1
2
3
4
5
6

MAT303

Premier Semestre — 2019-2020

Premier Contrôle Continu

Justifier toutes les réponses

---

1. (*a*) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel muni d'une norme N. Donner la définition de suite convergente, de suite de Cauchy et de suite bornée.

(*b*) À partir des propriétés d'une norme, démontrer que toute suite convergente est bornée.

Solution.

(*a*) On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est convergente avec avec limite $x \in \mathbb{E}$ (resp., de Cauchy) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(x-x_n) \leq \epsilon$ (resp., $N(x_n - x_m) \leq \epsilon$) pour tout entier $n \geq n_0$ (resp., pour tous entiers $n, m \geq n_0$). Par ailleurs, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $C \geq 0$ tel que $N(x_n) \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(*b*) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente avec limite $x \in \mathbb{E}$. Alors, si l'on prend $\epsilon = 1$ dans la définition de convergence, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$N(x - x_n) \leq 1$$

pour tout entier $n \geq n_0$. L'inégalité triangulaire implique que

$$N(x_n) \leq N(x) + N(x - x_n) \leq N(x) + 1,$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Soit

$$C = \max\{N(x_1), \dots, N(x_{n_0}), N(x) + 1\}.$$

Alors, $N(x_n) \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ la droite parallèle au vecteur $(3,4)$ et qui passe par le point $(0,2)$, et soit $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ le circle de centre $(8/3,0)$ et rayon 1.

(*a*) Calculer l'équation cartésienne de la droite $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{R}^2$ qui est orthogonale à $\mathbb{L}$ et qui passe par le centre $(8/3,0)$ de $\mathscr{C}$.

(*b*) Calculer les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{L}$ et $(x_1, y_1) \in \mathscr{C}$ tels que

$$\left\|(x_0, y_0) - (x_1, y_1)\right\|_2 = \inf_{\substack{(x,y)\in\mathbb{L} \\ (x',y')\in\mathscr{C}}} \left\|(x,y) - (x',y')\right\|_2,$$

où $\|\ \|_2$ dénote la norme euclidienne.

Indication : calculer les intersections $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$ et $\mathscr{C} \cap \mathbb{L}'$, et faire un dessin.

Solution.

(a) On remarque d'abord que $(4,-3)$ est orthogonal à $(3,4)$ pour le produit scalaire euclidien. Cela nous dit que $\mathbb{L}'$ est la droite parallèle au vecteur $(4,-3)$ et qui passe par $(8/3,0)$, *i.e.*

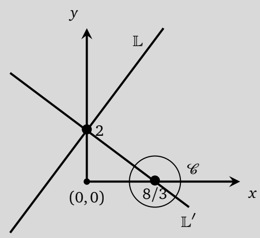
$$\mathbb{L}' = \left\{t \cdot (4,-3) + (8/3,0) : t \in \mathbb{R}\right\},$$

ce qui implique que

$$t = \frac{x - 8/3}{4} = -\frac{y}{3}.$$

L'équation cartésienne de $\mathbb{L}'$ est alors $3x + 4y = 8$.

(b) À partir d'étudier de façon géométrique la situation on voit bien que $\mathbb{L}' \cap \mathbb{L} = \{(x_0, y_0)\}$, et que $(x_1, y_1) \in \mathscr{C} \cap \mathbb{L}'$, comme on montre ci-dessous.



Or, le seul élément (x_0, y_0) dans $\mathbb{L}' \cap \mathbb{L}$ s'obtient d'imposer qu'un élément générique $(3s, 4s+2) \in \mathbb{L}$ (avec $s \in \mathbb{R}$) soit dans $\mathbb{L}'$, *i.e.*

$$3(3s) + 4(4s+2) = 8,$$

ce qui nous donne $s = 0$. En conséquence, $(x_0, y_0) = (0,2)$.

En outre, pour trouver tout $(x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathbb{L}'$ il suffit d'imposer qu'un élément générique $(x,y) = (4t + 8/3, -3t) \in \mathbb{L}'$ (avec $t \in \mathbb{R}$) soit dans $\mathscr{C}$, *i.e.*

$$(4t)^2 + (-3t)^2 = 1,$$

ce qui nous donne $t = \pm 1/5$. En conséquence,

$$\mathscr{C} \cap \mathbb{L}' = \left\{(52/15, -3/5), (28/15, 3/5)\right\}.$$

Un calcul direct (ou l'intuition géométrique) nous dit que $(x_1, y_1) = (28/5, 3/5)$, vu que sa distance à $(0,2)$ est $\sqrt{49/9}$, qui est inférieure à la distance $\sqrt{169/9}$ de $(52/15, -3/5)$ à $(0,2)$.

3. Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application

$$N(x,y) = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2,$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application N vérifie tous les axiomes d'une norme à exception de l'inégalité triangulaire.

Indication : pour l'inégalité triangulaire, dessiner $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : N(x,y)\leq 1\}$.

Solution. C'est clair que $N(x,y)\geq 0$, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

En outre, si $N(x,y)=0$, alors $\sqrt{|x|}=\sqrt{|y|}=0$, puisque une somme de termes non négatifs est nulle si et seulement si chaque opérande est nul. Cela nous dir que $x=y=0$.

Par ailleurs,

$$N(\lambda x,\lambda y)=\Big(\sqrt{|\lambda x|}+\sqrt{|\lambda y|}\Big)^2=\Big(\sqrt{\lambda}\big(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\big)\Big)^2=|\lambda|\Big(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\Big)^2,$$

pour tous $x,y,\lambda\in\mathbb{R}$, où l'on a utilisé que $\sqrt{|\lambda|}^2=|\lambda|$.

Pour montrer que N n'est pas une norme, *i.e.* que l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée, on considère $r=1/2$ et $N(r,r)=2$. Si l'inégalité triangulaire était vérifiée, alors

$$N(r,r)=N\big(r\cdot(1,0)+r\cdot(0,1)\big)\leq |r|N(1,0)+|r|N(0,1)=2|r|=1,$$

ce qui est absurde.

4. Soit $S\subseteq\mathbb{R}^n$, où $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme N quelconque. Montrer que l'ensemble S est borné si et seulement si son adhérence $\bar{S}$ est bornée.

Solution. C'est clair que si $\bar{S}$ est borné, alors S l'est aussi. En effet, si $\bar{S}\subseteq B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},R)$, avec $R>0$, $S\subseteq B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},R)$, vu que $S\subseteq\bar{S}$. Réciproquement, on suppose que S est borné, *i.e.* il existe $R'>0$ tel que $S\subseteq B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},R')$. Cela implique que $\bar{S}\subseteq\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},R')$, vu que $S\subseteq T$ implique $\bar{S}\subseteq\bar{T}$ et la boule fermé est un ensemble fermé. Comme $\bar{B}_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},R')\subseteq B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},R'+1)$, on conclut que $\bar{S}\subseteq B_N(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},R'+1)$, *i.e.* $\bar{S}$ est borné.

5. Soient $U,S\subseteq\mathbb{R}^n$ deux parties de $\mathbb{R}^n$, où $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme N quelconque. On suppose que U est ouvert. Montrer que l'ensemble

$$U+S=\Big\{y\in\mathbb{R}^n:\ \text{il existe } u\in U \text{ et } s\in S \text{ tels que } y=u+s\Big\}$$

est ouvert.

Solution. Comme U est ouvert, pour tout $u\in U$ il existe $r_u>0$ tel que $B_N(u,r_u)\subseteq U$. Soit $y=u+s\in U+S$, avec $u\in U$ et $s\in S$. On voit bien que

$$B_N(y,r_u)=B_N(u+s,r_u)=B_N(u,r_u)+\{s\}\subseteq U+\{s\}\subseteq U+S.$$

En conséquence, $U+S$ est un ouvert.

6. Soient $S_1,S_2\subseteq\mathbb{R}^n$ deux parties fermées de $\mathbb{R}^n$, où $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme N quelconque. Soient $f_1:S_1\to\mathbb{R}$ et $f_2:S_2\to\mathbb{R}$ deux applications continues telles que $f_1(x) = f_2(x)$, pour tout $x \in S_1 \cap S_2$. On définit $S = S_1 \cup S_2$ et l'application $f : S \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in S_1, \\ f_2(x), & \text{si } x \in S_2. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue.
Indication : utiliser la caractérisation équivalente de la propriété de continuité donnée par les images réciproques.

(b) Le résultat précédent est-il vrai si les ensembles S_1 et S_2 ne sont pas fermés ?

Solution.

(a) C'est clair que f est une application bien définie. Soit $F \subseteq \mathbb{R}$ une partie fermée. D'après un résultat vu dans le cours, il suffit de démontrer que $f^{-1}(F)$ est fermé. Or, on voit bien que $f^{-1}(F) = f_1^{-1}(F) \cup f_2^{-1}(F)$, car la définition de f implique que $f^{-1}(F) \cap S_i = f_i^{-1}(F)$ pour $i = 1, 2$. Comme f_i est continue, alors $f_i^{-1}(F)$ est un fermé relatif de S_i et en conséquence un fermé de $\mathbb{R}^n$, puisque S_i est fermé, pour tout $i = 1, 2$. Comme la réunion finie de fermés est fermée, $f^{-1}(F) = f_1^{-1}(F) \cup f_2^{-1}(F)$ est fermé, comme on voulait démontrer.

(b) Le résultat précédent n'est pas vrai en général si les ensembles ne sont pas fermés. Par exemple, considérer $n = 1$, $S_1 = \mathbb{Q}$, $f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ l'application constante 1,$S_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f_2 : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ l'application constante 0. Comme $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, il n'y a aucune condition sur f_1 et f_2. En outre, les fonctions constantes (*e.g.* f_1 et f_2) sont évidemment continues. Par contre, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, qui n'est pas continue.