1
2
3

MAT303

Premier Semestre — 2020-2021

Premier Contrôle Continu

Justifier toutes les réponses!

Le barème est seulement indicatif.

3pt. **1.** Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel.

(a) Donner la définition de norme sur $\mathbb{E}$.

(b) Soit N une norme sur $\mathbb{E}$. Donner la définition de la boule unité ouverte et de la boule unité fermée pour N.

Solution.

(a) Une **norme** sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une application $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(N1) pour tout $v \in \mathbb{E}$, $N(v) = 0$ implique que $v = \mathbf{0}_{\mathbb{E}}$,

(N2) pour tous $v \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $N(\lambda \cdot v) = |\lambda| N(v)$,

(N3) pour tous $v, w \in \mathbb{E}$, $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

(b) La **boules unité ouverte** de $(\mathbb{E}, N)$ est l'ensemble

$$B_N = \{w \in \mathbb{E} : N(w) < 1\}$$

et la **boules unité fermée** de $(\mathbb{E}, N)$ est l'ensemble

$$\bar{B}_N = \{w \in \mathbb{E} : N(w) \leq 1\}.$$

7pt. **2.** Soit $\mathbb{L} = \{a + bX \in \mathbb{R}[X] : a, b \in \mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à 1. On définit l'application $N : \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ via

$$N(P) = \sqrt{\int_0^1 \big(P(t)\big)^2 dt},$$

pour tout $P \in \mathbb{L}$.

(a) Considérer l'application $T : \mathbb{L} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(a + bX) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}}\right),$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que T est une application linéaire bijective.

(b) Montrer que

$$N(P) = \|T(P)\|_2,$$

pour tout $P \in \mathbb{L}$, où $\| \ \|_2$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

(c) Est-ce que l'application N est-elle une norme sur $\mathbb{L}$? Justifier.

Solution.

(a) C'est clair que T est une application linéaire. En effet, étant donnés $P = a + bX$, $Q = c + dX$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} T(P + \lambda Q) = T\big((a+\lambda c) + (b+\lambda d)X\big) &= \left(\frac{a+\lambda c}{2}, \frac{\sqrt{3}(a+\lambda c)}{2} + \frac{(b+\lambda d)}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}}\right) + \lambda\left(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2} + \frac{d}{\sqrt{3}}\right) = T(P) + \lambda T(Q). \end{aligned}$$

Par ailleurs, soit $P = a + bX$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $T(P) = (0, 0)$, *i.e.*

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = (0, 0).$$

L'égalité pour la première coordonnée nous dit que $a = 0$. L'égalité de la deuxième égalité avec $a = 0$ impliquent que $b = 0$. En conséquence, $P = \mathbf{0}_{\mathbb{L}}$ et T est injectif. On remarque la dimension de $\mathbb{L}$ est 2. Finalement, comme la dimension de $\mathbb{R}^2$ et celle de $\mathbb{L}$ sont égales, l'application T est aussi bijective.

(b) Soit $P = a + bX$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On voit bien que

$$\begin{aligned} \|T(P)\|_2 = \left\|\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\right\|_2 &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + ab + \frac{b^2}{3}} = \sqrt{a^2 + ab + \frac{b^2}{3}}. \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} N(P) = \sqrt{\int_0^1 \big(a + bt\big)^2 dt} &= \sqrt{\int_0^1 \big(a^2 + 2abt + b^2t^2\big) dt} \\ &= \sqrt{\left[a^2 t + abt^2 + b^2\frac{t^3}{3}\right]_0^1} = \sqrt{a^2 + ab + \frac{b^2}{3}}. \end{aligned}$$

En conséquence, $N(P) = \|T(P)\|_2$, comme on voulait démontrer.

(c) D'après l'exercice **4** de la fiche 2, la composition d'une application linéaire injective et une norme est aussi une norme. En conséquence, les items précédents nous disent que N est une norme sur $\mathbb{L}$.

10pt. **3.** On considère l'application $N : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$N\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) = \sqrt{\big(|x_1| + |x_3|\big)^2 + \big(|x_2| + |x_4|\big)^2},$$

pour tout $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $N_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, *i.e.*

$$N_2(x', x'') = \sqrt{|x'|^2 + |x''|^2},$$

pour tous $x', x'' \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\text{si } 0 \leq u' \leq v' \text{ et } 0 \leq u'' \leq v'', \text{ alors } N_2(u', u'') \leq N_2(v', v''). \tag{1}$$

(b) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^4$.
Indication : Soit $N_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la norme L^1 sur $\mathbb{R}^2$, *i.e.*

$$N_1(x', x'') = |x'| + |x''|,$$

pour tous $x', x'' \in \mathbb{R}$. Noter et utiliser que

$$N\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) = N_2\big(N_1(x_1, x_3), N_1(x_2, x_4)\big),$$

pour tous $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

(c) Soit $\bar{B}_N$ la boule unité fermée de N et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application $f(x, y) = (x, 0, y, 0)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dessiner l'ensemble $f^{-1}(\bar{B}_N)$.

Solution.

(a) Les inégalités $0 \leq u' \leq v'$ et $0 \leq u'' \leq v''$ impliquent que $(u')^2 \leq (v')^2$ et $(u'')^2 \leq (v'')^2$, vu que la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Cela nous dit que $(u')^2 + (u'')^2 \leq (v')^2 + (v'')^2$ par la monotonie de la somme, qui implique que $N_2(u', u'') = \sqrt{(u')^2 + (u'')^2} \leq \sqrt{(v')^2 + (v'')^2} = N_2(v', v'')$, vu que la fonction racine carrée est croissante aussi.

(b) On remarque d'abord que $N(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$, pour tout $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

On va démontrer que N satisfait la propriété (N1), *i.e.* N est définie positive. Si

$$0 = N\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) = N_2\big(N_1(x_1, x_3), N_1(x_2, x_4)\big),$$

pour un vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, alors le fait que N_2 soit une norme nous dit qur $N_1(x_1, x_3) = 0$ et $N_1(x_2, x_4) = 0$. En outre, comme N_1 est une norme, $x_1 = x_3 = 0$ et $x_2 = x_4 = 0$.

On va démontrer que N satisfait la propriété (N2), *i.e.* N est absolument homogène. Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} N\big(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4\big) &= N_2\big(N_1(\lambda x_1, \lambda x_3), N_1(\lambda x_2, \lambda x_4)\big) \\ &= N_2\big(|\lambda| N_1(x_1, x_3), |\lambda| N_1(x_2, x_4)\big) \\ &= |\lambda| N_2\big(N_1(x_1, x_3), N_1(x_2, x_4)\big), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété (N2) de N_1 dans la deuxième égalité et la propriété (N2) de N_2 dans la dernière égalité.

Finalement, on va démontrer que N satisfait la propriété (N3), *i.e.* l'inégalité triangulaire. Pour cela, on introduit la notation suivante. Étant donné un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose $x_i = (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2$ et $x_p = (x_2, x_4) \in \mathbb{R}^2$. De même pour un vecteur $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. Or,

$$\begin{aligned} N(x+y) &= N\big(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4\big) \\ &= N_2\big(N_1(x_1+y_1, x_3+y_3), N_1(x_2+y_2, x_4+y_4)\big) \\ &= N_2\big(N_1(x_i+y_i), N_1(x_p+y_p)\big). \end{aligned}$$

Comme N_1 est une norme, on a

$$N_1(x_i+y_i) \le N_1(x_i) + N_1(y_i) \text{ et } N_1(x_p+y_p) \le N_1(x_p) + N_1(y_p).$$

D'après (1) pour $u' = N_1(x_i+y_i)$, $u'' = N_1(x_p+y_p)$, $v' = N_1(x_i) + N_1(y_i)$ et $v'' = N_1(x_p) + N_1(y_p)$ on a

$$N_2\big(N_1(x_i+y_i), N_1(x_p+y_p)\big) \le N_2\big(N_1(x_i)+N_1(y_i), N_1(x_p)+N_1(y_p)\big).$$

Soient $z' = (N_1(x_i), N_1(x_p)) \in \mathbb{R}^2$ et $z'' = (N_1(y_i), N_1(y_p)) \in \mathbb{R}^2$. On voit bien que $N_2(z') = N(x)$ et $N_2(z'') = N(y)$. Alors,

$$N_2\big(N_1(x_i)+N_1(y_i), N_1(x_p)+N_1(y_p)\big) = N_2(z'+z'').$$

Comme N_2 est une norme, N_2 satisfait l'inégalité triangulaire, ce qui nous donne

$$N_2(z'+z'') \le N_2(z') + N_2(z'') = N(x) + N(y).$$

En conséquence,

$$N(x+y) \le N(x) + N(y),$$

comme on voulait démontrer.

(c) Par définition

$$\begin{aligned} f^{-1}(\bar{B}_N) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,0,y,0) \in \bar{B}_N\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N(x,0,y,0) \le 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (|x|+|y|)^2 \le 1\}. \end{aligned}$$

Comme $(|x|+|y|)^2 \le 1$ si et seulement si $|x|+|y| \le 1$, on conclut que $f^{-1}(\bar{B}_N)$ est la boule unité fermée pour la norme L^1, que l'on peut représenter comme ci-dessous