0 existent.

Preuve. Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 2.1.12, appliqué à la fonction $f_w : J \to \mathbb{R}^m$ définie dans la Remarque 2.1.11. $\square$

Définition 2.1.14. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$. On suppose que les dérivées partielles de f en v_0 existent. On écrit en plus $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, pour tout $x \in U$. La **matrice jacobienne** $J_f(v_0)$ de f en v_0 est la matrice de taille $m \times n$ donnée par*

$$J_f(v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(v_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(v_0) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(v_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(v_0) \end{pmatrix}.$$

*Si $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur, la **matrice colonne transposée** h^t de h est la matrice de taille $n \times 1$ donnée par $h_{i,1} = h_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, i.e.*

$$h^t = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Si $m = 1$, i.e. $f : U \to \mathbb{R}$, la matrice $J_f(v_0)$ a taille $1 \times n$ et elle est précisément le vecteur

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(v_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(v_0)\Big).$$

D'après la Proposition 2.1.13, si f est différentiable en $v_0 \in U$, alors

$$\Big(Df(v_0)(h)\Big)^t = J_f(v_0) \cdot h^t, \tag{2.1.11}$$

ou $\cdot$ dénote le produit matriciel.

Remarque 2.1.15. *En termes des matrices jacobiennes, l'identité* (2.1.8) *dans le Théorème 2.1.12 s'écrit sous la forme*

$$J_{g \circ f}(v_0) = J_g\big(f(v_0)\big) \cdot J_f(v_0),$$

où $\cdot$ dénote le produit matriciel.

Définition 2.1.16. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$. On dit que $f : U \to \mathbb{R}^m$ est de **classe** C^1 en v_0 s'il existe un ouvert $V \subseteq U$ avec $v_0 \in V$ tel que toutes les dérivées partielles de f existent en tout point $x \in V$ et les fonctions $D_i f : V \to \mathbb{R}$ sont continues sur V pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En plus, $f : U \to \mathbb{R}^m$ est de **classe** C^1 (sur U) si f est de classe C^1 en tout point $v \in U$. Plus généralement, on procède par récurrence pour définir la notion suivante. On dit que $f : U \to \mathbb{R}^m$ est de **classe** C^{p+1} (sur U), pour $p \in \mathbb{N}$, si l'application $Df : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est de classe C^p (sur U), où une application est de **classe** C^0 si elle est continue. On dit que $f : U \to \mathbb{R}^m$ est de **classe** C^∞ (sur U) si f est de classe C^p (sur U) pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

Exemple 2.1.17. *On continue avec l'Exemple 2.1.10. Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Comme la différentielle $DL(v)$ de L en $v \in \mathbb{R}^n$ est précisément L, l'application $DL : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est constante et donc aussi différentiable, avec différentielle nulle (voir l'Exemple 2.1.7). Un argument par récurrence direct nous alors que L est de classe C^∞. De la même, façon toute* ***application affine*** *$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^∞, où l'on rappelle qu'une application est dite affine s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et un vecteur $w \in \mathbb{R}^m$ tels que $A(v) = L(v) + w$, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.*

Exemple 2.1.18. *C'est facile à vérifier que l'application $\mathfrak{s} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donnée par l'addition vectorielle (voir l'Exemple 1.12.5) est aussi une application C^∞.*

Proposition 2.1.19. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$. Si f est de classe C^1 en v_0, alors f est différentiable en v_0.*

Preuve. Soit $V \subseteq U$ une partie ouverte qui inclut $v_0 = (v_{0,1}, \dots, v_{0,n})$ telle que les dérivées partielles de f en x existent pour tout $x \in V$ et qu'elles soient continues. Soit $r > 0$ tel que $B_{\| \ \|}(v_0, r) \subseteq V$ et soit $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\| < r$. Le Théorème des accroissements finis pour des fonctions d'une seule variable nous dit que

$$\begin{aligned} f(v_{0,1} + h_1, \dots, v_{0,n}{+}h_n) - f(v_{0,1}, \dots, v_{0,n}) &\\ = \sum_{i=1}^n \Big(f(v_{0,1}, \dots, v_{0,i-1}, v_{0,i} + h_i, v_{0,i+1} + h_{i+1}, \dots, v_{0,n} + h_n) &\\ - f(v_{0,1}, \dots, v_{0,i-1}, v_{0,i}, v_{0,i+1} + h_{i+1}, \dots, v_{0,n} + h_n)\Big) &\\ = \sum_{i=1}^n D_i f(v_{0,1}, \dots, v_{0,i-1}, c_i, v_{0,i+1} + h_{i+1}, \dots, v_{0,n} + h_n) h_i, & \end{aligned}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$ appartient au segment déterminé par $v_{0,i}$ et $v_{0,i} + h_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La continuité des dérivées partielles implique qu'il existe une fonction $\varphi_i : B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$D_i f(v_{0,1}, \dots, v_{0,i-1}, c_i, v_{0,i+1} + h_{i+1}, \dots, v_{0,n} + h_n) = D_i f(v_{0,1}, \dots, v_{0,n}) + \varphi_i(h)$$

et

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \varphi_i(h) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}, \tag{2.1.12}$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En conséquence,

$$f(v_{0,1} + h_1, \dots, v_{0,n} + h_n) - f(v_{0,1}, \dots, v_{0,n}) = \sum_{i=1}^n D_i f(v_{0,1}, \dots, v_{0,n}) h_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i(h) h_i.$$

On pose

$$\psi(h) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(h) \frac{h_i}{\|h\|}$$

pour tout $h \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$ et $L(h) = \sum_{i=1}^n D_i f(v_{0,1}, \dots, v_{0,n}) h_i$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Comme

$$\|\psi(h)\| \leq \sum_{i=1}^n \|\varphi_i(h)\| \frac{|h_i|}{\|h\|} \leq \sum_{i=1}^n \|\varphi_i(h)\|,$$

où l'on a utilisé que $|h_i| \leq \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} = \|h\|$, (2.1.12) nous dit que

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \psi(h) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

En conséquence, f est différentiable en v_0, comme on voulait démontrer. □

Corollaire 2.1.20. *Soient $n, m, p \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ des parties ouvertes, $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^p$ des applications. Soit $v_0 \in U$ et $w_0 = f(v_0) \in V$. Si f est de classe C^1 en v_0 et g est de classe C^1 en w_0, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1 en v_0.*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence immédiate du Théorème 2.1.12 et de la Proposition 2.1.19. $\square$

Exemple 2.1.21. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$, et soit $w = (1, 2)$. On va montrer que la dérivée directionnelle de f en $v_0 = (-1, 3)$ dans la direction de w existe et on va calculer sa valeur. On note d'abord que f est une fonction polynomiales, ce qui nous dit qu'elle est de classe C^1. Les dérivées partielles sont*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1, \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2.$$

On utilisera la terminologie décrite dans la Notation 2.1.8. Le gradient de f en $(-1, 3)$ est alors $\nabla f(-1, 3) = (-2, 27)$. D'après Proposition 2.1.13 on a

$$\frac{\partial f}{\partial w}(v_0) = \langle \nabla f(v_0), w\rangle = \langle (-2, 27), (1, 2)\rangle = 52.$$

Proposition 2.1.22. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application et $v_0 \in U$. On écrit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, pour tout $x \in U$. Alors, f est différentiable (resp., de classe C^1) en v_0 si et seulement si f_i est différentiable (resp., de classe C^1) en v_0 pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.*

Preuve. On va faire seulement la preuve pour l'énoncé sur la différentiabilité, la preuve de l'énoncé sur la propriété C^1 étant similaire.

Comme $f_i = \pi_i \circ f$, où $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est l'application $(y_1, \dots, y_m) \mapsto y_i$, et π_i est une application linéaire, le Théorème 2.1.12 nous dit que f_i est différentiable en v_0 pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ si f est différentiable en v_0. Réciproquement, on suppose que f_i est différentiable en v_0 pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. D'après la Remarque 2.1.6, il existe une application linéaire $L_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction $\psi_i : B_{\| \;\|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r_i) \to \mathbb{R}$ (où $r_i > 0$ est donné par la condition $B_{\| \;\|}(v_0, r_i) \subseteq U$) telles que

$$f_i(v_0 + h) - f_i(v_0) = L_i(h) + \psi_i(h)\|h\|,$$

pour tout $h \in B_{\| \;\|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r_i))$ et que

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \psi_i(h) = 0.$$

On pose $r = \min(r_1, \dots, r_n) > 0$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ via $L(h) = (L_1(h), \dots, L_m(h))$, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et $\psi : B_{\| \;\|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r) \to \mathbb{R}^m$ via $\psi(h) = (\psi_1(h), \dots, \psi_m(h))$, pour tout $h \in B_{\| \;\|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, r)$. Alors, $f(v_0 + h) - f(v_0) = L(h) + \psi(h)\|h\|$ et

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \psi(h) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m},$$

ce qui implique que f est différentiable en v_0. $\square$

Le résultat suivant est standard.

Proposition 2.1.23. *Soient $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $g : U \to \mathbb{R}^m$ des applications différentiables (resp., de classe C^1). Alors, l'application $f + \lambda g : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable (resp., de classe C^1), et $D(f + \lambda g)(v) = Df(v) + \lambda Dg(v)$;*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence du Théorème 2.1.12, car $f + \lambda g$ s'écrit comme la composition de l'application $(f, \lambda, g) : U \to \mathbb{R}^{2m+1}$ donnée par $x \mapsto (f(x), \lambda, g(x))$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \times \mathfrak{p} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ et $\mathfrak{s} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (voir l'Exemple 1.12.5). On remarque que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \times \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{s}$ sont de classe C^∞ (voir les Exemples 2.1.17 et 2.1.18, ainsi que l'argument dans la preuve du Corollaire 1.12.9), et que (f, λ, g) est différentiable (resp., de classe C^1) d'après la Proposition 2.1.22. $\square$

Remarque 2.1.24. *On remarque d'abord que le Corollaire 2.1.20, et les Proposition 2.1.22 et 2.1.23 sont valables pour tout $p \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$, avec les mêmes arguments.*

2.2 Une application géométrique : lignes de niveau

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On rappelle que l'ensemble de niveau $c \in \mathbb{R}$ de f est donné par

$$L_c = \{x \in U : f(x) = c\}.$$

On considère $v_0 \in L_c$ tel que $\nabla f(v_0) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Soit $\alpha : J \to L_c$ une application de classe C^∞, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert tel que $0 \in J$, telle que $\alpha(0) = v_0$. Le vecteur $\alpha'(0)$ est, par définition, tangent à l'ensemble L_c. Comme la fonction $f \circ \alpha$ est constante (avec valeur c), sa dérivée est nulle. Le Théorème 2.1.12 nous dit que

$$0 = (f \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla f\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\rangle,$$

pour tout $t \in J$. En particulier, pour $t = 0$ on a

$$0 = \langle \nabla f(v_0), \alpha'(0)\rangle,$$

pour tout courbe α construite comme ci-dessus. Réciproquement, le Théorème de la Fonction Implicite implique que, pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 = \langle \nabla f(v_0), w\rangle$, il existe une courbe $\alpha : J' \to L_c$ (avec $J' \subseteq \mathbb{R}$ une intervalle ouvert qui inclut 0) tel que $\alpha(0) = v_0$ et $w = \alpha'(0)$ (voir [1], Cor. XVIII.4.7), ce qui nous donne le résultat suivant.

Interpretation 2.2.1. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $v_0 \in L_c$ dans l'ensemble de niveau de f, où $c \in \mathbb{R}$, tel que $\nabla f(v_0) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Alors, le vecteur gradient $\nabla f(v_0)$ est orthogonal à l'ensemble de niveau L_c en v_0.*

2.3 Symétrie de la différentiabilité d'ordre supérieure

Par simplicité et motivé par l'étude d'optimisation de fonctions, on va désormais se concentrer à étudier des **fonctions scalaires**, *i.e.* des fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ où $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est une partie ouverte, même si ces résultats peuvent être généralisés au cas des fonctions vectorielles $f : U \to \mathbb{R}^m$ (voir [1], Ch. XVII, §5-7).

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^p sur U. On rappelle que les dérivées partielles successives $D_{i_1} \dots D_{i_\ell} f(x)$, où $i_1, \dots, i_\ell \in [\![1, n]\!]$, $\ell \in [\![1, p]\!]$ et $x \in U$, sont définies par récurrence via

$$D_{i_1} \dots D_{i_\ell} f(x) = D_{i_1}\Big(D_{i_2} \dots D_{i_\ell} f(x)\Big),$$

pour tout $x \in U$. Normalement, on note $D_{i_1} \dots D_{i_\ell} f(x)$ aussi

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(x).$$

Le résultat suivant est normalement attribué à K. Schwarz ou à A.-C. Clairaut, et montre l'utilité de la propriété C^2.

Proposition 2.3.1. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. Alors,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(v),$$

pour tout $v = (v_1, \dots, v_n) \in U$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Preuve. Si $i = j$ il n'y a rien à démontrer donc on va supposer $i < j$. Dans ce cas, il suffit de démontrer l'énoncé pour $n = 2$, $i = 1$ et $j = 2$. En effet, soit $\mathrm{inc} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ l'inclusion donnée par

$$\mathrm{inc}(x, y) = (v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, y, v_{j+1}, \dots, v_n),$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme inc est continue, $U' = \mathrm{inc}^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ est ouvert et $(v_i, v_j) \in U'$. Si l'on pose $\bar{f} = f \circ \mathrm{inc}|_{U'} : U' \to \mathbb{R}$, c'est clair que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(v) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}(v_i, v_j) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(v) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x}(v_i, v_j),$$

ce qui réduit la preuve de l'énoncé au cas $n = 2$, $i = 1$ et $j = 2$, comme on avait affirmé.

Comme U est ouvert et $(v_1, v_2) \in U$, il existe $r > 0$ tel que $R = [v_1-r, v_1+r]\times[v_2-r, v_2+r] \subseteq U$. Pour $x_2 \in [v_2 - r, v_2 + r] \setminus \{v_2\}$, soit $g_{x_2} : [v_1 - r, v_1 + r] \setminus \{v_1\} \to \mathbb{R}$ donné par $g_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2) - f(x_1, v_2)$. C'est clair que g_{x_2} est de classe C^2, pour tout $x_2 \in [v_2 - r, v_2 + r] \setminus \{v_2\}$. D'après le Théorème des accroissements finis pour des fonctions d'une seule variable

$$g_{x_2}(x_1) - g_{x_2}(v_1) = h_1 g'_{x_2}(c_1) = h_1\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, v_2)\Big),$$

où $h_1 = x_1 - v_1 \neq 0$ et c_1 est dans le segment déterminé par v_1 et x_1. Si l'on utilise la définition de g_{x_2}, l'équation précédente s'écrit

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2) - f(x_1, v_2) - f(v_1, x_2) + f(v_1, v_2) = g_{x_2}(x_1) - g_{x_2}(v_1) \\ &= h_1\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, v_2)\Big) = h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1, c_2), \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

où $h_2 = x_2 - v_2 \neq 0$, l'on a appliqué le Théorème des accroissements finis à la fonction $x_2 \mapsto (\partial f/\partial x_1)(c_1, x_2)$ et c_2 est dans le segment déterminé par v_2 et x_2.

De façon similaire, si l'on considère la fonction $h_{x_1} : [v_2 - r, v_2 + r] \setminus \{v_2\} \to \mathbb{R}$ donnée par $h_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) - f(v_1, x_2)$, où $x_1 \in [v_1 - r, v_1 + r] \setminus \{v_1\}$, h_{x_1} est de classe C^2 pour tout $x_1 \in [v_1 - r, v_1 + r] \setminus \{v_1\}$ et

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2) - f(v_1, x_2) - f(x_1, v_2) + f(v_1, v_2) = h_{x_1}(x_2) - h_{x_1}(v_2) \\ &= h_2\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, d_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(v_1, d_2)\Big) = h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(d_1, d_2), \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

où d_1 est dans le segment déterminé par v_1 et x_1 et d_2 est dans le segment déterminé par v_2 et x_2. Comme les premiers membres de (2.3.1) et (2.3.2) coïncident, les derniers membres aussi. Si l'on divise l'égalité entre les derniers membres de (2.3.1) te (2.3.2) par $h_1 h_2$ et on prend la limite quand h_1 et h_2 tendent vers 0, la continuité des dérivées partielles secondes nous dit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(v),$$

comme on voulait démonter. □

2.4 Une application géométrique: le plan tangent

Définition 2.4.1. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ une partie ouverte. Une* ***surface paramétrique lisse*** *dans $\mathbb{R}^n$ est une application $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞. On écrira $\sigma(x_1, x_2) = (\sigma_1(x_1, x_2), \dots, \sigma_n(x_1, x_2))$, pour tout $x = (x_1, x_2) \in U$. On dit que la surface paramétrique lisse est* ***régulière*** *si l'ensemble*

$$\Big\{\frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x)\Big\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

est libre pour tout $x \in U$, où

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial x_i}(x)\right),$$

pour $i = 1, 2$.

Remarque 2.4.2. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ une partie ouverte et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞. Alors, l'application $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ définie via $\sigma(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ est une surface paramétrique lisse régulière dans $\mathbb{R}^3$. La plupart des exemples que l'on va considérer seront de cette forme. En fait, le Théorème de la Fonction Inverse (voir* [1]*, Thm. XVIII.3.1) nous que, au moins de façon locale, tout surface paramétrique lisse régulière est isomorphe à un exemple de cette forme.*

Exemple 2.4.3. *Soit $U = \mathbb{R}^2$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. La remarque précédente nous donne une surface paramétrique lisse régulière $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ via $\sigma(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1^2 - x_2^2)$.*

Définition 2.4.4. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ une partie ouverte et $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ surface paramétrique lisse régulière dans $\mathbb{R}^n$. Le **plan tangent** à σ en $\sigma(a)$, où $a \in U$, est donnée par la surface paramétrique lisse régulière $\varsigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ donnée par*

$$\varsigma(s,t) = \sigma(a) + s \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(a) + t \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(a).$$

Si $n = 3$, ce plan est donné par

$$\Big\{ x \in \mathbb{R}^3 : \Big\langle \big(x - \sigma(a)\big), n \Big\rangle = 0 \Big\},$$

où n est le produit vectoriel

$$n = \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(a) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(a).$$

2.5 Expansions de Taylor d'ordre 2

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3. Soit $v_0 \in U$. Il existe $r > 0$ tel que $\bar{B}_{\| \ \|}(v_0, 2r) \subseteq U$. On prend $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\|h\| < r$. Soit $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ l'application $\alpha(t) = v_0 + t \cdot h$ pour tout $t \in J$, où $J =]-2, 2[\subseteq \mathbb{R}$. Comme α est de classe C^∞ (voir l'Exemple 2.1.17), f_h est de classe C^3. L'expression intégrale du résidu de Taylor d'ordre 2 pour la théorie de fonctions d'une seule variable nous dit que

$$f_h(1) = f_h(0) + f_h'(0) + \frac{1}{2} f_h''(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)^2 f_h'''(s) ds. \tag{2.5.1}$$

On rappelle que la formule précédente est obtenue de faire intégration par parties deux fois sur l'expression du Théorème Fondamental de l'Analyse. Plus précisément, si $g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert incluant 0 et 1, alors

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(s) ds.$$

Si l'on écrit

$$\int_0^1 g'(s) ds = \int_0^1 (s-1)' g'(s) ds = \Big[(s-1) g'(s) \Big]_0^1 + \int_0^1 (1-s) g''(s) ds = g'(0) + \int_0^1 (1-s) g''(s) ds,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-s) g''(s) ds &= \int_0^1 \Big(-\frac{(1-s)^2}{2} \Big)' g''(s) ds = \Big[-\frac{(1-s)^2}{2} g''(s) \Big]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)^2 g'''(s) ds \\ &= \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)^2 g'''(s) ds, \end{aligned}$$

on trouve (2.5.1). Par ailleurs, Théorème 2.1.12 donne

$$f_h'(0) = \big\langle \nabla f(v_0), h \big\rangle \quad \text{et} \quad f_h''(0) = h \cdot H_f(v_0) \cdot h^t, \tag{2.5.2}$$

où

$$H_f(v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(v_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(v_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(v_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(v_0) \end{pmatrix}$$

est la **matrice hessienne** de f en v_0. On remarque que le produit $\cdot$ est le produit matriciel standard, où l'on considère le vecteur $h = (h_1, \dots h_n)$ de façon canonique comme une matrice ligne de taille $1 \times n$. D'après la Proposition 2.3.1, comme f est *a fortiori* de classe C^2, la matrice hessienne $H_f(v_0)$ est **symétrique**, *i.e.* $H_f(v_0)^t = H_f(v_0)$.

En plus, le Théorème 2.1.12 nous dit que

$$f_h'''(s) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \underbrace{h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(v_0 + s \cdot h)}_{\star_{i,j,k}(s)}, \tag{2.5.3}$$

où $s \in J$. Comme f est de classe C^3, il existe $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $| \star_{i,j,k} (s)| \leq C$ pour tout $s \in J$ and all $i, j, k = 1, \ldots, n$. En conséquence,

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)^2 f_h'''(s) ds \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 |h_i|\,|h_j|\,|h_k|\, C ds \leq \frac{C}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} |h_i|\,|h_j|\,|h_k|,$$

d'où on obtient que

$$\left| \frac{1}{2\|h\|^2} \int_0^1 (1-s)^2 g'''(s) ds \right| \leq \frac{C}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \underbrace{\frac{|h_i|}{\|h\|}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{|h_j|}{\|h\|}}_{\leq 1} |h_k| \leq \frac{Cn^3}{2} \|h\|,$$

où l'on a utilisé l'inégalité évidente $|h_i| \leq \|h\|$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et pour tout vecteur $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

La discussion précédente démontre le résultat suivant.

Proposition 2.5.1. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3. Soient $v_0 \in \bar{B}_{\|\ \|}(v_0, 2r) \subseteq U$ et $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\|h\| < r$. Alors,*

$$f(v_0 + h) = f(v_0) + \big\langle h, \nabla f(v_0) \big\rangle + \frac{1}{2} h \cdot H_f(v_0) \cdot h^t + \phi(h),$$

où $\phi : B_{\|\ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r) \to \mathbb{R}$ est une application qui satisfait la condition $\mathrm{o}(t^2)$, i.e.

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{\phi(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

2.6 Optimisation de fonctions

2.6.1 Définitions basiques et quelques propriétés

Dans cette dernière section on va étudier le problème d'optimisation de fonctions scalaires qui satisfont quelques propriétés de régularité. Pour cela on commence avec quelques définitions préliminaires.

Définition 2.6.1. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On dit que $v_0 \in U$ est*

*(i) un **point critique** de f si $\nabla f(v_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$;*

*(ii) un **maximum local** (resp., **minimum local**) de f s'il existe une partie ouverte $V \subseteq U$ telle que $v_0 \in V$ et $f(v_0) \geq f(v)$ (resp., $f(v_0) \leq f(v)$) pour tout $v \in V$;*

*(iii) un **maximum local strict** (resp., **minimum local strict**) de f s'il existe une partie ouverte $V \subseteq U$ telle que $v_0 \in V$ et $f(v_0) > f(v)$ (resp., $f(v_0) < f(v)$) pour tout $v \in V \setminus \{v_0\}$.*

*Un **extremum local** (resp., **extremum local strict**) de f est maximum local ou minimum local (resp., maximum local strict ou minimum local strict).*

Le résultat suivant est le point de départ pour l'étude de l'optimisation de fonctions différentiable.

Proposition 2.6.2. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable et $v_0 \in U$. Si v_0 est un extremum local de f, alors c'est un point critique.*

Preuve. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il existe $r > 0$ tel que $B_{\| \ \|}(v_0, 2r) \subseteq U$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère l'application $\alpha_i : J \to \mathbb{R}^n$ donnée par $\alpha_i(t) = v_0 + t \cdot e_i$ pour tout $t \in J$, où $J \subseteq]-r, r[$ est un intervalle ouvert incluant 0. On remarque que α_i est de classe C^∞ (voir l'Exemple 2.1.17), ce qui implique que l'application $g_i : J \to \mathbb{R}$ donnée par $g_i = f \circ \alpha_i$ est différentiable. Comme v_0 est un extremum local de f, $t = 0$ est un extremum local de g_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui implique que $g_i'(0) = 0$, d'après la théorie de fonctions d'une seule variable. En outre, le Théorème 2.1.12 nous dit que

$$0 = g_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(v_0),$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, comme on voulait démontrer. □

2.6.2 Le résultat principal

Le but de cette sous-section est de donner un critère suffisant pour qu'un point critique soit un extremum ou non. On suppose désormais que $f : U \to \mathbb{R}$ une application est une application de classe C^3 sur une partie ouverte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et que $v_0 \in U$ est un point critique de f. La Proposition 2.5.1 nous dit que

$$f(v_0 + h) = f(v_0) + \big\langle h, \underbrace{\nabla f(v_0)}_{=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \big\rangle + \frac{1}{2} h \cdot H_f(v_0) \cdot h^t + \phi(h), \tag{2.6.1}$$

pour tout $h \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r)$, où $r > 0$ satisfait que $B_{\| \ \|}(v_0, 2r) \subseteq U$, et $\phi : B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r) \to \mathbb{R}$ satisfait que

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{\phi(h)}{\|h\|^2} = 0. \tag{2.6.2}$$

L'annulation du gradient est une conséquence du fait que v_0 est un point critique de f. L'expression **??** suggère que le comportement local de f autour de v_0 est déterminé par

$$\frac{1}{2} h \cdot H_f(v_0) \cdot h^t,$$

ce qui motive la définition suivante.

Définition 2.6.3. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. Un point critique $v_0 \in U$ de f est **non dégénéré** si $\det(H_f(v_0)) \neq 0$. Noter que cela équivaut à dire que toutes les valeurs propres de $H_f(v_0)$ sont non nulles.*

On rappelle d'abord que $H_f(v_0)$ est une matrice symétrique, d'après la Proposition 2.3.1. On va utiliser le résultat suivant, que l'on ne va pas démontrer. Il suffit de dire que la preuve se base sur une récurrence sur la dimension n.

Proposition 2.6.4. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique avec $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Alors il existe un matrice **orthogonale** $P \in M_n(\mathbb{R})$, i.e. $P^t \cdot P = P \cdot P^t = \mathrm{Id}_n$ est la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, telle que*

$$A = P \cdot D \cdot P^t,$$

où D est une matrice diagonale. Dans ce cas, la matrice D est formée des valeurs propres de A, répétées selon la multiplicité.

On remarque que la proposition précédente nous dit que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(P \cdot D \cdot P^t) = \det(P)\det(D)\det(P^t) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(D)\det(P)^{-1} = \det(D) = \prod_{i=1}^n D_{i,i}, \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

pour tout matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour décider si un point critique est un extremum local et déterminer sa nature. La preuve est une application de la Proposition 2.5.1.

Théorème 2.6.5. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3. Soit $v_0 \in U$ un point critique non dégénéré de f. On a les résultats suivants:*

(i) si toutes les valeurs propres de $H_f(v_0)$ sont (strictement) positives, alors v_0 est un minimum local strict de f;

(ii) si toutes les valeurs propres de $H_f(v_0)$ sont (strictement) négatives, alors v_0 est un maximum local strict de f;

(iii) si $H_f(v_0)$ admet une valeur propre négative et une valeur propre positive, alors v_0 n'est pas un extremum.

Dans le dernier cas on dit que v_0 est un ***point-selle*** *ou un* ***point col****.*

Preuve. On peut réécrire (2.6.1) sous la forme suivante

$$f(v_0 + h) - f(v_0) = \frac{1}{2} h \cdot H_f(v_0) \cdot h^t + \phi(h), \tag{2.6.4}$$

pour $h = (h_1, \dots, h_n) \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r)$, où $r > 0$ satisfait que $B_{\| \ \|}(v_0, 2r) \subseteq U$, et $\phi : B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r) \to \mathbb{R}$ satisfait que

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{\phi(h)}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2} = 0. \tag{2.6.5}$$

L'identité (2.6.4) nous dit que

(Ext.1) v_0 est un minimum local strict si et seulement s'il existe $0 < s < r$ tel que $\frac{1}{2} h \cdot H_f(v_0) \cdot h^t + \phi(h) > 0$ pour tout $h \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$;

(Ext.2) v_0 est un maximum local strict si et seulement s'il existe $0 < s < r$ tel que $\frac{1}{2} h \cdot H_f(v_0) \cdot h^t + \phi(h) < 0$ pour tout $h \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.

On rappelle d'abord que $H_f(v_0)$ est une matrice symétrique, d'après la Proposition 2.3.1. D'après la Proposition 2.6.4, il existe existe un matrice orthogonale $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$H_f(v_0) = P \cdot D \cdot P^t,$$

où D est une matrice diagonale formée des valeurs propres de A, répétées selon leur multiplicité. Par conséquent,

$$\frac{1}{2} h \cdot H_f(v_0) \cdot h^t = \frac{1}{2} h \cdot P \cdot D \cdot P^t \cdot h^t = \frac{1}{2} k \cdot D \cdot k^t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} D_{i,i} k_i^2}{2},$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, où $k = hP \in \mathbb{R}^n$ et l'on a écrit $k = (k_1, \dots, k_n)$.

Comme P est une matrice orthogonale, l'application $f_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donnée par $f_P(h) = h \cdot P$ est linéaire et bijective, et elle satisfait que

$$\langle f_P(h'), f_P(h) \rangle = \langle h' \cdot P, h \cdot P \rangle = h' \cdot P \cdot \big(h \cdot P\big)^t = h' \cdot \underbrace{P \cdot P^t}_{\mathrm{Id}_n} \cdot h^t = h' \cdot h^t = \langle h', h \rangle,$$

pour tous $h', h \in \mathbb{R}^n$, où $\langle \, , \rangle$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$, on a utilisé que $\langle k', k \rangle = k' \cdot k^t$ pour $k', k \in \mathbb{R}^n$ et $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ pour des matrices A, B telles que le produit soit défini. La réciproque f_P^{-1} de f_P est donnée par $f_P^{-1}(k) = k \cdot P^t$, pour tout $k \in \mathbb{R}^n$. En particulier, $\|f_P(h)\| = \|h\|$, où $\| \ \|$ dénote la norme euclidienne, ce qui nous dit que $f_P(B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r)) = B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r)$ et aussi que h tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ si et seulement si $k = h \cdot P \in \mathbb{R}^n$ tend vers $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. En conséquence, (2.6.4) équivaut à

$$f(v_0 + k \cdot P^t) - f(v_0) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} D_{i,i} k_i^2}{2} + \tilde{\phi}(k), \tag{2.6.6}$$

pour tout $k = (k_1, \ldots, k_n) \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r)$, où $\tilde{\phi} = \phi \circ f_P$, tandis que (2.6.5) équivaut à

$$\lim_{k \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{\tilde{\phi}(k)}{\sum_{i=1}^{n} k_i^2} = 0. \tag{2.6.7}$$

On remarque que $f_P(B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r)) = B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 2r)$ nous dit que

(Ext*.1) v_0 est un minimum local strict si et seulement s'il existe $0 < s < r$ tel que $\frac{1}{2}k \cdot D \cdot k^t + \tilde{\phi}(k) > 0$ pour tout $k \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$;

(Ext*.2) v_0 est un maximum local strict si et seulement s'il existe $0 < s < r$ tel que $\frac{1}{2}k \cdot D \cdot k^t + \tilde{\phi}(k) < 0$ pour tout $k \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.

Supposons que $D_{i,i} > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ou $D_{i,i} < 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La limite (2.6.7) nous dit que

$$\lim_{k \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{\tilde{\phi}(k)}{\sum_{i=1}^{n} D_{i,i}k_i^2/2} = \lim_{k \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{\tilde{\phi}(k)}{\sum_{i=1}^{n} k_i^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}{\sum_{i=1}^{n} D_{i,i}k_i^2/2} = 0, \tag{2.6.8}$$

vu que

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}{\sum_{i=1}^{n} D_{i,i}k_i^2/2} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|D_{i,i}|},$$

où l'on a utilisé que $x_i^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La limite (2.6.8) nous dit que, étant donné $\epsilon = 1/2$, il existe $0 < s < r$ tel que

$$|\tilde{\phi}(k)| < \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{i,i}k_i^2}{2},$$

pour tout $k \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$. Cela nous dit que

(Ext**.1) $\frac{1}{2}k \cdot D \cdot k^t + \tilde{\phi}(k) > 0$ si et seulement si $\frac{1}{2}k \cdot D \cdot k^t > 0$, pour tout $k \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$;

(Ext**.2) $\frac{1}{2}k \cdot D \cdot k^t + \tilde{\phi}(k) < 0$ si et seulement si $\frac{1}{2}k \cdot D \cdot k^t < 0$, pour tout $k \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.

Si l'on combine (Ext*.1) avec (Ext**.1), on trouve précisément (i), tandis que (Ext*.2) avec (Ext**.2) est exactement (ii).

On suppose finalement qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $D_{i,i} < 0$ et $D_{j,j} > 0$. Soit $k' = \lambda e_i$ et $k'' = \lambda e_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, la limite (2.6.7) nous dit que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\tilde{\phi}(\lambda e_\ell)}{D_{\ell,\ell}\lambda^2/2} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\tilde{\phi}(\lambda e_\ell)}{\lambda^2} \frac{2}{D_{\ell,\ell}} = 0, \tag{2.6.9}$$

pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$. La limite (2.6.9) nous dit que, étant donné $\epsilon = 1/2$, il existe $0 < s < r$ tel que

$$|\tilde{\phi}(\lambda e_\ell)| < \frac{1}{2} \frac{|D_{\ell,\ell}|\lambda^2}{2},$$

pour tous $\lambda \in]-s, s[\setminus \{0\}$ et $\ell \in [\![1, n]\!]$. En particulier,

(PS.1) $\frac{1}{2}k \cdot D \cdot k^t + \tilde{\phi}(k) < 0$ pour tout $k = \lambda e_i \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$;

(PS.2) $\frac{1}{2}k \cdot D \cdot k^t + \tilde{\phi}(k) > 0$ pour tout $k = \lambda e_j \in B_{\| \ \|}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, s) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.

Cela nous dit exactement que v_0 n'est pas un extremum local, *i.e.* le cas dans l'item (iii). □

Remarque 2.6.6. *Noter que la preuve de l'énoncé de l'item (iii) dans le théorème précédent est valable même si le point critique est dégénéré.*

Si $n = 2$, on peut reformuler le théorème précédent sous la forme suivante.

Corollaire 2.6.7. *On admet les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, avec $n = 2$. On écrit*

$$H_f(v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(v_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(v_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(v_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

La condition de non dégénération sur v_0 équivaut à l'inégalité $ad - b^2 \neq 0$. On a les résultats suivants:

(i) si $ad - b^2 > 0$ et $a > 0$, alors v_0 est un minimum local strict de f;

(ii) si $ad - b^2 > 0$ et $a < 0$, alors v_0 est un maximum local strict de f;

(iii) si $ad - b^2 < 0$, alors v_0 est un point-selle.

Preuve. L'idéntité (2.6.3) nous dit que le déterminant de $H_f(v_0)$ est positif si et seulement si les deux valeurs propres de $H_f(v_0)$ ont le même signe, et que le déterminant de $H_f(v_0)$ est négatif si et seulement si les deux valeurs propres de $H_f(v_0)$ ont signe contraire. On obtient en particulier l'énoncé dans l'item (iii) à partir de l'item (iii) dans le Théorème 2.6.5.

On suppose désormais que le déterminant $ad - b^2$ de $H_f(v_0)$ est positif. En particulier, $ad > 0$, car sinon $ad - b^2 \leq 0$, vu que $-b^2 \leq 0$. Cela nous dit que a et d ont le même signe. Or, on sait que le polynôme caractéristique de la matrice

$$H_f(v_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

est $X^2 - (a + d)X + (ad - b^2)$ et que ses racines λ_- et λ_+, *i.e.* les valeurs propres de $H_f(v_0)$, satisfont que $\lambda_+ + \lambda_- = a + d$. Comme a et d ont le même signe, et λ_- et λ_+ ont le même signe aussi, on conclut que le signe λ_- (ou de λ_+) coïncide avec le signe de a (ou de d). On obtient en particulier l'énoncés dans l'item (i) (resp., (ii)) à partir de l'item (i) (resp., (ii)) dans le Théorème 2.6.5. $\square$

Exemple 2.6.8. *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2).$$

C'est clair que f est de classe C^3, puisqu'elle s'écrit comme composition de fonctions de classe C^3. Le seul point critique de f est l'origine, puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad \textit{and} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

Les dérivées partielles secondes sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= 2\frac{1 - x_1^2 + x_2^2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) &= 2\frac{1 + (x_1 - x_2)^2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= 2\frac{1 - x_2^2 + x_1^2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

La matrice hessienne en $(0, 0)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le corollaire nous dit alors que $(0, 0)$ est un minimum local strict de f. En fait, vu que $1 + x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_{>0}$, on voit que $f(x_1, x_2) \geq \ln(1) = f(0, 0) = 0$, ce qui nous dit que $(0, 0)$ est aussi un minimum global de f.

Références

[1] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997. ↑i, 36, 37