1
2
3

MAT303

Premier Semestre — 2020-2021

Troisième Contrôle Continu

Justifier toutes les réponses!

Le barème est seulement indicatif.

---

6 pt. **1.** Soient $(\mathbb{E}, N_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, N_{\mathbb{F}})$ deux espace vectoriels normés, $S \subseteq \mathbb{E}$ une partie de $\mathbb{E}$ et $f : S \to \mathbb{F}$ une application.

(a) Donner la définition usuelle de continuité de f en un point $v \in S$, et de continuité de f sur S.

(b) Donner la définition continuité uniforme de f.

(c) Donner un exemple de fonction continue qui ne soit pas uniformément continue. Justifier soigneusement.

Solution.

(a) On rappelle que l'on dit que f est **continue** en v (pour N et N') si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $w \in S$ et $N(w-v) < \delta$ impliquent que $N'(f(w)-f(v)) < \varepsilon$. La fonction f est **continue** sur S si elle est continue en tout $v \in S$.

(b) On rappelle que l'application f est **uniformément continue** (pour N et N') si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les conditions $v, w \in S$ et $N(w-v) < \delta$ impliquent que $N'(f(w)-f(v)) < \varepsilon$.

(c) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ est continue, car il s'agit d'un polynôme, mais elle n'est pas uniformément continue. En effet, il suffit de démontrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $|x_n - y_n|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ mais $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $\varepsilon_0 = 2$, $x_n = 2^n$ et $y_n = 2^n + 1/2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est clair que $|x_n - y_n| = 1/2^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs,

$$\left|f(x_n)-f(y_n)\right| = \left|(2^n)^2 - \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2\right| = \left|-2-\frac{1}{2^{2n}}\right| = 2 + \frac{1}{2^{2n}} \geq 2 = \varepsilon_0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui nous dit que f n'est pas uniformément continue.

7 pt. **2.** Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_{a,b}(x,y) = \begin{cases} \frac{ax\sin(y+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ b, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculer toutes les valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $f_{a,b}$ soit continue.

Solution. On affirme que f est continue en tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En effet, comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe $r > 0$ tel que $B((x_0, y_0), r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, où l'on utilise la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Alors, pour déterminer si f est continue en (x_0, y_0), il suffit de considérer $f|_{B((x_0,y_0),r)}$. Comme l'expression de cette dernière fonction $f|_{B((x_0,y_0),r)}$ est donné par un quotient de fonctions continues avec dénominateur non nul, on conclut que $f|_{B((x_0,y_0),r)}$ est continue en (x_0, y_0) et en conséquence f est continue en (x_0, y_0). Cela nous dit que f est continue si et seulement si f est continue en $(0,0)$.

On affirme que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(y+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{1}$$

existe et vaut zéro. En effet,

$$0 \leq \left|\frac{x(y+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq x^2 + |y|,$$

où l'on a utilisé que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $x^2 + |y|$ tend vers zéro quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on conclut que (1) existe et vaut zéro. Par ailleurs, la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y+x^2)}{(y+x^2)}$$

existe et vaut 1, car $y + x^2$ tend vers zéro quand (x,y) tend vers $(0,0)$ et

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1.$$

On conclut alors que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax\sin(y+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} a\frac{x(y+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sin(y+x^2)}{(y+x^2)} \\
&= a \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(y+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y+x^2)}{(y+x^2)} \\
&= a.0.1 = 0.
\end{aligned}$$

Cela nous dit que $f_{a,b}$ est continue (en $(0,0)$) si et seulement si $b = 0$.

7 pt. **3.** On dénote $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Soient $F \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie fermée et $K \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie compacte telles que $K \cap F = \emptyset$. Soit $f : F \cup K \to \mathbb{R}^m$ une application continue telle que $f|_F : F \to \mathbb{R}^m$ soit uniformément continue. Dans cet exercice, on admettra que l'application $d_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$d_F(x) = \inf\left\{\|x - y\| : y \in F\right\}$$

est continue.

(a) Montrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\|x-y\| \geq \delta_0$ pour tous $x \in K$ et $y \in F$.
Indication : utiliser que $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

(b) Montrer que $f : F \cup K \to \mathbb{R}^m$ est uniformément continue

Solution.

(a) Comme d_F est continue et K est compact, $d_F(K) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ est compact et *a fortiori* fermé. En outre, comme $K \cap F = \emptyset$ et $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$, $d_F(x) > 0$ pour tout $x \in K$, ce qui implique que $d_F(K) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Comme $d_F(K)$ est fermé et $0 \notin d_F(K)$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $z \geq \delta_0$ pour tout $z \in d_F(K)$, ce qui implique que $\|x-y\| \geq d_F(x) \geq \delta_0$ pour tous $x \in K$ et $y \in F$, comme on voulait démontrer.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, $f|_K$ est continue aussi, ce qui implique que $f|_K$ est uniformément continue, vu que K est compact. Comme $f|_K$ et $f|_F$ sont uniformément continues, il existe $\delta_K > 0$ et $\delta_F > 0$ tels que

$$\left\|f|_K(x)-f|_K(x')\right\| = \|f(x)-f(x')\| \leq \varepsilon \text{ et } \left\|f|_F(x)-f|_F(x')\right\| = \|f(x)-f(x')\| \leq \varepsilon \tag{2}$$

pour tous $x, x' \in K$ tels que $\|x-x'\| \leq \delta_K$ et $x, x' \in F$ tels que $\|x-x'\| \leq \delta_F$, respectivement. Soit $\delta = \min(\delta_K, \delta_F, \delta_0/2) > 0$. Étant donnés $x, x' \in F \cup K$ tels que $\|x-x'\| \leq \delta < \delta_0$, l'item précédent nous dit que $x \in F$ et $x' \in F$, ou $x \in K$ et $x' \in K$, vu que les cas $x \in F$ et $x' \in K$, ou $x \in K$ et $x' \in F$ impliquent $\|x-x'\| \geq \delta_0$. Les inégalités (2) nous disent que $\|f(x)-f(x')\| \leq \varepsilon$, comme on voulait démontrer.