# MAT303

## Premier Semestre — 2019-2020

## Deuxième Contrôle Continu

Justifier toutes les réponses

| |
|---|
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 4 |
| 5 |
| 6 |
| |

**1.** Soient $n, m \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $N$ et $\mathbb{R}^m$ d'une norme $N'$.

($a$) Donner la définition de la continuité de $f$ en $a$.

($b$) Montrer en utilisant cette définition que si $f(a) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$, alors il existe $\delta > 0$, tel que $f(x) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$, pour tout $x \in B_N(a, \delta)$.

*Solution.*

($a$) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que $N(x-a) \leq \delta$ implique $N'(f(x)-f(a)) \leq \epsilon$.

($b$) Soit $\epsilon = N'(f(a))/2 > 0$, car $f(a) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$. Par la définition de la continuité, il existe $\delta > 0$, tel que $N(x-a) \leq \delta$ implique $N'(f(x)-f(a)) \leq \epsilon$, ce qui implique par l'inégalité triangulaire que

$$\Big|N'\big(f(x)\big) - N'\big(f(a)\big)\Big| \leq N'\big(f(x) - f(a)\big) \leq \epsilon.$$

En conséquence,

$$0 < \frac{N'\big(f(a)\big)}{2} = -\epsilon + N'\big(f(a)\big) \leq N'\big(f(x)\big) \leq \epsilon + N'\big(f(a)\big),$$

ce qui implique que $N'(f(x)) \geq \epsilon > 0$ si $x \in B_N(a, \delta)$ et en conséquence $f(x) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$, pour tout $x \in B_N(a, \delta)$.

**2.** Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

($a$) Donner un exemple d'une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas constante.

($b$) Montrer qu'il existe $\delta > 0$, tel que $|f(n\delta)| \leq |f(0)| + n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

($c$) Montrer qu'il existe $a, b > 0$ tels que $|f(x)| \leq ax + b$, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

*Solution.*

($a$) $f(x) = x$ est uniformément continue. En effet, soit $\epsilon > 0$ et $\delta = \epsilon$. Alors $|f(x) - f(y)| = |x - y| \leq \epsilon$.

($b$) Soit $\epsilon = 1$. Alors il existe $\delta > 0$, tel que $|x - y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq 1$. On fixe $\delta$. On démontre ce résultat par récurrence. C'est immédiat pour $n = 0$.

Supposons que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$. On remarque d'bord que $|f((n+1)\delta) - f(n\delta)| \leq 1$, vu que $|(n+1)\delta - n\delta| = \delta$. L'inégalité triangulaire nous dit alors que

$$\left|f\big((n+1)\delta\big)\right| - \left|f\big(n\delta\big)\right| \leq \left|f\big((n+1)\delta\big) - f\big(n\delta\big)\right| \leq 1,$$

ce qui implique que $|f((n+1)\delta)| \leq 1 + |f(n\delta)|$. Par hypothèse de la récurrence on a que $|f(n\delta)| \leq |f(0)| + n$, ce qui implique que $|f((n+1)\delta)| \leq |f(0)| + n + 1$.

$(c)$ On remarque d'abord que, si $x \in [n\delta, (n+1)\delta]$, alors $|f(x) - f(n\delta)| \leq 1$, vu que $|x - n\delta| \leq \delta$. L'inégalité triangulaire nous dit alors que

$$\left|f(x)\right| - \left|f(n\delta)\right| \leq \left|f(x) - f(n\delta)\right| \leq 1,$$

ce qui implique que $|f(x)| \leq |f(n\delta)| + 1 \leq |f(0)| + n + 1$. Comme $n \leq x/\delta$, on trouve que $|f(x)| \leq |f(0)| + n + 1 \leq (|f(0)| + 1) + x/\delta$. On peut donc choisir $a = 1/\delta$ et $b = |f(0)| + 1$.

**3.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit

$$f_k(x,y) = \frac{x^2 \sin(y^2)}{x^{2k} + 3y^4}.$$

$(a)$ Quel est l'ensemble de définition de $f_k$ dans $\mathbb{R}^2$ ?

$(b)$ Montrer que $\sin(u) \sim u$ quand $u \to 0$. Montrer aussi que $|\sin(u)| \leq |u|$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$(c)$ Soit $k \in \{0,1\}$. Montrer que $f_k(x,y)$ a une limite en $(0,0)$.

$(d)$ Soit $k \geq 2$. Montrer que $f_k(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

*Solution.*

$(a)$ Si $k = 0$, la fonction n'est pas définie si $x = 0$, car $0^0$ n'est pas défini. Par ailleurs, si $x \neq 0$, l'expression est bien définie car le dénominateur n'est pas nul. En conséquence, $\mathrm{Dom}(f_0) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. Pour $k \geq 1$, le dénominateur de $f_k(x,y)$ est $x^{2k} + 3y^4 \geq 0$, qui s'annule exactement en l'origine, donc $\mathrm{Dom}(f_k) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$(b)$ On a

$$1 = \cos(0) = \sin'(0) = \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u},$$

d'où le résultat. De plus, par le Théorème des accroissements finis, pour tout $u \in \mathbb{R}$ il existe $x$ entre $0$ et $u$ tel que $|\sin(u) - \sin(0)| = |u - 0||\sin'(x)| = |\cos(x)||u| \leq |u|$, car $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$(c)$ On remarque d'abord que

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{x^2\sin(y^2)}{x^0 + 3y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{x^2\sin(y^2)}{1 + 3y^4} = \frac{\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} x^2\sin(y^2)}{\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} 1 + 3y^4} = \frac{0}{1 + y_0^4} = 0,$$

pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, on voit vien que

$$0 \leq \left| \frac{x^2 \sin(y^2)}{x^2 + 3y^4} \right| \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + 3y^4} \leq y^2,$$

vu que $x^2 \leq x^2 + 3y^4$. En conséquence, $f_1(x, y)$ tend vers 0, quand $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$.

$(d)$ On va démontrer que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^{2k} + 3y^4} \tag{1}$$

n'existe pas si $k \geq 2$. Pour le faire, on considère la droite $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si l'on restreint la limite précédente à la droite $y = mx$, on trouve

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 m^2}{x^{2k} + 3m^4 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2}{x^{2(k-2)} + 3m^4} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} m^2}{\lim\limits_{x\to 0} x^{2(k-2)} + 3m^4} = \begin{cases} \frac{m^2}{1+3m^4}, \text{si } k = 2, \\ \frac{m^2}{3m^4} = \frac{1}{3m^2}, \text{si } k > 2. \end{cases}$$

En particulier, les valeurs précédentes sont différentes pour $m = 1$ et $m = 2$. On conclut que la limite (1) n'existe pas.

On affirme maintenant que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin(y^2)}{x^{2k} + 3y^4} \tag{2}$$

n'existe pas si $k \geq 2$. On procède par l'absurde. Si elle existe, alors les limites suivantes existent

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin(y^2)}{x^{2k} + 3y^4} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin(y^2)}{x^{2k} + 3y^4} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sin(y^2)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin(y^2)}{x^{2k} + 3y^4} \frac{y^2}{\sin(y^2)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^{2k} + 3y^4}, \end{aligned}$$

vu que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sin(y^2)} = 1.$$

Comme (1) n'existe pas, alors 2 n'existe pas non plus.

**4.** On considère l'expression

$$f(x, y) = \left( \frac{y e^x}{3 + \sin(y^2) + \cos(x)}, x \ln(4 - y^2) \right).$$

$(a)$ Quel est l'ensemble de définition $\mathrm{Dom}(f)$ de $f$ dans $\mathbb{R}^2$ ? Dessiner rapidement cet ensemble.

($b$) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathrm{Dom}(f)$.

($c$) Calculer la matrice jacobienne de $f$ en $(x,y) \in \mathrm{Dom}(f)$, puis en $(0,0)$.

($d$) Soit $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la dérivée directionnelle de $f$ en $(0,0)$ dans la direction $v$.

*Solution.*

($a$) On note que $ye^x$ est définie et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, car c'est le produit de deux fonctions lisses. De plus $g(x,y) = 3 + \sin(y^2) + \cos(x)$ est aussi définie sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car $y^2$, 3, cos et sin sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g$ est une composition et somme de ces fonctions. Enfin, $g(x,y) \geq 1$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc le dénominateur de la première coordonnée $f_1$ de $f$ ne s'annule pas, donc $f_1$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et y est de classe $C^\infty$. Quant à la deuxième coordonnée $f_2(x,y)$ de $f(x,y)$, c'est la composée de ln qui est définie et lisse sur $\mathbb{R}_{>0}$, et un polynôme strictement positif uniquement quand $|y| < 2$, donc $f_2(x,y)$ est bien définie et lisse sur $\{(x,y)\mathbb{R}^2 : |y| < 2\}$ (la bande horizontale ouverte entre les droites horizontales d'équation $y = -2$ et $y = 2$). En conséquence, $\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y)\mathbb{R}^2 : |y| < 2\}$.

($b$) Fait à la question d'avant.

($c$) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{ye^x}{3+\sin(y^2)+\cos(x)} + \frac{ye^x\sin(x)}{(3+\sin(y^2)+\cos(x))^2}, \ln(4-y^2)\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{e^x}{3+\sin(y^2)+\cos(x)} - \frac{2y^2e^x\cos(y^2)}{(3+\sin(y^2)+\cos(x))^2}, \frac{-2xy}{4-y^2}\right).$$

($d$) On a

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ \ln(4) & 0 \end{pmatrix}.$$

En conséquence,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \big(v_y/3, v_x \ln(4)\big).$$

**5.** Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $C^2$, et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application

$$F(x,y) = f(g(xy)) - g(f(x^2-y^2)),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

($a$) Montrer que $F$ est de classe $C^2$ et déterminer son gradient.

($b$) Déterminer la matrice hessienne de $F$ en $(0,0)$.

*Solution.*

($a$) Les deux coordonnées de $F$ sont des composées d'applications de classe $C^2$ et de ou $(x,y) \mapsto xy$ de $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$, qui sont de classe $C^2$ car elles sont des applications polynomiales. En conséquence, $F$ est de classe $C^2$. Alors, $\nabla F(x,y)$ est le vecteur

$$\Big(f'(g(xy))g'(xy)y - g'(f(x^2-y^2))f'(x^2-y^2)2x,$$
$$f'(g(xy))g'(xy)x + g'(f(x^2-y^2))f'(x^2-y^2)2y\Big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

($b$) On a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 0 + 2g'(f(0))f'(0), \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0) = -2g'(f(0))f'(0)$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = g'(f(0))g'(0).$$

La matrice hessienne est alors

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2g'(f(0))f'(0) & g'(f(0))g'(0) \\ g'(f(0))g'(0) & -2g'(f(0))f'(0) \end{pmatrix}.$$

**6.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = 5 + 3x^2 + 3y^2 + y^3 + x^3$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

($a$) Déterminer les points critiques de $f$.

($b$) Déterminer si ces points sont des extrema locaux.

($c$) Déterminer si ce sont des extrema globaux.

*Solution.*

($a$) On a

$$\nabla f(x,y) = (6x + 3x^2, 6y + 3y^2),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En conséquence, $\nabla f(x,y) = (0,0)$ ssi $3x(2+x) = 0$ et $3y(2y+1) = 0$. Les poins critiques de $f$ sont alors $A = (0,0)$, $B = (0,-2)$, $C = (-2,0)$ et $D = (-2,-2)$.

($b$) On a

$$H_f(x,y) = 6\begin{pmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1+y \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $1+x$ et $1+y$. Cela implique que $A$ est un minimum local, $B$ et $C$ sont des points-selle et $D$ est un maximum local.

(c) Noter que $f(x,0) = x^3 + 3x^2 + 5$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En conséquence,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \pm\infty,$$

ce qui nous dit que $f$ n'a ni maximum ni minimum global.