Modelo de Wess-Zumino-Witten sobre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *y teoría de cuerdas*

Estanislao Herscovich Ramoneda

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

TEMA: Teorías de Campos Conformes.

ALUMNO: LU N°: 104/00.

LUGAR DE TRABAJO: Instituto de Astronomía y Física del Espacio (IAFE).

DIRECTOR DE TRABAJO: Dra. Carmen Nuñez.

CODIRECTOR O COLABORADOR: Dr. Pablo Minces.

FECHA DE INICIACIÓN: Abril de 2005.

FECHA DE FINALIZACIÓN: 11 de Abril de 2006.

FECHA DE EXÁMEN: 11 de Abril de 2006.

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor	Jurado
Director	Jurado
Profesor de Tesis de Licenciatura	Jurado

Índice

Resumen

En esta tesis estudiamos las teorías de campos conformes de dos dimensiones con especial atención a los modelos de Wess-Zumino-Witten. La motivación fundamental es el estudio de la propagación de cuerdas en espacios de base curvos. En particular nos concentramos en la teoría de cuerdas en AdS_3 que es un modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW. Como esta teoría es no compacta debemos emplear técnicas algo diferentes a las del caso compacto, que ha sido estudiado con anterioridad. La simetría de flujo espectral nos permitirá generalizar métodos de análisis de las teorías compactas y calcular algunas funciones de correlación.

El trabajo realizado involucra necesariamente el estudio de la teoría de representaciones de grupos de Lie, álgebras de Lie, Kac-Moody y Virasoro, que es el lenguaje básico de cualquier teoría de WZW. Como sólo nos dedicamos al nivel árbol de la teoría (i.e., estamos sobre la esfera de Riemann), no es necesario involucrar teoría de moduli y aspectos geométricos más complejos. Con estos elementos presentamos las herramientas usuales de un modelo WZW: campos y funciones de correlación. Estudiamos en detalle la construcciónde Sugawara y las ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov.

Finalmente, nos abocamos al estudio de la teoría de WZW sobre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Analizamos las funciones de correlación de dicho modelo, calculando algunos casos particulares, como funciones de 3 puntos con un operador de flujo espectral y de 5 puntos con dos operadores de flujo espectral. A partir de ésta última encontramos los resultados originales del trabajo: la función de 4 puntos con un campo en el sector de flujo espectral $w = 1$, y la función de 3 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$.

Agradecimientos

A lo largo de mi carrera fui conociendo muchas personas que contribuyeron en mi formación y a quienes quiero agradecer. En primer lugar deseo agradecer a mi directora Carmen Nuñez, por su guía y comprensión durante el transcurso de esta tesis. Agradezco su paciencia por permitirme indagar sobre cuestiones que sólo un tesista matemático escudriñaría. También deseo agradecer a mi codirector Pablo Minces por su importante ayuda.

Por otro lado, también quiero mencionar a Marco Farinati porque durante mis estudios siempre estuvo dispuesto a disipar mis dudas de física, en especial las que un matemático está acostumbrado a preguntar, mostrándome que la física posee una visión algebraica, más que cualquier otra. También le agradezco por muchos comentarios útiles durante esta tesis. Asimismo agradezco a Carina Boyallián y a Pavel Etingof por sus mails esclarecedores y su buena predisposición para responder mis dudas. También quiero agradecer a Sergio Iguri por muchas discusiones y consejos útiles.

Quiero agradecer también a mi familia: mi papá, mi mamá y mis hermanos Agus y Nico por acompañarme durante mi carrera y brindarme su invalorable apoyo, aceptando un matemático que estudia física.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer a todos mis amigos, algunos de la facultad y otros no, en especial quiero agradecer a mi mejor amigo Rafa, a Vicki y a Cecilia, que me aceptan tal cual soy y me enseñan todos los días a ser mejor persona. También a mis amigos de la facu: Martín, Gabi, Mariana, Ceci, Diego, Tomi, Fede, Eva, Corina, Cati, Pablo, etc, casi todos físicos, con quienes compartí muchas horas de estudio, debates, salidas, etc y a quienes aprecio mucho.

A su vez, deseo agradecer a los jurados.

Espero no olvidar a nadie que no lo merezca.

Capítulo 1

Introducción

La teoría de cuerdas es actualmente el modelo más prometedor para unificar las interacciones fundamentales. La formulación perturbativa de esta teoría se reduce, en el límite de bajas energías, a la relatividad general y contiene también elementos del modelo estándar de las interacciones electrodébil y fuerte en varias compactificaciones.

La presencia de gravitones en el espectro de la teoría formulada en el espacio-tiempo de Minkowski sugiere la posibilidad de considerar cuerdas en espacio-tiempos curvos y estudiar sus propiedades. En este contexto los espacios de anti-de Sitter resultan particularmente atractivos porque tienen simetría máxima y curvatura constante negativa. En los años '80 fueron muy estudiados porque se consideraba que constituían el fondo natural para las teorías de supergravedad. En particular, la propagación de cuerdas en el espacio tiempo de anti-de Sitter en tres dimensiones (AdS_3) ha sido materia de intensa investigación desde inicios de la década del '90. La motivación original reside en la invariancia conforme exacta de esta teoría, que puede formularse como un modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) en el grupo de Lie $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Efectivamente, el modelo sigma no lineal que desccribe cuerdas en una geometría de fondo AdS_3 con un tensor antisimétrico es el ejemplo más sencillo de teoría de cuerdas exactamente resoluble con una única dirección temporal no trivial.

El interés en este modelo se acrecienta por su estrecha relación con agujeros negros en dos y tres dimensiones (que se pueden construir tomando cocientes y orbifolds de AdS_3 respectivamente), de manera que entender esta teoría puede permitir abordar importantes problemas de la física de agujeros negros. Ver [BOFW, EGP, H1, H2, H3, Mo, Pe1, Pe2] para una lista de referencias de este período inicial de estudio de la teoría de cuerdas en AdS_3.

Un incentivo más reciente para estudiar esta teoría apareció con la correspondencia de dualidad $\mathrm{AdS/CFT}$ o conjetura de Maldacena [Mal]. Esta conjetura postula la dualidad entre teorías de gravedad y teorías de gauge y representa la propuesta más promisoria actualmente para abordar problemas esenciales de la física, como la formulación de una teoría cuántica de la gravedad y el confinamiento de los quarks.

La correspondencia es una realización concreta de la idea holográfica que postula la dualidad entre una teoría de gravedad o de cuerdas en AdS y una teoría cuántica de campos en el borde del espacio-tiempo. En este contexto también AdS_3 es especial ya que tanto la teoría de campos en el borde como el modelo sigma no lineal que describe la hoja de mundo de las cuerdas en el interior de AdS_3 tienen una simetría conforme de dimension infinita. Esta propiedad permite por un lado verificar la correspondencia más allá del límite de supergravedad, al nivel de la teoría de cuerdas, y por otro lado se puede obtener información sobre la teoría de cuerdas no perturbativa a partir de la teoría de campos en el borde. Las referencias [MO2], [KS] presentan una profunda investigación de esta dualidad $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$.

El estatus de la teoría de cuerdas en AdS_3 se puede resumir de la siguiente manera. El espectro de estados físicos fue determinado definitivamente en la referencia [MO1], donde el descubrimiento de la simetría de flujo espectral permitió revelar un espacio de Hilbert unitario y resolver los problemas que presentaban las propuestas anteriores. Y el estudio de la función de partición realizado en la referencia [MOS] permitió corroborar la estructura bien definida de la teoría libre (sin interacciones).

Sin embargo, para poder establecer la consistencia de la teoría completa es necesario estudiar las interacciones y verificar que solo los estados físicos se propaguen en los canales intermedios de las amplitudes de scattering. En otras palabras, la expansión en productos de operadores (OPE) debe ser cerrada sobre los estados unitarios de la teoría. Sin embargo, las reglas de fusión son difíciles de encontrar en la teoría de campos conforme no compacta de la hoja de mundo que define la teoría de cuerdas en AdS_3 debido a la estructura no racional del modelo. No hay vectores nulos en las representaciones relevantes para la teoría y por lo tanto no pueden aplicarse a este caso las técnicas desarrolladas para el caso de las teorías de campos conformes racionales.

Estas teorías conformes están muy estudiadas, y existen muchos ejemplos de ellas provenientes de la mecánica estadística. Los principales aparecen con el estudio de la singularidad de Yang-Lee, el modelo de Ising (incluyendo el modelo Ising tricrítico), el modelo de tres estados de Potts, los modelos RSOS, la teoría de Landau-Guinzburg, etc. Todos ellos están englobados bajo los llamados modelos minimales. Otra gran familia de teorías de campos conformes, llamadas no abelianas, aparecen con el estudio de los modelos de Wess-Zumino-Witten (WZW) sobre grupos de Lie compactos. Ése es el caso de $\mathrm{SU}(2)$, estudiado por primera vez por V. A. Fateev y A. B. Zamolodchikov [FZ], que tiene una importante aplicación en la compactificación de dimensiones extras en la teoría de cuerdas.

Los ejemplos mencionados han sido resueltos completamente, en el sentido de que se conocen todas las funciones de correlación de la teoría. Sin embargo, en el caso en que el grupo de Lie no es compacto la teoría es mucho más compleja, esencialmente debido al hecho de que las representaciones unitarias irreducibles de un grupo de Lie compacto son de dimensión finita, mientras que para un grupo de Lie simple no compacto las representaciones unitarias irreducibles son de dimensión infinita (salvo la trivial). En lenguaje de módulos esto implica que en el caso no compacto, pueden no existir (y de hecho, en general no existen) vectores nulos, herramienta principal de las CFT racionales.

En esta tesis estudiamos las funciones de correlación del modelo de Wess-Zumino-Witten para $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ con algunos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$. Para ello es necesario realizar un estudio más cuidadoso de las teorías WZW no compactas.

El capítulo 2 es una breve síntesis de la teoría de álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$. Presentamos de manera sucinta los conceptos básicos como sistemas de raíces, descomposición de Cartan, grupo de Weyl, representaciones con descomposición en pesos, módulos de Verma, etc. Los resultados se enuncian sin demostración pero con múltiples referencias.

En el capítulo 3 presentamos rápidamente el contenido básico de una teoría cuántica de campos en el espacio de Minkowski, y en particular el caso conforme. Nos enfocamos principalmente en el caso de dos dimensiones, que es el que más nos interesa. Definimos función de correlación de campos, damos la forma funcional de las funciones de correlación de dos y tres puntos, además de la prescripción usual para una función de n puntos.

El capítulo 4 está dedicado al estudio de las álgebras de Kac-Moody, que brindan el lenguaje básico para el desarrollo de los modelos de WZW, y es del mismo estilo que el capítulo 2.

En el capítulo 5 desarrollamos la teoría de Wess-Zumino-Witten para grupos de Lie compactos a partir del modelo sigma no lineal, como es usual. Para una presentación más rigurosa puede verse [SU]. Posteriormente, presentamos las definiciones básicas, i.e., campo primario, correlador, etc, y la construcción de Sugawara, en una forma debida a Segal, que demuestra que estas teorías son conformes. A continuación, deducimos el sistema de ecuaciones que debe cumplir todo correlador, el sistema de Knizhnik-Zamolodchikov. Toda nuestra presentación es a nivel árbol, es decir, sin tener en cuenta autointeracciones.

En el capítulo 6 presentamos la teoría $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW y discutimos su relación con la propagación de cuerdas en el espacio de anti-de Sitter tridimensional. Damos especial énfasis a la simetría de flujo espectral, al espectro físico de la teoría y a las funciones de correlación. En particular, explicitamos la forma de las funciones de dos y tres puntos, tanto en el caso de flujo espectral $w = 0$ como en el caso $w = 1$.

En el capítulo 7 presentamos algunos cálculos desarrollados en el transcurso de la tesis. Más especialmente, la función de 3 puntos, con un operador de flujo espectral, recolectando algunos resultados de [AY], y la función de 5 puntos con dos operadores de flujo espectral. A partir de esta última hallamos la función de 4 puntos con un campo en el sector de flujo espectral $w = 1$ y un campo $\Phi_{\mathrm{k}/2}$, y la forma general de la función de 3 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$, estudiando también algunos casos especiales.

Finalmente, en el último capítulo discutimos los resultados obtenidos y comparamos con la bibliografía existente.

Capítulo 2

Álgebras de Lie y sus representaciones

El primer paso en el estudio de la física cuántica, teorías cuánticas de campos, etc es el estudio de ciertas representaciones de grupos de Lie, que como es usual, son representaciones también de su álgebra de Lie asociada. Es por ello que comenzamos en esta sección y en las siguientes repasando las definiciones básicas de álgebra, que serán necesarias en la teoría de campos conformes: álgebras de Lie y sus representaciones. Más adelante incorporaremos las álgebras de Virasoro y Kac-Moody, que estudiaremos más en detalle en el capítulo 4. Seguiremos en mayor o en menor medida a [EFK]. Para un estudio detallado de la teoría de álgebras de Lie de dimensión finita semisimples y sus representaciones recomendamos [Hum].

2.1 Definiciones generales

Comenzamos fijando notaciones. De ahora en adelante supondremos $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$. Por otro lado, el producto tensorial siempre será sobre k, a menos que se diga otra cosa, i.e. $\otimes = \otimes_k$.

Un **álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre k** es un k-espacio vectorial junto con un morfismo k-lineal

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que cumple las siguientes propiedades

1. (**Antisimetría**)
$$[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

2. (**Identidad de Jacobi**)
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Al morfismo $[\,,\,]$ lo denominamos el **corchete de Lie de $\mathfrak{g}$**.

Dadas dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$, con corchetes $[\,,\,]$ y $[\,,\,]'$ respectivamente, un **morfismo de álgebras de Lie ϕ de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$** es un morfismo k-lineal

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

que cumple que

$$[\phi(x), \phi(y)]' = \phi([x, y])$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Trivialmente vemos que la categoría de las k-álgebras de Lie está bien definida.

En la definición anterior, si $k = \mathbb{R}$ obtenemos la definición de un **álgebra de Lie real**, y si $k = \mathbb{C}$ obtenemos un **álgebra de Lie compleja**.

Dado $x \in \mathfrak{g}$, definimos el morfismo k-lineal

$$\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

dado por

$$\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y].$$

Vemos trivialmente que este morfismo es una derivación, como se ve directamente de 2.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1. *Dado V un espacio vectorial sobre k ($k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$) podemos definir un álgebra de Lie sobre k de la siguiente manera. Tomamos como espacio vectorial sobre k a $\mathrm{End}_k(V)$ con el corchete*

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Trivialmente $\mathrm{End}_k(V)$ junto con este corchete cumple las propiedades 1 y 2 de la definición anterior, y es por lo tanto un álgebra de Lie sobre k. La denotaremos $\mathfrak{gl}(V)$, o $\mathfrak{gl}(n, k)$ si $\dim_k(V) = n$. Ésta es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}_k(V)$.

Del mismo modo, definimos $\mathfrak{sl}(V)$ la k-álgebra de Lie dada por el espacio vectorial de las transformaciones lineales en $\mathrm{End}_k(V)$ que tienen traza 0 y con el mismo corchete que definimos antes. A esta álgebra de Lie a denotaremos $\mathfrak{sl}(V)$, o $\mathfrak{sl}(n, k)$ si $\dim_k(V) = n$. Ésta es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie

$$\mathrm{SL}(V) = \mathrm{SL}(n, k) = \{f \in \mathrm{Aut}_k(V) : \det(f) = 1\}.$$

Por otro lado, dado un espacio vectorial V de dimensión n ($k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$) con la forma bilineal usual $\langle , \rangle$ (i.e.,

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i),$$

podemos definir el álgebra de Lie sobre k

$$\mathfrak{so}(n, k) = \{f \in \mathrm{End}_k(V) : \langle f(v), w \rangle = -\langle v, f(w) \rangle\},$$

que es equivalente al álgebra de Lie de las matrices antisimétricas, i.e., las matrices $n \times n$ (con coeficientes reales o complejos) que cumplen que $x^t = -x$. Ésta es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie

$$\mathrm{SO}(V) = \mathrm{SO}(n, k) = \{f \in \mathrm{Aut}_k(V) : \det(f) = 1, \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle\}.$$

Si $k = \mathbb{R}$, podemos tomar la forma bilineal

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{p} v_i w_i - \sum_{i=p+1}^{n} v_i w_i,$$

y entonces definimos el álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ ($q = n - p$)

$$\mathfrak{so}(p, q) = \{f \in \mathrm{End}_k(V) : \langle f(v), w \rangle = -\langle v, f(w) \rangle\}.$$

Ésta es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie

$$\mathrm{SO}(p,q) = \{f \in \mathrm{Aut}_k(V) : \det(f) = 1, \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle\}.$$

Análogamente, dado un espacio vectorial V de dimensión n sobre $\mathbb{C}$ con la forma sesquilineal usual $\langle\, , \rangle$ (i.e.,

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i w_i),$$

podemos definir el álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$

$$\mathfrak{u}(n) = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) : \langle f(v), w\rangle = -\langle v, f(w)\rangle\},$$

que es equivalente al álgebra de Lie de las matrices antihermíticas, i.e., las matrices $n \times n$ con coeficientes complejos que cumplen que $x^\dagger = -x$. Ésta es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie real

$$\mathrm{U}(n) = \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) : \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle\}.$$

Si tomamos la forma sesquilineal

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{p} \overline{v}_i w_i - \sum_{i=p+1}^{n} \overline{v}_i w_i,$$

podemos definir el álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ ($q = n - p$)

$$\mathfrak{u}(p,q) = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) : \langle f(v), w\rangle = -\langle v, f(w)\rangle\}.$$

Ésta es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie real

$$\mathrm{U(p,q)} = \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) : \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle\}.$$

Definimos los gupos de Lie reales $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n)$ y $\mathrm{SU}(p,q) = \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}(n)$, y sus respectivas álgebras de Lie reales $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$ y $\mathfrak{su}(p,q) = \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{sl}(n)$.

Una **representación (o módulo) sobre k de una k-álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ es un k-espacio vectorial V junto con un morfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V).$$

Equivalentemente, una representación es un k-espacio vectorial V junto con un morfismo k-lineal

$$\sigma : \mathfrak{g} \otimes V \to V$$

que cumple que, si denotamos $\sigma(x, v) = x.v$ ($x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$),

$$x.(y.v) - y.(x.v) = [x, y].v$$

para $x, y \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$. La equivalencia de las definiciones es inmediata.

De ahora en adelante, a menos que se diga otra cosa, vamos a suponer que $k = \mathbb{C}$, como es el caso de la teoría de campos.

Dada un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ definimos **el álgebra de Lie complexificada de** $\mathfrak{g}$, que notaremos $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, como el álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ cuyo espacio vectorial complejo está dado por $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y con el corchete que se obtiene de extender el corchete de $\mathfrak{g}$, i.e.,

$$[\,,]_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

dado por

$$[x \otimes z, x' \otimes z']_{\mathbb{C}} = [x, x'] \otimes zz',$$

para $x, x' \in \mathfrak{g}$, $z, z' \in \mathbb{C}$. Trivialmente este corchete da una estructura de $\mathbb{C}$-álgebra de Lie a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Recíprocamente, $\mathfrak{g}$ se dice una **forma real de** $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

En la teoría de representaciones de un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, esto implica que una representación compleja de $\mathfrak{g}$ no es otra cosa más que una representación (compleja) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Observación 2.1.2. *Vemos que la forma real de un álgebra de Lie compleja puede no ser única. El ejemplo más sencillo es el siguiente: $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$. Este simple hecho indica que la categoría de representaciones complejas de $\mathfrak{su}(2)$ es equivalente a la categoría de representaciones complejas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, y ambas coinciden con la categoría de representaciones (complejas) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (ver [Si1], sec. VIII.4, pp. 174–177).*

Una **subálgebra** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que cumple que, si $x, y \in \mathfrak{h}$, entonces $[x, y] \in \mathfrak{h}$, es decir, el morfismo $[\,,]$ de $\mathfrak{g}$ se restringe a $\mathfrak{h} \otimes_k \mathfrak{h}$ de la siguiente manera

$$[\,,]|_{\mathfrak{h} \otimes_k \mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \otimes_k \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}.$$

Vemos de manera inmediata que una subálgebra de un álgebra de Lie es ella misma un álgebra de Lie con el corchete restringido. Un **ideal** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial I de $\mathfrak{g}$ que cumple que, si $x \in \mathfrak{g}$ y $y \in I$, entonces $[x, y] \in I$. Vemos que un ideal de $\mathfrak{g}$ es una representación de $\mathfrak{g}$. Trivialmente $\mathfrak{g}$ y $\{0\}$ son ideales de $\mathfrak{g}$ (llamados **ideales triviales**).

Definimos **el centro de** $\mathfrak{g}$ como el ideal dado por

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Un álgebra de Lie se dice **abeliana** si $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Del mismo modo definimos **el álgebra derivada de** $\mathfrak{g}$ como el ideal dado por

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle \{[x, y] : x, y \in \mathfrak{g}\} \rangle.$$

También definimos el **normalizador de un subconjunto** S **de** $\mathfrak{g}$ como la subálgebra dada por

$$N_{\mathfrak{g}}(S) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] \in S, \forall y \in S\}.$$

Un álgebra de Lie se dice **simple** si no tiene ningún ideal salvo los triviales y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$. Un ejemplo de álgebra simple es $\mathfrak{sl}(V)$.

Definimos la **sucesión central inferior de** $\mathfrak{g}$ como la sucesión decreciente de subespacios de $\mathfrak{g}$ dada por $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}]$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice nilpotente si $\mathfrak{g}^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Álgebras de Lie de dimensión finita semisimples

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple de dimensión finita. Sabemos que entonces $\mathfrak{g}$ se puede descomponer como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha,$$

donde $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ (i.e., una subálgebra de $\mathfrak{g}$ nilpotente tal que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$), R es un subconjunto finito de $\mathfrak{h}^*$ y $[h, x] = \alpha(h)x$, para todo $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}^\alpha$ (ver [Hum], p. 35). Se sabe que cada $\mathfrak{g}^\alpha$ tiene dimensión uno (ver [Hum], p. 38).

Definimos la **forma de Killing de** $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)).$$

Salvo múltiplos por escalares esta es la única forma bilineal simétrica no degenerada invariante en $\mathfrak{g}$ (ver [Hum], Thm. 5.1, p. 22). Con invariante nos referimos a

$$\langle [x, z], y \rangle = \langle x, [z, y] \rangle.$$

Más adelante fijaremos este factor. Si restringimos esta forma a $\mathfrak{h}$ obtenemos nuevamente una forma bilineal simétrica no degenerada (ver [Hum], Coro. 8.1, p. 36), que da lugar a una identificación entre $\mathfrak{h}^*$ y $\mathfrak{h}$ de la siguiente manera. Tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^* &\to \mathfrak{h} \\ \beta &\mapsto h_\beta, \end{aligned}$$

donde h_β es el único elemento en $\mathfrak{h}$ que cumple que $\beta(h) = \langle h, h_\beta \rangle$.

Esta identificación nos permite dar a $\mathfrak{h}^*$ una forma bilineal simétrica no degenerada dada por $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle h_\alpha, h_\beta \rangle$.

Observación 2.2.1. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real, vemos trivialmente que, si empleamos el isomorfismo natural $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (dado por la mulplicación), y si llamamos $\langle\,,\rangle_{\mathbb{C}}$ a la forma de Killing de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, luego*

$$\langle x \otimes z, x' \otimes z' \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x' \rangle \otimes zz',$$

como vemos inmediatamente de la definición.

A su vez, R se llama el **sistema de raíces de** $\mathfrak{g}$, y cumple que (ver [Hum], Thm. 8.5, p. 40)

1. R es finito, $0 \notin R$ y $\langle R \rangle = \mathfrak{h}^*$.
2. Si $\alpha \in R$, sus únicos múltiplos en R son $\pm\alpha$.
3. Si $\alpha \in R$, y $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ es el morfismo k-lineal dado por $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, con

   $$\alpha^\vee = \frac{2h_\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

   entonces $s_\alpha(R) \subset R$.
4. Si $\alpha, \beta \in R$, $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Elijamos $h \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathrm{Re}(\alpha(h)) \neq 0$ para todo $\alpha \in R$. Una raíz α se llama **positiva** si $\mathrm{Re}(\alpha(h)) > 0$ y **negativa** si $\mathrm{Re}(\alpha(h)) < 0$. Denotamos R_+ al subconjunto de R de raíces positivas y R_- al subconjunto de R de raíces negativas. Por la propiedad 2 anterior, $R_+ = -R_-$. Una raíz se llama **simple** si no puede escribirse como suma de otras raíces positivas. Sabemos que las raíces simples forman una base de $\mathfrak{h}^*$ que denotaremos $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y que toda raíz positiva se puede escribir (de manera única) como una combinación lineal positiva de las raíces simples de $\mathfrak{g}$ (ver [Hum], Thm. 10.1, Thm'. 10.1, p. 48). Denotaremos

$$\mathfrak{n}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in R_\pm} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Luego obtenemos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

que se llama **descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$**.

A modo de síntesis, repasamos las siguientes definiciones básicas:

$$
\begin{aligned}
&Q = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}\alpha_j \subset \mathfrak{h}^* \quad (\textbf{reticulado de raíces}),\\
&Q^\vee = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}\alpha_j^\vee \subset \mathfrak{h} \quad (\textbf{reticulado de corraíces}),\\
&P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda(\alpha_i) \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, r\} \quad (\textbf{reticulado de pesos}),\\
&P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda(\alpha_i) \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, r\} \quad (\textbf{cono de raíces integrales dominantes}),\\
&\{\omega_i : \omega_i \in P^+, \langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{i,j}\} \quad (\textbf{pesos fundamentales}),\\
&\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R} \alpha = \sum_{i=1}^{r} \omega_i, \quad (\textbf{vector de Weyl}),\\
&W = \{s : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^* : s \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*), (\exists\, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathfrak{h}^*) s = s_{\beta_1} \dots s_{\beta_l}\} \quad (\textbf{grupo de Weyl}),\\
&\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-),
\end{aligned}
$$

donde $\mathrm{k} \in \mathbb{N}_0$.

Tenemos el siguiente teorema (ver [Hum], Thm. 18.3, pp. 99–101)

Teorema 2.2.2. *Dado un sistema de raíces R sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathfrak{h}$, donde*

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}h_i,$$

y con base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie generada por los elementos e_i, f_i, h_i ($1 \leq i \leq r$) con relaciones

$$
\begin{aligned}
[e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i,\\
[h_i, e_j] &= \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle e_j,\\
[h_i, f_j] &= -\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle f_j,\\
[h_i, h_j] &= 0,\\
\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) &= 0,\\
\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) &= 0.
\end{aligned}
$$

Luego $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple, con subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ y con sistema de raíces R.

A partir de este teorema, podemos definir la **involución de Chevalley** ω como el automorfismo dado por

$$\begin{aligned} \omega : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ \omega(e_i) &= -f_i, \\ \omega(h_i) &= -h_i, \\ \omega(f_i) &= -e_i. \end{aligned}$$

2.3 Representaciones con descomposición en pesos

Dado V un módulo sobre $\mathfrak{g}$, decimos que tiene una **descomposición en pesos** si

$$V = \bigoplus_{\mu \in S} V^\mu,$$

donde $S \subset \mathfrak{h}^*$, V^μ tiene dimensión finita, y para todo $v \in V^\mu$ se cumple que

$$hv = \mu(h)v,$$

para $h \in \mathfrak{h}$.

Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, definimos el **módulo de Verma de peso máximo** λ, que denotaremos M_λ, como el siguiente módulo inducido

$$M_\lambda = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+)} \mathbb{C}v_\lambda,$$

donde v_λ es un vector que cumple que $\mathfrak{n}^+ v_\lambda = 0$, y

$$hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda,$$

para todo $h \in \mathfrak{h}$.

Dado un $\mathfrak{g}$-módulo V, decimos que es un **módulo de peso máximo** λ si es un cociente de M_λ. Se puede demostrar que el módulo de Verma M_λ tiene un único submódulo maximal (ver [Hum], Thm. 20.2, pp. 108–109), que llamamos I_λ, y entonces definimos el módulo irreducible $L_\lambda = M_\lambda / I_\lambda$.

De manera análoga, dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, al remplazar en la definición anterior $\mathfrak{n}^+$ por $\mathfrak{n}^-$ obtenemos la definición de **módulo de Verma de peso mínimo** λ. Es fácil ver que todo módulo de Verma (de peso máximo o mínimo) tiene una descomposición en pesos.

Tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.3.1. *El módulo de Verma M_λ es irreducible si y sólo si para todo $\alpha \in R_+$*

$$\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{N}.$$

Diremos que λ es **genérico** si para todo $\alpha \in R_+$

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{Z}.$$

Tenemos también el siguiente teorema (ver [Hum], Thm. 21.1, p. 212)

Teorema 2.3.2. *El módulo L_λ es de dimensión finita si y sólo si $\lambda \in P_+$. Además, dados $\lambda, \mu \in P_+$, si $L_\lambda \simeq L_\mu$, entonces $\lambda = \mu$. A su vez, cualquier módulo irreducible de dimensión finita es isomorfo a algún módulo de la forma L_λ ($\lambda \in P_+$).*

En todo módulo M_λ podemos defininir una forma bilineal simétrica que cumple que

$$\langle v_\lambda, v_\lambda\rangle = 1, \langle xu, w\rangle = -\langle u, \omega(x)w\rangle,$$

para $u, v \in M_\lambda$, $x \in \mathfrak{g}$, y ω la involución de Chevalley. Es la llamada **forma de Shapovalov**. Se puede demostrar que la forma de Shapovalov tiene núcleo I_λ y por lo tanto induce una forma bilineal simétrica no degenerada en L_λ que denotaremos de la misma manera.

Si V es un módulo con descomposición en pesos

$$V = \bigoplus_{\mu \in S} V^\mu,$$

luego definimos el dual restringido V^* como

$$V^* = \bigoplus_{\mu \in S} (V^\mu)^*,$$

con la acción dada por

$$(xf)(v) = -f(xv),$$

donde $x \in \mathfrak{g}$, $f \in V^*$, $v \in V$. Es fácil ver que L_λ^* es el módulo de Verma de peso mínimo $-\lambda$.

Definimos la **raíz maximal de** $\mathfrak{g}$, que denotaremos θ, como aquella raíz que cumple que, para toda $\alpha \in R$, $\theta - \alpha \in Q^+$ (ver [Hum], Lemma 10.4.A, pp. 52–53). Definimos el **cono de raíces positivas menores que** k al conjunto

$$P_{\mathrm{k}} = \{\lambda \in P^+ : 0 \leq \langle \theta, \lambda\rangle \leq \mathrm{k}\}. \tag{2.3.1}$$

Equivalentemente, es el peso máximo de la representación adjunta de $\mathfrak{g}$. Si

$$\theta = \sum_{i=0}^{r} n_i \alpha_i,$$

definimos el **número de Coxeter de** $\mathfrak{g}$, que denotaremos h, como

$$h = 1 + \sum_{i=1}^{r} n_i.$$

Si

$$n_i^\vee = n_i \frac{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}{2},$$

definimos el **número de Coxeter dual de** $\mathfrak{g}$, que denotaremos $h^\vee$, como

$$h^\vee = 1 + \sum_{i=1}^{r} n_i^\vee.$$

Si $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ y $\{x^i\}_{1\leq i\leq n}$ son bases de $\mathfrak{g}$ duales con respecto a la forma $\langle , \rangle$ definimos el **elemento de Casimir de** $\mathfrak{g}$, que denotaremos $C \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$,

$$C = \sum_{i=1}^{n} x_i x^i,$$

y el elemento $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i.$$

Es fácil ver que estos dos elementos no dependen de las bases elegidas, y que $\Omega \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$. Por lo tanto, Ω actúa como escalar en toda representación de peso máximo o mínimo, que está dada por

$$\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle$$

si es un módulo es de peso máximo λ, y

$$\langle \mu, \mu + 2\rho \rangle$$

si es un módulo es de peso mínimo $-\mu$.

Capítulo 3

Teoría de campos conforme

En esta sección presentamos de manera precisa el contenido básico de una teoría cuántica de campos en el espacio de Minkowski, como también la teoría de campos conforme, con especial atención al caso de dos dimensiones.

También repasamos el concepto de función de correlación, fundamental en la teoría, presentando la forma de las funciones de 2, 3 y 4 puntos.

3.1 Introducción a la teoría de campos conforme

Sea M el espacio-tiempo de Minkowski de dimensión d con la métrica lorentziana. El grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ se define como el grupo de isometrías de M. Se demuestra que es el producto semidirecto del grupo de traslaciones en M y el grupo de Lorentz $\mathcal{L}$, formado por las transformaciones unimodulares que preservan el cono de luz. Una **teoría cuántica de campos en el espacio de Minkowski (QFT)** es la siguiente colección de datos:

1. Un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$, llamado **espacio de estados**,
2. Un vector $|0\rangle \in \mathcal{H}$, denominado **vacío**,
3. Una representación unitaria $(q, \Lambda) \mapsto U(q, \Lambda)$ del grupo de Poincaré en $\mathcal{H}$,
4. Una colección de morfismos $\Phi_a : \mathrm{Sch}(M, \mathbb{C}) \to \mathrm{L}_d(\mathcal{H})$, que denominamos **campos**, ($\mathrm{L}_d(\mathcal{H})$ denota el espacio de operadores lineales densamente definidos),

que cumplen los siguientes axiomas

1. (**Invariancia de Poincaré**) $U(q, \Lambda)\Phi_a(f)U(q, \Lambda)^{-1} = \Phi_a(U(q, \Lambda)f)$, para $q \in M$, $\Lambda \in \mathcal{L}$. Por el teorema de Stone (ver [Con], Thm. 5.6, pp. 330–333), escribimos $U(q, 1) = \exp(i \sum_{j=0}^{d-1} q_j P_j)$, donde $\{P_j\}$ es un conjunto conmutativo de operadores autoadjuntos en $\mathcal{H}$.
2. (**Estabilidad del vacío**) El vector $|0\rangle$ está fijo por la acción del grupo de Poincaré. El espectro conjunto de $P_0, \ldots, P_{d-1}$ está incluido en el cono de luz futuro.
3. (**Completitud**) El vector $|0\rangle$ está en el dominio de polinomios en $\Phi_a(f)$ y el subespacio lineal $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ expandido por ellos aplicados en $|0\rangle$ es denso en $\mathcal{H}$.
4. (**Causalidad**) $[\Phi_a, \Phi_b(h)] = 0$ en $\mathcal{D}$ si los soportes de Φ_a y Φ_b están espacialmente separados.

Muchas veces vamos a escribir $\Phi_a(x)$, en lugar de $\Phi_a(f(x))$.

Notar que $\mathcal{D}$ es invariante con respecto a los campos $\Phi_a(f)$. Además, vemos inmediatamente que

$$i[P_j, \Phi_a(x)] = \partial_j \Phi_a(x). \tag{3.1.1}$$

y como $P_j|0\rangle = 0$, $\mathcal{D}$ es invariante con respecto a los operadores P_j.

El grupo de Poincaré es un subgrupo del grupo de transformaciones conformes de M. Éste es el grupo generado por las traslaciones y las transformaciones conformes especiales ($b \in M$):

$$x \mapsto x^b = \frac{x + |x|^2 b}{1 + 2x \cdot b + |x|^2 |b|^2}. \tag{3.1.2}$$

Incluye también el grupo de dilataciones ($\lambda \neq 0$)

$$x \mapsto \lambda x. \tag{3.1.3}$$

Denotaremos $\mathfrak{conf}(d)$ al álgebra de Lie correspondiente a este grupo de Lie. Deseamos notar que es un álgebra de Lie no semisimple de dimensión $(d+1)(d+2)/2$.

Una teoría de campos en el espacio de Minkowsi se dice **conforme (CFT)** si la representación unitaria del grupo de Poincaré en $\mathcal{H}$ se puede extender a una representación unitaria del grupo conforme $(q, \Lambda, b) \mapsto U(q, \Lambda, b)$ tal que el vacío $|0\rangle$ está fijo y tenemos (para campos escalares)

$$U(q, \Lambda, b)\Phi_a(f)U(q, \Lambda, b)^{-1} = \alpha(b, x)^{\Delta_a} \Phi_a(U(q, \Lambda, b)f), \tag{3.1.4}$$

donde $\Delta_a \in \mathbb{R}$ es el peso conforme del campo Φ_a y

$$\alpha(b, x) = 1 + 2x \cdot b + |x|^2 |b|^2. \tag{3.1.5}$$

Deseamos notar que $\alpha(b, x)^{-d}$ es el Jacobiano de la transformación especial conforme. Más adelante vamos a modificar un poco este último axioma de covariancia.

Del mismo modo que antes, tenemos el conjunto $\{Q_0, \dots, Q_{d-1}\}$ de operadores autoadjuntos generadores infinitesimales de las transformaciones especiales conformes, i.e.,

$$U(0, 1, b) = \exp(i \sum_{j=0}^{d-1} b_j Q_j). \tag{3.1.6}$$

Vemos directamente que

$$i[Q_j, \Phi_a(x)] = (|x|^2 \partial_j - 2\eta_j x_j E - 2\Delta_a \eta_j x_j)\Phi_a(x), \tag{3.1.7}$$

donde $E = \sum_{j=0}^{d-1} x_j \partial_j$ es el operador de Euler y η_j son los coeficientes de la métrica ($\eta_0 = 1$, $\eta_j = -1$ si $j \geq 1$).

A partir de ahora nos vamos a restringir a la teoría de campos para $d = 2$. Introducimos las coordenadas $t = x_0 - x_1$ y $\bar{t} = x_0 + x_1$, de manera tal que $|x|^2 = t\bar{t}$. Sean

$$P = \frac{1}{2}(P_0 - P_1), \quad \bar{P} = \frac{1}{2}(P_0 + P_1). \tag{3.1.8}$$

Por el axioma de vacío, el espectro conjunto de P y $\bar{P}$ está incluido en $\{(t, \bar{t}) : t \geq 0, \bar{t} \geq 0\}$. Luego el operador $\exp(i(tP + \bar{t}\bar{P}))$ está definido en $\mathcal{D}$ para $t \geq 0$, $\bar{t} \geq 0$. Más aún, como

$$\Phi_a(t + q, \bar{t} + \bar{q})|0\rangle = e^{i(qP + \bar{q}\bar{P})}\Phi_a(t, \bar{t})|0\rangle, \tag{3.1.9}$$

podemos extender analíticamente Φ_a a una función en el dominio

$$\{t : \mathrm{Im}(t) \geq 0\} \times \{\bar{t} : \mathrm{Im}(\bar{t}) \geq 0\} \subset \mathbb{C}^2. \tag{3.1.10}$$

Esto se debe a que, por el teorema de descomposición espectral, $\exp(i(qP + \bar{q}\bar{P}))$ es la transformada de Fourier de una función con soporte en el dominio $p \geq 0, \bar{p} \geq 0$, por la segunda parte del axioma de estabilidad de vacío. Se sigue inmediatamente de la expresión anterior para el campo Φ_a que $\Phi_a|0\rangle = 0$ si y sólo si $\Phi_a = 0$.

En estas coordenadas, las transformaciones especiales conformes se escriben como

$$t^b = \frac{t}{1 + b_+ t}, \qquad \bar{t}^b = \frac{\bar{t}}{1 + b_- \bar{t}}, \tag{3.1.11}$$

donde $b_\pm = b_0 \pm b_1$, para $b = (b_0, b_1)$. Luego, el grupo conforme consiste de las transformaciones

$$(t, \bar{t}) \mapsto \mu(t, \bar{t}) = \left(\frac{at + b}{ct + d}, \frac{\bar{a}\bar{t} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{t} + \bar{d}} \right), \tag{3.1.12}$$

para

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}). \tag{3.1.13}$$

La covariancia completa se puede escribir entonces como (si definimos $\bar{\Delta}_a = \Delta_a$)

$$U(\mu)\Phi_a(t, \bar{t})U(\mu)^{-1} = (ct + d)^{-2\Delta_a}(\bar{c}\bar{t} + \bar{d})^{-2\bar{\Delta}_a}\Phi_a(U(q, \Lambda, b)f). \tag{3.1.14}$$

De ahora en adelante, supondremos que Δ_a no es necesariamente igual a $\bar{\Delta}_a$, y como axioma de covariancia general de CFT al anterior.

También definimos

$$Q = -\frac{1}{2}(Q_0 + Q_1), \qquad \bar{Q} = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_0). \tag{3.1.15}$$

En este caso los conmutadores resultan

$$\begin{aligned} i[P, \Phi_a(t, \bar{t})] &= \partial_t \Phi_a(t, \bar{t}), \\ i[\bar{P}, \Phi_a(t, \bar{t})] &= \partial_{\bar{t}} \Phi_a(t, \bar{t}), \\ i[Q, \Phi_a(t, \bar{t})] &= (t^2 \partial_t + 2\Delta_a t)\Phi_a(t, \bar{t}), \\ i[\bar{Q}, \Phi_a(t, \bar{t})] &= (\bar{t}^2 \partial_{\bar{t}} + 2\bar{\Delta}_a \bar{t})\Phi_a(t, \bar{t}). \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Consideramos la compactificación del espacio de Minkowski dada por la inclusión de M en $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$:

$$z = \frac{1 + it}{1 - it}, \qquad \bar{z} = \frac{1 + i\bar{t}}{1 - i\bar{t}}. \tag{3.1.17}$$

La imagen del dominio $\{(t, \bar{t}) : \mathrm{Im}(t) > 0, \mathrm{Im}(\bar{t}) > 0\} \subset \mathbb{C}^2$ bajo esta flecha es el conjunto $D^2 \times D^2 = \{(z, \bar{z}) : |z| < 1, |\bar{z}| < 1\} \subset \mathbb{C}^2$. La continuación analítica de la distribución $\Phi_a(t, \bar{t})|0\rangle$ a $\{(t, \bar{t}) : \mathrm{Im}(t) > 0, \mathrm{Im}(\bar{t}) > 0\}$ se traduce entonces en la correspondiente continuación analítica a $\{(z, \bar{z}) : |z| < 1, |\bar{z}| < 1\}$. Definimos entonces los campos en la región $D^2 \times D^2$

$$\phi(a, z, \bar{z}) = \frac{\Phi_a(t, \bar{t})}{(1 + z)^{2\Delta_a}(1 + \bar{z})^{2\bar{\Delta}_a}} \tag{3.1.18}$$

para

$$t = i\frac{1-z}{1+z}, \quad \bar{t} = i\frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}. \tag{3.1.19}$$

Notar que el vector $\phi(a,z,\bar{z})|0\rangle|_{z=0,\bar{z}=0} \in \mathcal{D}$, que denotaremos a, está bien definido y el morfismo lineal $\phi(a,z,\bar{z}) \mapsto a$ es inyectivo.

Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}(P - Q + [P,Q]), \\ H &= \frac{1}{2}(P+Q), \\ \mathcal{T}^* &= \frac{1}{2}(P - Q - [P,Q]), \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

y de forma análoga tmabién $\bar{\mathcal{T}}$, $\bar{\mathcal{T}}^*$ y $\bar{H}$.

Observación 3.1.1. *No confundir este operador $\mathcal{T}$ con el tensor de energía-momento de CFT. $\mathcal{T}$ es el generador infinitesimal de la simetría de CFT, y de hecho es la componente de orden uno del desarrollo de Laurent del tensor de energía-momento.*

Notar que, como P, $\bar{P}$, Q y $\bar{Q}$ son operadores autoadjuntos definidos positivos (por la segunda parte del axioma de invariancia de vacío), luego H y $\bar{H}$ son operadores autoadjuntos positivos semidefinidos. Es fácil ver los siguientes conmutadores

$$\begin{aligned} [H,\mathcal{T}] &= \mathcal{T}, \\ [\mathcal{T},\mathcal{T}^*] &= 2H, \\ [H,\mathcal{T}^*] &= -\mathcal{T}^*. \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

De la definición vemos inmediatamente que

$$\begin{aligned} [\mathcal{T},\phi(a,z,\bar{z})] &= \partial_z\phi(a,z,\bar{z}), \\ [H,\phi(a,z,\bar{z})] &= (z\partial_z + \Delta_a)\phi(a,z,\bar{z}), \\ [\mathcal{T}^*,\phi(a,z,\bar{z})] &= (z^2\partial_z + 2z\Delta_a)\phi(a,z,\bar{z}), \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

y análogamente para $\bar{\mathcal{T}}$, $\bar{\mathcal{T}}^*$ y $\bar{H}$. Notar que los operadores $\mathcal{T}$, H, $\mathcal{T}^*$, $\bar{\mathcal{T}}$, $\bar{\mathcal{T}}^*$ y $\bar{H}$ aniquilan el vector vacío. A su vez de las igualdades anteriores obtenemos que

$$Ha = \Delta_a a \tag{3.1.23}$$

y

$$\mathcal{T}^* a = 0. \tag{3.1.24}$$

Como H es positivo semidefinido, vemos fácilmente que los pesos conformes $\Delta_a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Consideremos ahora sólo campos quirales a derecha, i.e., aquellos que cumplen $\partial_{\bar{t}}\Phi_a = 0$. La conmutatividad de los campos es entonces

$$[\Phi_a(t),\Phi_b(t')] = 0, \tag{3.1.25}$$

si $t \neq t'$. Por lo tanto, resulta

$$[\Phi_a(t),\Phi_b(t')] = \sum_{n\geq 0} \delta^{(n)}(t-t')\Psi^n(t'), \tag{3.1.26}$$

donde $\Psi^n(t')$ son ciertos campos que van a cumplir los axiomas de QFT pero no necesariamente los axiomas de CFT. Por lo tanto, los podemos incorporar de la siguiente manera

$$[\phi(a,z),\phi(b,w)] = \sum_{n\geq 0} \delta^{(n)}(z-w)\phi(c_n,w). \tag{3.1.27}$$

Al conmutar con H y emplear las ecuaciones (3.1.22), vemos que $\phi(c_n,w)$ tiene peso conforme $\Delta_a+\Delta_b-n-1$ (en el sentido de la segunda ecuación de (3.1.22)), y como los pesos conformes deben ser mayores o iguales que cero, sólo puede haber finitos términos en la suma anterior. Deseamos hacer notar que los campos $\phi(c_n,w)$ pueden no cumplir invariancia conforme, y la definición de peso conforme para ellos es la dada por la ecuación (3.1.22).

Podemos expandir el campo $\phi(a,z)$ en serie de Fourier

$$\phi(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1},$$

para $a_{(n)} \in \mathrm{End}(\mathcal{D})$. Denotamos V el subespacio de $\mathcal{D}$ generado por los polinomios en $a_{(n)}$ aplicados en $|0\rangle$. Es claro que V es invariante con respecto a los operadores $a_{(n)}$, y por la ecuación (3.1.22), también con respecto a $\mathcal{T}$. Luego, el morfismo lineal inyectivo $\phi(a,z)\mapsto a$ da lugar a un isomorfismo entre V y los campos $\phi(a,z)$, que se denomina **correspondencia estado-operador**.

Un campo Φ de peso conforme Δ se denomina **quasiprimario** (ver [Kac2], p. 123) si cumple

$$[\mathcal{T}^*,\Phi(z)] = (z^2\partial_z + 2z\Delta)\Phi(z). \tag{3.1.28}$$

Vemos trivialmente que los campos $\phi(a,z)$ definidos en (3.1.18) son quasiprimarios.

Antes de definir el concepto de campo primario necesitamos una definición previa. El **álgebra de Virasoro** es el álgebra de Lie dada por

$$\mathrm{Vir} = \mathbb{C}K \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n, \tag{3.1.29}$$

con corchete

$$[L_n,L_m] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m(m^2-1)}{12}\delta_{m,-n}K, \quad [K,L_n]=0, \tag{3.1.30}$$

$(m,n\in\mathbb{Z})$.

Supondremos de ahora en adelante que nuestra CFT posee un campo de Virasoro, es decir, supondremos que tenemos un vector $\nu\in V$ tal que $\phi(\nu,z)=T(z)$ se escribe en serie Laurent como

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \tag{3.1.31}$$

tal que

$$T(z)T(w) \sim \frac{K/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}, \tag{3.1.32}$$

o, equivalentemente,

$$[L_m,L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m,-n}K, \quad [L_n,K]=0, \tag{3.1.33}$$

y $L_{-1}=\mathcal{T}$, $L_0=H$ y $L_1=\mathcal{T}^*$ (ver [Kac2], Thm. 2.6, pp. 36–37). El campo $T(z)$ se denomina **tensor de energía-momento**.

Un campo $\phi(a,z)$ se denomina **primario** (ver [Kac2], Coro. 4.10, p. 127) si cumple que

$$[L_m, \phi(a,z)] = z^m(z\partial + \Delta(m+1))\phi(a,z), \tag{3.1.34}$$

o, de forma equivalente, si tenemos el OPE

$$T(z)\phi(a,w) \sim \frac{\partial\phi(a,w)}{z-w} + \frac{\Delta_a\phi(a,w)}{(z-w)^2}. \tag{3.1.35}$$

Un campo que no es primario se denomina **secundario**. Deseamos notar que el campo $T(z)$ no es primario.

3.2 Funciones de correlación

Una **función de correlación para n campos** $\phi_1, \dots, \phi_n$ se define como

$$\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\Phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle = \langle 0|\tau(\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\Phi_n(z_n,\bar{z}_n))|0\rangle, \tag{3.2.1}$$

donde τ denota el producto ordenado temporalmente de los campos.

En la teoría de campos conforme, las funciones de correlación de dos y tres puntos de campos primarios se pueden determinar por invariancia conforme (ver [DMS], sección 4.3.1) de

$$\langle \phi_1'(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_n'(z_n,\bar{z}_n)\rangle = \prod_{i=1}^n \alpha(z,b)^{-\Delta_i}\langle \phi_1(z_1',\bar{z}_1')\dots\phi_n(z_n',\bar{z}_n')\rangle, \tag{3.2.2}$$

donde Δ_i es el peso conforme de ϕ_i, ϕ_i' denota el campo primario transformado (por un elemento del grupo conforme (q,Λ,b)), y $z_i' = (q,\Lambda,b)z_i$.

También se puede encontrar la forma de las funciones de dos y tres puntos a partir de las identidades de Ward para correladores de campos primarios, que para funciones de n puntos se pueden escribir de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \partial_{z_i}\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle &= 0,\\
\sum_{i=1}^n (z_i\partial_{z_i} + \Delta_i)\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle &= 0,\\
\sum_{i=1}^n (z_i^2\partial_{z_i} + 2z_i\Delta_i)\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

La función de dos puntos para campos primarios queda determinada completamente y es de la forma

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \frac{C_{12}}{(z_1-z_2)^{2\Delta}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2\bar{\Delta}}}, \tag{3.2.4}$$

si $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$ y $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}_2$. En otro caso se anula idénticamente.

Del mismo modo, la función de tres puntos para campos primarios se puede obtener directamente de la ecuación (3.2.2)

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\rangle = C_{123}\frac{1}{z_{12}^{\Delta_{123}}z_{13}^{\Delta_{132}}z_{23}^{\Delta_{231}}}\frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{123}}\bar{z}_{13}^{\bar{\Delta}_{132}}\bar{z}_{23}^{\bar{\Delta}_{231}}}, \tag{3.2.5}$$

donde $z_{ij} = z_i - z_j$ y $\Delta_{ijl} = \Delta_i + \Delta_j - \Delta_l$

El caso de las funciones de cuatro puntos es diferente, ya que no quedan determinadas completamente por invariancia conforme sino que se pueden expresar como funciones de las **razones anarmónicas (conformes)**. Definimos

$$z = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}, \tag{3.2.6}$$

por lo que

$$1 - z = \frac{z_{14}z_{23}}{z_{13}z_{24}}, \qquad \frac{z}{1-z} = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{23}}. \tag{3.2.7}$$

De manera análoga podemos definir $\bar{z}$.

La expresión general para la función de cuatro puntos de campos primarios es

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \ldots \phi_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle = f(z, \bar{z}) \prod_{i<j}^{4} z_{ij}^{\Delta/3 - \Delta_i - \Delta_j} \bar{z}_{ij}^{\bar{\Delta}/3 - \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j}, \tag{3.2.8}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{4} \Delta_i$ y $\bar{\Delta} = \sum_{i=1}^{4} \bar{\Delta}_i$. Esta expresión puede interpretarse del modo siguiente: por invariancia conforme podemos fijar tres puntos de manera arbitraria. Es usual elegir $z_1 = 1$, $z_2 = \infty$ y $z_3 = 0$, con lo que resulta $z = z_4$.

Si suponemos spin cero (i.e., si $\Delta = \bar{\Delta}$), una función de n puntos está dada por la expresión siguiente

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \ldots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \prod_{i<j}^{n} z_{ij}^{\gamma_{ij}} \bar{z}_{ij}^{\gamma_{ij}} f(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_l, \bar{z}_l), \tag{3.2.9}$$

donde $z_1, \ldots, z_l$ son las diferentes razones anarmónicas (conformes) y $l = n - 3$.

En general, las teorías de campos conformes cumplen el hecho sencillo que evidenciamos en la expresión de las funciones de correlación: pueden descomponerse en dos partes, una holomorfa (o izquierda) y otra antiholomorfa (o derecha). Debido a esto, muchas veces trabajaremos solamente en el sector homolorfo, sin que ello cause problema alguno.

No obstante, deseamos hacer una aclaración importante. La factorización en partes holomorfa y antiholomorfa es una característica particular de las llamadas **teorías de campos conformes racionales (RCFT)**. Brevemente, una teoría de campos conforme se dice racional si es posible reorganizar sus representaciones irreducibles del álgebra de Virasoro en un número finito de bloques conformes extendidos, cada uno de los cuales se transforma en otro mediante la acción del grupo modular. No discutiremos el significado de esta definición.

En los capítulos 6 y 7 vamos a trabajar con el modelo de Wess-Zumino-Witten con grupo de Lie $\tilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, un ejemplo de teoría de campos conforme no racional. Sin embargo, como veremos en estos capítulos, muchas veces es igualmente posible una factorización de las funciones de correlación en partes holomorfa y antiholomorfa análoga a como dijimos antes.

Capítulo 4

Álgebras de Kac-Moody

El estudio de las álgebras de Kac-Moody surgió del descubrimiento, hecho independientemente por V. Kac y R. Moody en 1967, de que un álgebra de Lie sobre el anillo de los polinomios de Laurent se puede presentar en términos de generadores y relaciones, como es el caso de álgebras de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$.

Por otra parte, éstas álgebras juegan un rol fundamental en las teorías de Wess-Zumino-Witten, como veremos más adelante. De hecho, a nivel árbol, i.e., sin tener en cuenta autointeracciones, la teoría de WZW es esencialmente equivalente al estudio de ciertos operadores entre representaciones de álgebras de Kac-Moody, como veremos en el capítulo 5.

Es por esta razón que presentamos en este capítulo una breve síntesis de la teoría, muy similar a la de álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$. Al igual que en el capítulo 2, seguiremos más o menos a [EFK]. Para mayores referencias, recomendamos [Kac1].

También discutiremos especialmente el caso $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, que será relevante en los capítulos siguientes. Presentamos brevemente las definiciones básicas de representaciones de grupos de Lie, y las representaciones unitarias irreducibles (complejas) de $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$.

4.1 Definiciones generales

Definimos una **matriz de Cartan** como una matriz de $\mathbb{Z}^{n\times n}$, que escribimos $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, tal que

1. $$a_{ii} = -2, \forall\, 1 \leq i \leq n.$$
2. Si $i \neq j$,
$$a_{ij} \leq 0.$$
3. $$a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0.$$

Dada una matriz de Cartan $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ de rango r, una **realización de** A es un triple $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, donde $\mathfrak{h}$ es un espacio vectorial complejo,

$$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*,$$
$$\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h},$$

Π y $\Pi^\vee$ son linealmente independientes, $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ y $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) = 2n - r$. Vamos a escribir también $h_i = \alpha_i^\vee$.

Dada una matriz de Cartan $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ de rango r y una realización de A $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, definimos el álgebra $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ como el álgebra de Lie dada por los generadores e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) y $\mathfrak{h}$, con las relaciones

$$\begin{aligned}
[e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, \\
[h, e_j] &= \alpha_j(h) e_j, \\
[h, f_j] &= -\alpha_j(h) f_j, \\
[h, h'] &= 0,
\end{aligned}$$

donde $h, h' \in \mathfrak{h}$. A su vez, $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ tiene un único ideal maximal I que interseca $\mathfrak{h}$ trivialmente (ver [Kac1], Thm. 1.2, pp. 3–5).

Definimos el **álgebra de Kac-Moody asociada a la matriz de Cartan A y a la realización** $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ como el álgebra $\tilde{\mathfrak{g}}(A)/\tau$. La denotaremos $\mathfrak{g}(A)$. Equivalentemente, $\mathfrak{g}(A)$ es el álgebra de Lie con generadores e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) y $\mathfrak{h}$, con las relaciones anteriores y

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) &= 0, \\
\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) &= 0,
\end{aligned}$$

(ver [Kac1], Thm. 9.11, p. 159).

Observación 4.1.1. *Por el teorema 2.2.2, notamos que las álgebras de Lie semisimples son un caso particular de álgebras de Kac-Moody.*

4.2 Afinización de algebras de Lie semisimples

Definimos el álgebra de lazos de $\mathfrak{g}$ como

$$\mathbf{L}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}],$$

donde $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ es el álgebra de polinomios de Laurent. La estructura de álgebra de Lie viene dada por

$$[x \otimes P, y \otimes Q] = [x, y] \otimes PQ,$$

donde $x, y \in \mathfrak{g}$ y $P, Q \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Este álgebra tiene una única extensión central no trivial, dada por

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathbf{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c,$$

con el corchete dado por

$$[c, x \otimes P] = 0,$$

y

$$[x \otimes P, y \otimes Q] = [x, y] \otimes PQ + c\langle x, y \rangle (d(P)Q)_0,$$

donde $(H)_0$ es el término de grado 0 del polinomio de Laurent H y d es la derivación en $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ dada por

$$d = t\frac{d}{dt}.$$

A los elementos de la forma $x \otimes t^n$, los denotaremos la mayoría de las veces $x[n]$ siguiendo a [EFK], o sino x_n, si seguimos a [MO1].

Podemos extender este álgebra aún más. Definimos el álgebra de Lie

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d,$$

con el corchete dado por

$$[d, c] = 0,$$
$$[d, x \otimes P] = x \otimes t\frac{d}{dt}P.$$

Las álgebras $\hat{\mathfrak{g}}$ y $\tilde{\mathfrak{g}}$ se llaman **álgebras de Lie afines**. El álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ en particular es un tipo de álgebra de Kac-Moody, la llamada por Kac, afín no torcida (ver [Kac1], Thm. 7.4, p. 101).

A su vez, el álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ tiene una forma bilineal simétrica no degenerada invariante dada por

$$\langle x \otimes P, y \otimes Q \rangle = \langle x, y \rangle (PQ)_0,$$
$$\langle c, d \rangle = 1,$$
$$\langle c, c \rangle = \langle d, d \rangle = \langle c, x \otimes P \rangle = \langle d, x \otimes P \rangle = 0.$$

La restricción de esta forma a $\hat{\mathfrak{g}}$ es degenerada aunque invariante.

Definimos la siguiente subálgebra de $\hat{\mathfrak{g}}$

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c,$$

y también la subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}$

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d,$$

y que llamaremos **subálgebras de Cartan**. Tenemos que $\hat{\mathfrak{h}}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$ con $\Lambda_0(h) = 0$, para $h \in \mathfrak{h}$ y $\Lambda_0(c) = 1$, y $\tilde{\mathfrak{h}}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\delta$ con $\lambda_0(c) = \delta(c) = \delta(h) = 0$, para $h \in \mathfrak{h}$ y $\delta(d) = 1$.

Con la subálgebra de Cartan $\tilde{\mathfrak{h}}$ podemos encontrar una descomposición de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\gamma \in \hat{R}} \tilde{\mathfrak{g}}^\gamma,$$

donde $\gamma \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$,

$$\tilde{\mathfrak{g}}^\gamma = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}} : [h, x] = \gamma(h)x, \forall h \in \tilde{\mathfrak{h}}\},$$

y

$$\hat{R} = \{\gamma \in \tilde{\mathfrak{h}}^* : \tilde{\mathfrak{g}}^\gamma \neq 0\}.$$

No es difícil ver que

$$\hat{R} = \{\alpha + n\delta : \alpha \in R, n \in \mathbb{Z} \text{ o } \alpha = 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

y

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha+n\delta} = \mathfrak{g}^\alpha \otimes \mathbb{C}t^n, \ \alpha \in R, n \in \mathbb{Z},$$
$$\tilde{\mathfrak{g}}^{n\delta} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}t^n, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Los elementos de $\hat{R}$ se llaman las **raíces afines**. También tenemos

$$\hat{R}_+ = \{\alpha + n\delta : n > 0 \text{ o } n = 0, \alpha \in R_+\}$$

y $\hat{R}_- = -\hat{R}_+$. Las raíces simples resultan ser $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ donde $\alpha_0 = \delta - \theta$ (θ es la raíz maximal de $\mathfrak{g}$) y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ son las raíces simples de $\mathfrak{g}$.

Definimos

$$\hat{\mathfrak{n}}^\pm = \mathfrak{n}^\pm \oplus \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t^{\pm 1}\mathbb{C}[t^\pm] = \bigoplus_{\gamma \in \hat{R}_\pm} \tilde{\mathfrak{g}}^\gamma.$$

A partir de estas subálgebras obtenemos la descomposición de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}}^- \oplus \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}^+.$$

Análogamente, tenemos que

$$\hat{Q} = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathbb{Z}\alpha_i.$$

Definimos

$$\alpha_0^\vee = \frac{2h_{\alpha_0}}{\langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle} = h_{\alpha_0} = c - \theta^\vee,$$

y

$$\begin{aligned}
\hat{P} &= \{\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^* : \Lambda(\alpha_i) \in \mathbb{Z}\} \\
&= P \oplus \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\delta, \\
\hat{P}^+ &= \{\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^* : \Lambda(\alpha_i) \in \mathbb{Z}_+\} \\
&= \{\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^* : \Lambda = \lambda + n\Lambda_0 + \Delta\delta, \lambda \in P^+, n \in \mathbb{Z}_+, \Delta \in \mathbb{C}, \langle \lambda, \theta^\vee \rangle \leq n\}.
\end{aligned}$$

Observación 4.2.1. *Si el álgebra de Lie es real entonces las construcciones anteriores tienen perfectamente sentido tomando siempre $\mathbb{R}$ en lugar de $\mathbb{C}$. Es más, es sencillo ver que, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$, luego*

$$(\hat{\mathfrak{g}})_{\mathbb{C}} \simeq \widehat{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}},$$

(isomorfismo de álgebras de Lie) es decir, la complexificación conmuta con la afinización. Para ver este isomorfismo sólo hay que notar que tenemos la flecha $\mathbb{C}$-lineal

$$\begin{aligned}
\phi : \widehat{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} &\to \hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} \\
(x \otimes z) \otimes t^n &\mapsto (x \otimes t^n) \otimes z \\
c &\mapsto c.
\end{aligned}$$

Trivialmente ϕ es un isomorfismo de espacios vectoriales. A su vez, es un morfismo de álgebras de Lie, ya que

$$\begin{aligned}
[(x \otimes z) \otimes t^n, (x' \otimes z') \otimes t^{n'}] &= [x \otimes z, x' \otimes z'] \otimes t^{n+n'} + cn\delta_{n+n',0}\langle x \otimes z, x' \otimes z' \rangle \\
&= [x, x'] \otimes zz' \otimes t^{n+n'} + cn\delta_{n+n',0}\langle x, x' \rangle \otimes zz'
\end{aligned}$$

(la última igualdad vale por la observación 2.2.1) y

$$\begin{aligned}
[(x \otimes t^n) \otimes z, (x' \otimes t^{n'}) \otimes z'] &= [x \otimes t^n, x' \otimes t^{n'}] \otimes zz' \\
&= ([x, x'] \otimes t^{n+n'} + cn\delta_{n+n',0}\langle x, x' \rangle) \otimes zz' \\
&= [x, x'] \otimes t^{n+n'} \otimes zz' + cn\delta_{n+n',0}\langle x, x' \rangle \otimes zz',
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\phi([(x\otimes z)\otimes t^n,(x'\otimes z')\otimes t^{n'}]) &= \phi([x,x']\otimes zz'\otimes t^{n+n'}+cn\delta_{n+n',0}\langle x,x'\rangle\otimes zz')\\ &= [x,x']\otimes t^{n+n'}\otimes zz'+cn\delta_{n+n',0}\langle x,x'\rangle\otimes zz'\\ &= [(x\otimes t^n)\otimes z,(x'\otimes t^{n'})\otimes z']\\ &= [\phi((x\otimes z)\otimes t^n),\phi((x'\otimes z')\otimes t^{n'})].\end{aligned}$$

Los otros conmutadores son más fáciles.

Ejemplo 4.2.2. *El ejemplo en que nos enfocaremos es $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Por la propiedad vista en la observación anterior y la observación 2.1.2, vemos que*

$$\widehat{\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}}\simeq\hat{\mathfrak{su}}(2)_{\mathbb{C}}\simeq\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})\simeq\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}\simeq\widehat{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}}.$$

Por lo tanto las categorías de representaciones complejas de $\hat{\mathfrak{su}}(2)$, $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{R})$ y $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ coinciden.

4.3 Módulos de Verma sobre álgebras de Kac-Moody

Dado $\Lambda\in\tilde{\mathfrak{h}}^*$, definimos el **módulo de Verma de peso máximo** Λ, que denotaremos M_Λ, como el siguiente módulo inducido

$$M_\Lambda=\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})\otimes_{\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{h}}\oplus\hat{\mathfrak{n}}^+)}\mathbb{C}v_\Lambda,$$

donde v_Λ es un vector que cumple que $\hat{\mathfrak{n}}^+v_\Lambda=0$, y

$$hv_\Lambda=\lambda(h)v_\Lambda,$$

para todo $h\in\tilde{\mathfrak{h}}$.

Análogamente, dado un $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulo V, decimos que es un **módulo de peso máximo** Λ si es un cociente de M_Λ. Vamos a tomar $\Lambda=\lambda+\mathrm{k}\Lambda_0+\Delta(\lambda)\delta$, donde

$$\Delta(\lambda)=\frac{\langle\lambda+2\rho,\lambda\rangle}{2(\mathrm{k}+h^\vee)},$$

y $\mathrm{k}\neq-h^\vee$. En este caso denotaremos el módulo de Verma $M_{\lambda,\mathrm{k}}$. El número k se llama el **nivel de la representación**.

Se puede demostrar, análogamente al caso finito, que el módulo de Verma M_Λ tiene un único submódulo maximal (ver [Kac1], Prop. 1.5, pp. 8–9), que llamamos I_Λ, y entonces definimos el módulo irreducible $L_\Lambda=M_\Lambda/I_\Lambda$, que indicaremos $L_{\lambda,\mathrm{k}}$.

De manera análoga, dado $\Lambda\in\tilde{\mathfrak{h}}^*$, al remplazar en la definición anterior $\hat{\mathfrak{n}}^+$ por $\hat{\mathfrak{n}}^-$ obtenemos la definición de **módulo de Verma de peso mínimo** Λ.

Un $\hat{\mathfrak{g}}$-módulo V con descomposición en pesos se llama **integrable** si los elementos de $\hat{\mathfrak{n}}^+$ y $\hat{\mathfrak{n}}^-$ son nilpotentes locales, i.e., dados $v\in V$ y $x\in\hat{\mathfrak{n}}^+\cup\hat{\mathfrak{n}}^-$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x^nv=0$. Tenemos el siguiente teorema (ver [KK], Prop. 3.4, p. 104):

Teorema 4.3.1. *El módulo de Verma M_Λ es irreducible si y sólo si para todo $\alpha\in\hat{R}_+$*

$$\langle\Lambda+\hat{\rho},\alpha\rangle\neq\frac{n}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle,$$

para $n\in\mathbb{N}$, $\hat{\rho}=\rho+h^\vee\Lambda_0$.

Diremos que Λ es **genérico** si se cumplen las condiciones del teorema anterior.

Tenemos también el siguiente teorema (ver [Kac1], Lemma 10.1, p. 171, Prop. 9.3, p. 148, Coro. 10.4, p. 175, Prop. 10.4, p. 175)

Teorema 4.3.2. *El módulo L_Λ es integrable si y sólo si $\Lambda \in \hat{P}^+$. Además, dados $\Lambda, \Lambda' \in \hat{P}^+$, si $L_\Lambda \simeq L_{\Lambda'}$, entonces $\Lambda = \Lambda'$. A su vez, cualquier módulo irreducible integrable (o de la categoría $\mathcal{O}$) es isomorfo a algún módulo de la forma L_Λ ($\Lambda \in \hat{P}^+$).*

En todo módulo M_Λ podemos defininir una forma bilineal simétrica que cumple que

$$\langle v_\Lambda, v_\Lambda \rangle = 1, \langle xu, w \rangle = -\langle u, \omega(x)w \rangle,$$

para $u, v \in M_\Lambda$, $x \in \mathfrak{g}$, y $\tilde{\omega}$ **la involución de Chevalley**. Es la llamada **forma de Shapovalov**. Se puede demostrar que la forma de Shapovalov tiene núcleo I_Λ y por lo tanto induce una forma bilineal simétrica no degenerada en L_Λ que denotaremos de la misma manera.

El módulo $M_{\lambda,\mathrm{k}}$ admite una graduación

$$M_{\lambda,\mathrm{k}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} M_{\lambda,\mathrm{k}}[-n],$$

donde $M_{\lambda,\mathrm{k}}[-n]$ es el espacio asociado al autovalor $-\Delta(\lambda) - n$ de d. Vemos trivialmente que el subespacio de grado $-n$, $M_{\lambda,\mathrm{k}}[-n]$, es un $\mathfrak{g}$-módulo para todo $n \in \mathbb{N}_0$. De hecho, $M_{\lambda,\mathrm{k}}[0] = M_\lambda$.

Definimos la subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}$

$$\tilde{\mathfrak{g}}^+ = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo, entonces podemos verlo como un módulo sobre $\tilde{\mathfrak{g}}^+$, si suponemos que $\mathfrak{g} \otimes t\mathbb{C}[t]$ actúa trivialmente, c actúa por la constante k y d actúa por la constante $-\Delta(\lambda)$. Podemos entonces definir el módulo $\mathrm{Ind}_{\tilde{\mathfrak{g}}^+}^{\tilde{\mathfrak{g}}} V$, que llamaremos **módulo afinizado**.

Los módulos de Verma anteriores entran en este conjunto de módulos, ya que

$$M_{\lambda,\mathrm{k}} = \mathrm{Ind}_{\tilde{\mathfrak{g}}^+}^{\tilde{\mathfrak{g}}} M_\lambda.$$

A su vez, podemos hacer lo mismo con $V = L_\lambda$, i.e.,

$$V_{\lambda,\mathrm{k}} = \mathrm{Ind}_{\tilde{\mathfrak{g}}^+}^{\tilde{\mathfrak{g}}} L_\lambda.$$

Si $\lambda \in P^+$, $V_{\lambda,\mathrm{k}}$ se llama **módulo de Weyl**.

Tenemos el siguiente teorema (ver [KK])

Teorema 4.3.3. *Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mathrm{k} \in \mathbb{C}$, tal que para todo $\alpha \in R_+$,*

$$\mathrm{k} \notin \mathbb{Q}\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + \mathbb{Q},$$

luego $V_{\lambda,\mathrm{k}}$ es irreducible.

Si se cumple la condición anterior, diremos que k es **genérico**.

Otro tipo de módulos sobre $\hat{\mathfrak{g}}$ son los siguientes. Si V es un módulo sobre $\mathfrak{g}$ y $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq 0$), luego definimos la **representación evaluación** de la siguiente manera. El espacio vectorial es el mismo V, pero la acción está dada por

$$(x \otimes P(t))v = P(z)xv, cv = 0,$$

donde $x \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$. A esta representación la notaremos $V(z)$. Si V es de un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita, luego $V(z)$ es un $\hat{\mathfrak{g}}$-módulo integrable. Notar que $V(z)$ no es un $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulo.

La extensión natural es definir el $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulo $z^{-\Delta}V[z,z^{-1}] = V \otimes z^{-\Delta}\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ (z ya no es un número complejo sino una variable formal) donde la acción de $x \otimes P(t)$ y c es la dada por la expresión anterior, y donde d actúa como

$$d = z\frac{d}{dz}.$$

Si $z_0 \neq 0$, tenemos un epimorfismo de $\hat{\mathfrak{g}}$-módulos

$$e_{z_0} : z^{-\Delta}V[z,z^{-1}] \to V(z)$$

dado por la evaluación en z_0.

4.4 El ejemplo principal : $\tilde{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$

El ejemplo en que estamos más interesados es $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ y sus álgebras afinizadas $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ y $\tilde{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$. Esta última álgebra cubre varios casos relevantes de los modelos de Wess-Zumino-Witten para la teoría de cuerdas, i.e., $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW, $\mathrm{SU}(2)$-WZW, H_3^+-WZW, ya que todos estos modelos tienen la misma álgebra de Kac-Moody, $\tilde{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$. Esto se debe a que las álgebras complexificadas de cada caso son isomorfas y por lo tanto sus categorías de representaciones complejas coinciden (ver ejemplo 4.2.2 y un poco más abajo). Lo que diferencia estos modelos es la elección particular en cada caso de una subcategoría de la categoría de representaciones de $\tilde{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$.

4.4.1 Representaciones unitarias de $\mathrm{SU}(2)$ y $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$

Repasamos la definición de representación compleja unitaria de un grupo de Lie de dimensión finita (o más en general, grupo topológico localmente compacto Hausdorff). Decimos que $(\mathcal{H},\pi)$ es una **representación compleja unitaria de un grupo de Lie de dimensión finita** G si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y ρ es un morfismo de grupos

$$\pi : G \to \mathrm{Iso}(\mathcal{H}),$$

donde $\mathrm{Iso}(\mathcal{H})$ denota el grupo de isometrías de $\mathcal{H}$, que cumple que la flecha

$$\begin{aligned} G &\to \mathcal{H} \\ g &\mapsto \pi(g)(v) \end{aligned}$$

es continua para todo $v \in \mathcal{H}$.

Como todas las representaciones que vamos a estudiar son complejas (i.e., $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo), representación unitaria significará para nosotros representación unitaria compleja.

Tenemos el siguiente teorema de Peter-Weyl sobre la descomposición de representaciones de grupos de Lie compactos (ver [Co], Teo. 14.D.1, p. 200; [La], Thm. II.2.2, pp. 27–28):

Teorema 4.4.1. *Sea G un grupo de Lie compacto y sea $\mathcal{H}$ una representación unitaria de G. Entonces $\mathcal{H}$ posee una descomposición única como suma directa de representaciones unitarias irreducibles*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i.$$

Además, toda representación unitaria irreducible es de dimensión finita y equivalente a una subrepresentación de la representación regular $L^2(G)$.

Para grupos de Lie localmente compactos, tenemos el siguiente teorema de descomposición, conocido como teorema de Mautner-Naimark (ver [Co], Teo. 14.E.1, p. 202):

Teorema 4.4.2. *Sea $\mathcal{H}$ una representación unitaria de un grupo de Lie localmente compacto G. Entonces $\mathcal{H}$ posee una descomposición como integral directa*

$$\mathcal{H} = \int_S \mathcal{H}_t \sqrt{d\rho}$$

tal que existe un conjunto $N \subset S$ de medida local nula respecto de $d\rho$ tal que $\mathcal{H}_t$ es una representación unitaria irreducible de G para $t \in S \setminus N$.

En la siguiente sección describiremos los modelos Wess-Zumino-Witten en detalle. Sin embargo queremos adelantar unas pocas palabras en referencia a ellos para ilustrar por qué estamos interesados en estudiar representaciones.

El primer paso de un modelo G-WZW, donde G es un grupo de Lie de dimensión finita, es estudiar las representaciones (complejas) unitarias irreducibles de G, elegir algunas de acuerdo con ciertos criterios variables y luego afinizarlas de acuerdo a lo dicho en la sección anterior, para así obtener representaciones de $\tilde{\mathfrak{g}}$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G. Los grupos de Lie $\mathrm{SU}(2)$ y $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ tienen distintas categorías de representaciones (complejas) unitarias, y sin embargo, tienen la misma álgebra de Lie compleja asociada: $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Esto explica por qué los modelos $\mathrm{SU}(2)$-WZW y $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW son diferentes, aunque tengan la misma álgebra de Kac-Moody: cada uno involucra una subcategoría diferente de representaciones de $\tilde{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$. A continuación presentaremos las representaciones irreducibles unitarias de estos grupos de Lie.

Sabemos que, como $\mathrm{SU}(2)$ es un grupo de Lie compacto, sus representaciones unitarias irreducibles son de dimensión finita. Además como $\mathrm{SU}(2)$ es simplemente conexo, sus representaciones coinciden con las de su álgebra de Lie asociada (ver [FH], 2nd. Principle, p. 119), i.e. $\mathfrak{su}(2)$; y como estamos considerando representaciones complejas, esto es lo mismo que representaciones de $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$, que por el ejemplo 2.1.2, es lo mismo que representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. A su vez, todas las representaciones complejas irreducibles de dimensión finita de $\mathrm{SU}(2)$ son unitarias (ver [CEFRT], p. 266). Por lo tanto, las representaciones (complejas) unitarias irreducibles de $\mathrm{SU}(2)$ coiciden con las representaciones irreducibles de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Vamos ahora a presentar las representaciones unitarias irreducibles del cubrimiento universal de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, que denotaremos $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$. Deseamos hacer notar que otros autores llaman $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ al cubrimiento universal (ver [MO1]).

El grupo de Lie $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ es simplemente conexo pero no es compacto sino localmente compacto (no es compacto ya que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ no lo es). Como no es compacto, sus representaciones (complejas) unitarias irreducibles no son de dimensión finita (excepto la trivial). Esto se deriva de un hecho general que cumplen todos los grupos de Lie simples localmente compactos no compactos (ver [Var]). Como $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ es un cubrimiento de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, sus álgebras de Lie coinciden (ver [War], Thm. 3.26, pp. 100–101). A su vez, $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ es simplemente conexo, y por lo tanto su categoría de representaciones coincide con la de su álgebra de Lie, i.e., $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Como estamos considerando representaciones complejas, esto es lo mismo que representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, que por el ejemplo 2.1.2, es lo mismo que representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Observación 4.4.3. *Aunque dos grupos de Lie simplemente conexos tengan asociada la misma álgebra de Lie (o la misma álgebra de Lie complexificada) y por lo tanto tengan la misma categoría de representaciones, eso no significa que sus representaciones unitarias coinicidan, ya que este último hecho depende del grupo de Lie y no del álgebra. Un ejemplo de que esto es así es el caso de* $\mathrm{SU}(2)$ *y* $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$.

Para describir las representaciones (complejas) unitarias irreducibles de $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ vamos a hacer lo siguiente (ver [Pu], sec. I.A.1, pp. 98–100). Si $(\mathcal{H},\pi)$ es una representación unitaria de $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$, por el teorema de Stone, tenemos operadores autoadjuntos densamente definidos $\{H_j : j = 0,1,2\}$ con dominio $D_j \subset \mathcal{H}$ que cumplen que

$$\pi(\exp(l_j t)) = \exp(-iH_j t),$$

donde los elementos $l_j \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ($j = 0,1,2$) están dados por

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{2}(f-e), \\ l_1 &= \frac{1}{2}h, \\ l_2 &= \frac{1}{2}(f+e), \end{aligned}$$

y que cumplen

$$\begin{aligned} [l_0,l_1] &= l_2, \\ [l_1,l_2] &= -l_0, \\ [l_2,l_0] &= l_1. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que existe $B \subset D_j$ ($j = 0,1,2$) denso en $\mathcal{H}$ y tal que la extensión de $H_j|_B$ a D_j es H_j. (ver [Seg], Thm. 3.1). Definimos

$$C = H_1^2 + H_2^2 - H_0^2,$$

el **operador de Casimir**. Este operador está definido en B, es autoadjunto y de la forma $q\mathrm{id}_B$ ($q \in \mathbb{R}$).

A su vez definimos

$$\begin{aligned} H_+ &= H_1 + iH_2, \\ H_- &= H_1 - iH_2. \end{aligned}$$

Presentamos a continuación las representaciones (complejas) unitarias irreducibles del grupo de Lie $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ (excepto la trivial, ver [Pu], sec. I.A.2, sec. I.B, pp. 100–107):

1. Las **representaciones continuas**, que denotaremos $\mathcal{C}_q^\alpha$ ($q > 1/4$, $0 \leq \alpha < 1$) y el espacio de Hilbert es el dado por la base de Hilbert $\{g_m\}_{m\in\alpha+\mathbb{Z}}$, donde el espectro de H_0 está dado por

$$\{\alpha \pm n : n \in \mathbb{Z}\},$$

y si definimos

$$\sigma = \sqrt{q - \frac{1}{4}},$$

y

$$\rho = -1 + 2i\sigma,$$

la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ está dada por

$$\begin{aligned} H_0 g_m &= m g_m, \\ H_+ g_m &= -i(m - \frac{1}{2}\rho) g_{m+1}, \\ H_- g_m &= -i(m + \frac{1}{2}\rho) g_{m-1}. \end{aligned}$$

A estas representaciones también las denotaremos $\mathcal{C}_j^\alpha$, para $j = -\rho/2$.

2. Las **representaciones discretas de peso mínimo**, que denotaremos $\mathcal{D}_j^+$, ($q = j(1-j)$, $j > 0$) donde el espacio de Hilbert es el dado por la base de Hilbert $\{g_m\}_{m \in j+\mathbb{Z}}$, donde el espectro de H_0 está dado por

$$\{j + n : n \in \mathbb{N}_0\},$$

y la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ está dada por

$$\begin{aligned} H_0 g_m &= m g_m, \\ H_+ g_m &= i(j(1-j) + m(m+1))^{\frac{1}{2}} g_{m+1}, \\ H_- g_m &= -i(j(1-j) + m(m-1))^{\frac{1}{2}} g_{m-1}. \end{aligned}$$

3. Las **representaciones discretas de peso máximo**, que denotaremos $\mathcal{D}_j^-$, ($q = j(1-j)$ $j > 0$) donde el espacio de Hilbert es el dado por la base de Hilbert $\{g_m\}_{m \in j+\mathbb{Z}}$, donde el espectro de H_0 está dado por

$$\{-j - n : n \in \mathbb{N}_0\},$$

y la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ está dada por

$$\begin{aligned} H_0 g_m &= m g_m, \\ H_+ g_m &= -i(j(1-j) + m(m+1))^{\frac{1}{2}} g_{m+1}, \\ H_- g_m &= i(l(1-j) + m(m-1))^{\frac{1}{2}} g_{m-1}. \end{aligned}$$

4. Las **representaciones complementarias**, que denotaremos $\mathcal{E}_q^\alpha$ ($\alpha(1-\alpha) < q \leq 1/4$, $0 \leq \alpha < 1$), donde el espacio de Hilbert es el dado por la base de Hilbert $\{g_m\}_{m \in \alpha+\mathbb{Z}}$ y el espectro de H_0 está dado por

$$\{\alpha \pm n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si definimos

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4} - q},$$

y

$$\rho = -1 + 2\sigma,$$

la acción de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ está dada por

$$\begin{aligned}
H_0 g_m &= m g_m, \\
H_+ g_m &= i(q + m(m+1))^{\frac{1}{2}} g_{m+1}, \\
H_- g_m &= -i(q + m(m+1))^{\frac{1}{2}} g_{m-1}.
\end{aligned}$$

A estas representaciones también las denotaremos $\mathcal{E}_j^\alpha$, para $j = -\rho/2$.

No nos van a interesar todas las representaciones unitarias irreducibles de $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$, sino solamente algunas. La condición que nos interesa particularmente es la de integrabilidad en el espacio anti-de Sitter. Veamos esto un poco más en detalle.

El espacio de Hilbert $L^2(\mathrm{AdS}_3)$ es una representación unitaria de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, y por lo tanto, se descompone en representaciones unitarias irreducibles. Las representaciones que nos van a interesar son solamente aquellas que aparecen en esta descomposición. En el caso de las representaciones discretas $\mathcal{D}_j^\pm$, esto impone $1/2 < j$. Más aún, tenemos que las representaciones $\mathcal{C}_{j=1/2+is}^\alpha \otimes \mathcal{C}_{j=1/2+is}^\alpha$ y $\mathcal{D}_j^\pm \otimes \mathcal{D}_j^\pm$ $(1/2 < j)$ forman un sistema completo de $L^2(\mathrm{AdS}_3)$. Siguiendo la notación de [MO1], a las afinizaciones de las representaciones continuas y discretas las denotaremos $\hat{\mathcal{C}}_j^\alpha$ y $\hat{\mathcal{D}}_j^\pm$, respectivamente.

4.4.2 El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ y sus afinizaciones

Como espacio vectorial el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ está dada por

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f,$$

con el corchete

$$\begin{aligned}
[h,e] &= 2e, \\
[h,f] &= -2f, \\
[e,f] &= h.
\end{aligned}$$

En este caso, si $\langle -,- \rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(-)\mathrm{ad}(-))$ es la forma de Killing, entonces

$$\begin{aligned}
\langle h,h \rangle &= 8, \\
\langle e,f \rangle &= 4, \\
\langle f,f \rangle = \langle e,e \rangle = \langle h,e \rangle = \langle h,f \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

En lugar de la forma de Killing vamos a tomar la forma bilineal simétrica invariante no degenerada $\langle x,y \rangle = -\mathrm{Tr}(xy)$ (un múltiplo de la forma de Killing), que cumple que

$$\langle x,y \rangle = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)).$$

Observación 4.4.4. *Para obtener los generadores que utiliza [MO1], que llamamos J^3, J^+, J^-, hay que elegir*

$$\begin{aligned}
J^3 &= \frac{h}{2}, \\
J^+ &= e, \\
J^- &= -f,
\end{aligned}$$

mientras que, si llamamos H, E, F los generadores de [AY], están dados por

$$\begin{aligned} H &= \frac{h}{2}, \\ E &= e, \\ F &= f. \end{aligned}$$

A su vez, la forma bilineal simétrica invariante elegida por [AY] se diferencia sólo en un signo de la nuestra, mientras que la elegida por [MO1] coincide con la nuestra.

La subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$, y por lo tanto, la podemos identificar con $\mathbb{C}$ mediante $h \mapsto 1$. La descomposición de Cartan de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ nos da entonces $\mathfrak{n}^+ = \mathbb{C}e$ y $\mathfrak{n}^- = \mathbb{C}f$. La única raíz positiva resulta ser entonces la funcional $h \mapsto 2$, que llamamos α. Como $\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}\alpha$, podemos hacer también la identificación de $\mathfrak{h}^*$ con $\mathbb{C}$, dada por $\alpha \mapsto 2$. Además tenemos una identificación entre $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$ dada por la forma bilineal $\langle\, , \rangle$, es decir, identificamos $h \mapsto -\alpha$. A partir de lo anterior, vemos que la forma bilineal $\langle\, , \rangle$ en $\mathfrak{h}^*$ está dada por

$$\langle \beta, \gamma \rangle = -\frac{\beta\gamma}{2}.$$

Notar que $\theta = \alpha$ y bajo las identificaciones anteriores $\rho = 1$. Vemos fácilmente que tanto el número de Coxeter como el número dual de Coxeter de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ resultan ser -2.

El elemento de Casimir Ω de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ está dado por

$$\Omega = e \otimes f + f \otimes e + \frac{h \otimes h}{2}.$$

En cuanto a $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, tenemos que

$$\begin{aligned} [e[n], f[m]] &= h[n+m] - \mathrm{k} n \delta_{n,-m}, \\ [h[n], e[m]] &= 2e[n+m], \\ [h[n], f[m]] &= -2f[n+m], \\ [h[n], h[m]] &= -2\mathrm{k}\delta_{n,-m}. \end{aligned}$$

La descomposición de Cartan de $\tilde{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ resulta

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{h}} &= \mathbb{C}h[0] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d, \\ \hat{\mathfrak{n}}^+ &= \bigoplus_{n>0} \mathbb{C}h[n] \oplus \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}e[n] \bigoplus_{n>0} \mathbb{C}f[n], \\ \hat{\mathfrak{n}}^- &= \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}h[n] \oplus \bigoplus_{n\leq 0} \mathbb{C}f[n] \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}e[n]. \end{aligned}$$

De ahora en adelante, para evitar inconvenientes de definición, cuando trabajemos con el álgebra $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{R})$, vamos a emplear la convención de [MO1].

Capítulo 5

Modelo de Wess-Zumino-Witten

Los modelos de Wess-Zumino-Witten fueron desarrollados por primera vez por Wess-Zumino, y luego reestudiados por Witten, y junto con los modelos minimales son el principal ejemplo de teorías de campos conformes. La componente fundamental de estas teorías son los llamados campos primarios, definidos por primera vez por V. G. Knizhnik y A. B. Zamolodchikov, quienes derivaron una serie de ecuaciones para productos de estos campos. Una construcción matemáticamente rigurosa de estos modelos fue hecha por primera vez por A. Tsuchiya e Y. Kanie [TK].

En esta sección presentamos el modelo G-WZW, para un grupo de Lie simple compacto G en la forma usual, es decir, a partir de un modelo sigma no lineal (para una presentación más rigurosa puede verse [TUY] o [SU]). Veremos que las corrientes conservadas de la teoría nos conducen directamente a ciertos tipos de álgebras de Kac-Moody, las álgebras de Lie afinizadas.

Luego realizamos en detalle la construcción de Sugawara, siguiendo a Segal, que muestra esencialmente que estos modelos son teorías de campos conformes. A partir de ahí presentamos la definición de campo primario (para el modelo de WZW, que resultará ser también un campo primario de CFT), función de correlación, y un sistema de ecuaciones que aparece naturalmente en el desarrollo de la teoría, denominado sistema de Knizhnik-Zamolodchikov.

5.1 Modelo Sigma no lineal y modelo de WZW

En esta sección seguiremos más o menos a [DMS].

El **modelo sigma no lineal** está descripto por la acción

$$S_0 = \frac{1}{4a^2} \int_M \mathrm{tr}'(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g)\, d^2x, \tag{5.1.1}$$

donde M es el espacio de Minkowski de dimensión 2. En la fórmula anterior $a \in \mathbb{R}$, g es un campo sobre M con valores en un grupo de Lie simple compacto G asociado al álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ (i.e., g es una sección del fibrado principal trivial sobre M con grupo de estructura G), y elegimos V una representación unitaria de G de forma tal que

$$\mathrm{tr}' = \frac{1}{I_V}\mathrm{tr}, \tag{5.1.2}$$

para I_V el índice de Dynkin de la representación y tr es la traza sobre V.

Como la acción de G es unitaria, luego $g^{-1}\partial_\mu g$ es un operador antihermítico en V ya que

$$(g^{-1}\partial_\mu g)^\dagger = \partial_\mu g^{-1} g = -g^{-1}\partial_\mu g, \tag{5.1.3}$$

y por lo tanto

$$\mathrm{tr}'(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g) = \mathrm{tr}'((\partial^\mu g)^\dagger \partial_\mu g) \geq 0, \tag{5.1.4}$$

lo que implica que la acción S_0 es positiva.

El **modelo de Wess-Zumino-Witten con grupo de Lie G (G-WZW)** es una variación de la acción anterior con el siguiente agregado, llamado **término de Wess-Zumino**

$$\Gamma = \frac{-i}{24\pi}\int_{B_3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{tr}'(\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g})\, d^3y, \tag{5.1.5}$$

donde B_3 es la bola de dimensión 3 con borde igual a la compactificación de M, y $\tilde{g}$ denota el campo en B_3 con valores en G cuya restricción al borde es g.

Podemos describir el término de WZ de una manera más intrínseca (ver [Wit], apéndice). Como $H^3(\mathfrak{g}, k) = k$ para toda álgebra de Lie semisimple, y $H^\bullet(\mathfrak{g}, k) = (\Lambda^\bullet\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \Omega^\bullet(G)^{G\times G}$, donde $\Omega^\bullet(G)^{G\times G}$ denota el conjunto de las formas $G\times G$-invariantes, vemos que en todo grupo de Lie simple compacto hay una única 3-forma ω cerrada e invariante ante $G\times G$. Por el lema de Poincaré, localmente tenemos que $\omega = d\lambda$, donde λ es una 2-forma. Podemos definir el término de WZ de la forma siguiente

$$\Gamma = \int_{B_3} g^*(\omega) = \int_{B_3} g^*(d\lambda) = \int_{B_3} dg^*(\lambda) = \int_{\partial B_3} g^*(\lambda), \tag{5.1.6}$$

donde $g^*(\omega)$ es el pull-back de ω, y usamos el teorema de Stokes en la cuarta igualdad. Notar que por lo tanto el término de WZ se puede ver como una integral en dos dimensiones.

La existencia de una extensión del campo g definido en M a B_3 es posible si pedimos que $H_2(G,\mathbb{Z}) = 0$ (esto es directo de la definición de homología simplicial). Sin embargo, como son posibles muchas extensiones de g, el término de WZ podría no estar definido. Las distintas maneras de extender g están clasificadas por $H_3(G,\mathbb{Z})$. Si pedimos $H_3(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, el término de WZ está definido módulo 2π, y por lo tanto, k debe ser entero. Por lo tanto, la acción de un modelo WZW resulta

$$S = S_0 + \mathrm{k}\Gamma, \tag{5.1.7}$$

donde $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$.

Como ya se dijo, a pesar de que el término de Wess-Zumino está dado por una integral en tres dimensiones, al hacer una variación en el campo g, tenemos que

$$\delta\Gamma = \frac{i}{8\pi}\int_M \epsilon_{\mu\nu}\mathrm{tr}'(g^{-1}\delta g\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g))\, d^2x, \tag{5.1.8}$$

por lo que las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) + \frac{a^2 i\mathrm{k}}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g) = 0. \tag{5.1.9}$$

En las variables complejas z, $\bar{z}$ las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$(1 + \frac{a^2\mathrm{k}}{4\pi})\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g) + (1 - \frac{a^2\mathrm{k}}{4\pi})\partial_{\bar{z}}(g^{-1}\partial_z g) = 0, \tag{5.1.10}$$

que están expresadas en función de las corrientes

$$J_z = \partial_z g g^{-1} \tag{5.1.11}$$

y

$$J_{\bar{z}} = g^{-1}\partial_{\bar{z}} g. \tag{5.1.12}$$

Si

$$a^2 = \frac{4\pi}{\mathrm{k}}, \tag{5.1.13}$$

entonces $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ y obtenemos la ley de conservación

$$\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g) = 0. \tag{5.1.14}$$

La igualdad anterior es la ley de conservación de la corriente $J_{\bar{z}}$, sin embargo la conservación de una de estas corrientes implica la conservación de la otra como vemos de la siguiente igualdad

$$\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g) = g^{-1}\partial_{\bar{z}}(\partial_z g g^{-1}) g. \tag{5.1.15}$$

Por otro lado, si

$$a^2 = -\frac{4\pi}{\mathrm{k}}, \tag{5.1.16}$$

entonces $-\mathrm{k} \in \mathbb{N}$. Propiamente dicho, el modelo WZW exige $a^2 = 4\pi/\mathrm{k}$, que es lo que supondremos de ahora en adelante.

La solución de la ecuación anterior es sencillamente

$$g(z,\bar{z}) = f(z)\bar{f}(\bar{z}), \tag{5.1.17}$$

para funciones arbitrarias f y $\bar{f}$.

La conservación de las corrientes J_z y $J_{\bar{z}}$ implica la invariancia de la acción bajo

$$g(z,\bar{z}) \mapsto \Omega(z) g(z,\bar{z}) \bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}), \tag{5.1.18}$$

donde $\Omega, \bar{\Omega} \in G$. Para ver esto, en el caso infinitesimal tenemos que

$$\Omega(z) = 1 + \omega(z) \quad \bar{\Omega}(\bar{z}) = 1 + \bar{\omega}(\bar{z}). \tag{5.1.19}$$

Por lo tanto, g transforma acuerdo a

$$\delta_\omega g = \omega g, \quad \delta_{\bar{\omega}} g = -g\bar{\omega}. \tag{5.1.20}$$

Para $a^2 = 4\pi/\mathrm{k}$, tenemos que el cambio de la acción S ante $g \mapsto g + \delta_\omega g + \delta_{\bar{\omega}} g$ es

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{\mathrm{k}}{2\pi} \int \mathrm{tr}'(g^{-1}\delta g[\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g)])\, d^2x \\ &= \frac{\mathrm{k}}{2\pi} \int \mathrm{tr}'(\omega(z)\partial_{\bar{z}}(\partial_z g g^{-1}) - \bar{\omega}(\bar{z})\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g))\, d^2x \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

donde la última igualdad vale al hacer integración por partes.

Si definimos

$$J(z) = -\mathrm{k} J_z(z), \quad \bar{J}(\bar{z}) = -\mathrm{k} J_{\bar{z}}(\bar{z}), \tag{5.1.22}$$

podemos reescribir la ecuación anterior

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi}\int (\partial_{\bar{z}}(\mathrm{tr}'(\omega(z)J(z))) + \partial_z(\mathrm{tr}'(\bar{\omega}\bar{J}(\bar{z})))) \, d^2x. \tag{5.1.23}$$

Al reemplazar d^2x por $(-i/2)dzd\bar{z}$ e integrar por partes, tenemos que

$$\delta_{\omega\bar{\omega}} S = \frac{i}{4\pi}\oint \mathrm{tr}'(\omega(z)J(z))\, dz - \frac{i}{4\pi}\oint \mathrm{tr}'(\bar{\omega}\bar{J}(\bar{z}))\, d\bar{z}. \tag{5.1.24}$$

donde todos los contornos están orientados positivamente.

Si escribimos

$$J = \sum_a J^a t^a, \qquad \omega = \sum_a \omega^a t^a, \tag{5.1.25}$$

donde $\mathrm{tr}'(t^a t^b) = 2\delta_{ab}$ y

$$[t^a, t^b] = \sum_c i f_{abc} t^c, \tag{5.1.26}$$

resulta

$$\delta_{\omega\bar{\omega}} S = -\frac{1}{2\pi i}\oint \sum_a \omega^a J^a \, dz + \frac{1}{2\pi i}\oint \sum_a \bar{\omega}^a \bar{J}^a \, d\bar{z}. \tag{5.1.27}$$

Usando que $\delta\langle X\rangle = \langle(\delta s)X\rangle$, donde δs indica la densidad de δS y X indica una n-upla de campos, obtenemos

$$\delta_{\omega\bar{\omega}}\langle X\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\oint \sum_a \omega^a \langle J^a X\rangle \, dz + \frac{1}{2\pi i}\oint \sum_a \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X\rangle \, d\bar{z}. \tag{5.1.28}$$

Además la transformación de las corrientes ante $g \mapsto g + \delta_\omega g + \delta_{\bar{\omega}} g$ es

$$\begin{aligned}\delta_\omega J &= -\mathrm{k}(\partial_z(\delta_\omega g)g^{-1} - \partial_z g g^{-1}\delta_\omega g g^{-1}) \\ &= -\mathrm{k}(\partial_z \omega g + \omega \partial_z g)g^{-1} + \mathrm{k}\partial_z g g^{-1}\omega \\ &= [\omega, J] - \mathrm{k}\partial_z \omega,\end{aligned} \tag{5.1.29}$$

por lo que

$$\delta_\omega J^a = \sum_{bc} i f_{abc}\omega^b J^c - \mathrm{k}\partial_z \omega^a. \tag{5.1.30}$$

Esto implica que

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{\mathrm{k}\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \sum_c i f_{abc}\frac{J^c(w)}{(z-w)}. \tag{5.1.31}$$

Si

$$J^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} J^a_n, \tag{5.1.32}$$

entonces tenemos que el OPE anterior es equivalente a

$$[J^a_n, J^b_m] = \sum_c i f_{abc} J^c_{n+m} + \mathrm{k} n \delta_{ab}\delta_{n+m,0}, \tag{5.1.33}$$

que no son otra cosa que las reglas de conmutación del álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathfrak{g}}$.

Análogamente podemos proceder con la corriente $\bar{J}$, y obtenemos

$$\delta_{\bar{\omega}}\bar{J} = [\bar{\omega}, \bar{J}] - \mathrm{k}\partial_{\bar{z}}\bar{\omega}. \tag{5.1.34}$$

Esto da otra copia del álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathfrak{g}}$ para los modos $\bar{J}^b_m$. Como $\bar{\omega}(\bar{z})$ no depende de z, tenemos que

$$\delta_{\bar{\omega}}J = 0, \tag{5.1.35}$$

lo que implica que el OPE entre $J^a(z)$ y $\bar{J}^b(\bar{z})$ contiene sólo términos regulares, con lo que

$$[J^a_n, J^b_m] = 0. \tag{5.1.36}$$

En general, definimos el **espectro de la teoría G-WZW** como el conjunto (cf. [FU], p. 178)

$$\{(\Lambda, \Lambda) \in \hat{h}^* : M_\Lambda \text{ es unitarizable}\}. \tag{5.1.37}$$

5.2 Construcción de Sugawara

El álgebra de Virasoro actúa por derivaciones en $\hat{\mathfrak{g}}$. La acción está dada por el morfismo de álgebras de Lie

$$\phi : \mathrm{Vir} \to \mathrm{Der}(\hat{\mathfrak{g}}),$$

dado por

$$\phi(L_m)(x[n]) = -nx[n+m],$$
$$\phi(L_m)(c) = \phi(K)(c) = \phi(K)(x[n]) = 0,$$

donde $x \in \mathfrak{g}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Podemos entonces definir el álgebra de Lie $\mathrm{Vir} \ltimes \hat{\mathfrak{g}}$. Notamos que la acción de L_0 coincide con la acción adjunta de $-d$, y por lo tanto tenemos una inclusión canónica de $\tilde{\mathfrak{g}}$ en $\mathrm{Vir} \ltimes \hat{\mathfrak{g}}$.

Si V es una representación de peso máximo de $\hat{\mathfrak{g}}$ (o más en general, restringida) de nivel k, podemos definir entonces una acción de Vir en V de la siguiente manera. Es la llamada **construcción de Sugawara**, aunque la forma en que la vamos a presentar es debida a Segal.

Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Definimos el morfismo

$$\chi : \mathrm{Vir} \to \mathfrak{gl}(V),$$

dado por

$$\chi(L_m)(v) = \frac{1}{2(\mathrm{k}+h^\vee)} \sum_{a\in\mathcal{B}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} : a[n]a[m-n] : (v),$$
$$\chi(K)(v) = \frac{\mathrm{k}\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})}{\mathrm{k}+h^\vee} v,$$

donde el **producto normalmente ordenado** $: a[n]a[m] :$ está dado por

$$: a[n]a[m] := \begin{cases} a[n]a[m], & m \geq n, \\ a[m]a[n], & n \geq m. \end{cases}$$

Vemos trivialmente que el morfismo ψ está bien definido, ya que la suma anterior es finita debido al simple hecho de que el módulo V es de peso máximo (ver [Kac1], sec. 12.8).

Además tenemos el siguiente teorema (ver [Kac1], Coro. 12.8, pp. 231–232)

Teorema 5.2.1. *A partir de un módulo de peso máximo V sobre $\hat{\mathfrak{g}}$, la construcción de Sugawara da al módulo V una acción de* Vir. *A su vez, esta acción da lugar a una acción de* $\mathrm{Vir} \ltimes \hat{\mathfrak{g}}$ *en V.*

A partir de este teorema vemos que V tiene una acción de $\tilde{\mathfrak{g}}$, que extiende la acción de $\hat{\mathfrak{g}}$, explícitamente $L_0 = -d$. (ver [EFK], p. 26). Esto es un resultado directo de haber elegido en nuestras representaciones $dv = -\Delta(\lambda)v$, para v un vector de peso máximo.

Observación 5.2.2. *El teorema refleja el hecho siguiente: la categoría de representaciones de peso máximo de $\hat{\mathfrak{g}}$ es equivalente a la categoría de representaciones de peso máximo de $\tilde{\mathfrak{g}}$ donde la acción de d está dada por*

$$dv = -\Delta(\lambda)v,$$

para v el vector de peso máximo.

Más aún, los objetos de esta categoría poseen una acción del álgebra de Virasoro.

Dado $x \in \mathfrak{g}$ definimos la **corriente asociada a** x como la serie formal de Laurent (i.e., un elemento de $\mathfrak{g}[\![z, z^{-1}]\!]$)

$$J^x(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]z^{-n-1},$$

que podemos escribir

$$J^x(z) = J^x_+ - J^x_-,$$

donde

$$J^x_+(z) = \sum_{n<0} x[n]z^{-n-1},$$
$$J^x_-(z) = -\sum_{n\geq 0} x[n]z^{-n-1}.$$

Sea V una representación de peso máximo de $\hat{\mathfrak{g}}$ de nivel k y sea $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Luego $J^x(z)$ define un operador de V en $\hat{V}$, donde $\hat{V}$ denota la completación de V con respecto a la $\mathbb{Z}$-graduación dada por la acción de d, i.e., si

$$V = \bigoplus_{n\geq 0} V[-n],$$

donde $V[-n]$ es el autoespacio de d de autovalor $-\Delta - n$, luego

$$\hat{V} = \prod_{n\geq 0} V[-n].$$

De hecho la corriente J^x_- es un operador de V en V.

Con respecto a la composición de estas corrientes, veamos que podemos darle sentido sin problema. Sean $x, y \in \mathfrak{g}$. La composición $J^x_-(z)J^y_-(\zeta) : V \to V$ no tiene inconvenientes, ya que son operadores de V en V. La composición $J^x_+(z)J^y_-(\zeta) : V \to \hat{V}$ tampoco posee inconvenientes, ya que J^y_- es un operador de V en V. La composición $J^x_+(z)J^y_+(\zeta) : V \to \hat{V}$ también es clara, ya que si denotamos un elemento de $\hat{V}$ con una suma formal

$$\sum_{n\geq 0} v_n$$

podemos definir

$$\begin{aligned} J_+^x(z) &: \hat{V} \to \hat{V} \\ \sum_{n\geq 0} v_n &\mapsto \sum_{m\geq 0} w_m \end{aligned}$$

donde

$$w_m = \sum_{\substack{n-i=m \\ n\geq 0, i<0}} x[i]v_n z^{-i-1},$$

y la suma es finita (pues V es de peso máximo).

Para lograr definir la composición de las corrientes $J_-^x(z)J_+^y(\zeta) : V \to \hat{V}$ debemos imponer alguna condición. Si v es un elemento homogéneo de grado n ($n \geq 0$) luego

$$J_-^x(z)J_+^y(\zeta)v = -\sum_{j\geq j_0} z^{-j-1}\zeta^{-n+j-1}x[j]y[n-j]v.$$

Para j suficientemente grande tenemos que $x[j]v = 0$ y entonces

$$x[j]y[n-j]v = [x[j], y[n-j]]v = ([x, y])[n]v + j\langle x, y\rangle\delta_{n,0}\mathrm{k}v.$$

Por lo tanto salvo finitos términos, todos los demás términos de la serie formal anterior son de la forma αv o $\beta[x, y][n]v$. Si sumamos desde un punto de vista analítico entonces debemos ver que converjan las siguientes series

$$\sum_{j\geq j_0} z^{-j-1}\zeta^{-n+j-1},$$
$$\sum_{j\geq j_0} jz^{-j-1}\zeta^{-n+j-1},$$

que convergen si y sólo si $|z| \geq |\zeta|$. En ese caso podemos dar sentido al operador $J_-^x(z)J_+^y(\zeta)$.

Finalmente, como el tensor energía-momento es

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2},$$

entonces, de la construccción de Sugawara vemos que

$$T(z) = \frac{1}{2(\mathrm{k} + h^\vee)} \sum_{a\in\mathcal{B}} : (J^a)^2 : .$$

5.3 Campos primarios

Sean L_{λ_i} ($i = 0, 1$) dos representaciones irreducibles de peso máximo del álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$. Si $\mathrm{k} \in \mathbb{C}$ es genérico con respecto a λ_i ($i = 0, 1$), luego, como vimos en la sección anterior, el $\tilde{\mathfrak{g}}$-módulo $V_{\lambda_i,\mathrm{k}}$ es irreducible, es decir, coincide con $L_{\lambda_i,\mathrm{k}}$ ($i = 0, 1$).

Dados V un $\mathfrak{g}$-módulo de peso mínimo, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definimos un **$\hat{\mathfrak{g}}$-operador de intercambio** (en inglés $\hat{\mathfrak{g}}$-*intertwining operator*) como un morfismo $\hat{\mathfrak{g}}$-lineal

$$\phi : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_0,\mathrm{k}}\hat{\otimes}V(z),$$

donde $M_{\lambda_0}\hat{\otimes}V(z)$ es el producto tensorial completado de los módulos con respecto a la $\mathbb{Z}$-graduación de $M_{\lambda_0,\mathrm{k}}$, i.e.,

$$M_{\lambda_0,\mathrm{k}}\hat{\otimes}V(z) = \prod_{n\geq 0} M_{\lambda_0,\mathrm{k}}[n] \otimes V(z).$$

Deseamos notar que en la definición anterior podemos emplear cualquier módulo de peso máximo o un módulo del tipo $V_{\lambda,\mathrm{k}}$. La $\hat{\mathfrak{g}}$-linealidad de ϕ se escribe como

$$\phi\, x[n] = (x[n] \otimes 1 + 1 \otimes z^n x)\phi.$$

No estamos interesados en todos los operadores de intercambio sino sólo en algunos que provienen de operadores de intercambio en la categoría de representaciones de $\mathfrak{g}$. Para ello tenemos los siguientes teoremas. El primero se encuentra en [TK].

Teorema 5.3.1. *Sea* $\mathrm{k} \in \mathbb{N}_0$ *y sea*

$$g : L_{\lambda_1} \to L_{\lambda_0} \otimes V_\mu,$$

un morfismo $\mathfrak{g}$-lineal, donde V_μ es un módulo de peso mínimo $-\mu$. Si $\lambda_i \in P_{\mathrm{k}}$ $(i = 0, 1)$ y $\mu \in P_{\mathrm{k}}$, luego existe un único $\hat{\mathfrak{g}}$-operador de intercambio

$$\phi : V_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to V_{\lambda_0,\mathrm{k}}\hat{\otimes}V_\mu(z),$$

tal que la componente de grado cero de $\phi^g(z)(v)$ es $g(v)$, para todo $v \in V_{\lambda_1,\mathrm{k}}[0] = L_{\lambda_1}$.

El segundo teorema se encuentra en [EFK], Thm. 3.1.1, p. 30, que presentamos con demostración:

Teorema 5.3.2. *Sea* $\mathrm{k} \in \mathbb{C}$ *y sea*

$$g : L_{\lambda_1} \to L_{\lambda_0} \otimes V,$$

un morfismo $\mathfrak{g}$-lineal. Si k es genérico con respecto a λ_i $(i = 0, 1)$, luego existe un único $\hat{\mathfrak{g}}$-operador de intercambio

$$\phi : V_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to V_{\lambda_0,\mathrm{k}}\hat{\otimes}V(z),$$

tal que la componente de grado cero de $\phi^g(z)(v)$ es $g(v)$, para todo $v \in V_{\lambda_1,\mathrm{k}}[0] = L_{\lambda_1}$.

Demostración. Debemos construir el $\hat{\mathfrak{g}}$-operador de intercambio. Para ello es necesario encontrar $\phi^g(z)(v)$ para $v \in V_{\lambda_1,\mathrm{k}}[0]$ que cumpla que su componente de grado cero es $g(v)$ y es aniquilado por $\mathfrak{g} \otimes t\mathbb{C}[t]$, es decir,

$$\phi^g(z)(v) \in (V_{\lambda_0,\mathrm{k}}\hat{\otimes}V(z))^{\mathfrak{g}\otimes t\mathbb{C}[t]}.$$

El siguiente lema sencillo se encuentra implícito en la demostración de [EFK]

Lema 5.3.3. *Sean M y N dos módulos sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que M posee una descomposición (como espacio vectorial) en suma directa*

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i,$$

donde cada M_i tiene dimensión finita, luego tenemos un isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos

$$\psi : M^*\hat{\otimes}N \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)$$
$$\psi(\sum_{i\in I} \lambda_i \otimes n_i)(m) = \sum_{i\in I} \lambda_i(m)n_i,$$

donde $\lambda_i \in M_i^*$, $n_i \in N$ y M^* denota el dual restringido de M con respecto a la descomposición anterior. Notar que este morfismo está bien definido ya que la suma es finita.

Por el lema anterior y como para cualesquiera módulos M y N sobre $\mathfrak{g}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)^{\mathfrak{g}},$$

tenemos un isomorfismo que llamaremos ψ

$$\psi : (V_{\lambda_0,\mathrm{k}} \hat{\otimes} V(z))^{\mathfrak{g}\otimes t\mathbb{C}[t]} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\otimes t\mathbb{C}[t]}(V^*_{\lambda_0,\mathrm{k}}, V(z)).$$

Además como $V^*_{\lambda_0,\mathrm{k}}$ es un módulo libremente generado por $\mathfrak{g} \otimes t\mathbb{C}[t]$ sobre $V^*_{\lambda_0,\mathrm{k}}[0] = L^*_{\lambda_0}$, luego la restricción

$$\mathrm{res} : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\otimes t\mathbb{C}[t]}(V^*_{\lambda_0,\mathrm{k}}, V(z)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L^*_{\lambda_0,\mathrm{k}}, V)$$

es un isomorfismo. Además por el lema anterior tenemos un isomorfismo

$$\psi' : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L^*_{\lambda_0,\mathrm{k}}, V) \xrightarrow{\simeq} L_{\lambda_0} \hat{\otimes} V.$$

Usando estos tres isomorfismos tenemos que

$$\psi' \circ \mathrm{res} \circ \psi(\phi^g(z)(v)) \in L_{\lambda_0} \hat{\otimes} V.$$

Luego $\phi^g(z)(v)$ está completamente determinado por su grado cero, y lo elegimos tal que $\psi' \circ \mathrm{res} \circ \psi(\phi^g(z)(v)) = g(v)$.

Observación 5.3.4. *De hecho, se puede expresar $\phi^g(z)(v)$ en términos de g empleando todos los isomorfismos. Tomemos $w \otimes v \in L^*_{\lambda_0} \otimes V$, luego*

$$\psi'^{-1}(w \otimes v)(f) = f(w)v,$$

para $f \in L^*_{\lambda_0}$, y

$$\mathrm{res}^{-1} \circ \psi'^{-1}(w \otimes v)(x[n]f) = z^n f(w)xv$$

($n > 0$). Finalmente, si

$$\psi^{-1} \circ \mathrm{res}^{-1} \circ \psi'^{-1}(w \otimes v) = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} w_i \otimes v_i,$$

entonces

$$v_n = z^n xv$$

y

$$x[n]w_n = -w.$$

Observación 5.3.5. *Al elemento $\psi' \circ \mathrm{res} \circ \psi(\phi^g(z)(v))$ lo denominaremos $\phi^g(z)(v)_0$,i.e., la componente en grado cero de $\phi^g(z)(v)$, que se identifica con $\phi^g(z)(v)$ ya que tanto* res *como ψ y ψ' son isomorfismos.*

Para definir la acción de $\phi^g(z)$ en $V_{\lambda_1,\mathrm{k}}$ usamos inducción en el grado y la $\hat{\mathfrak{g}}$-linealidad, i.e.,

$$\phi\, x[n] = (x[n] \otimes 1 + 1 \otimes z^n x)\phi,$$

ya que $V_{\lambda_1,\mathrm{k}}$ es libremente generado por $\mathfrak{g} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ sobre $V^*_{\lambda_1,\mathrm{k}}[0] = L^*_{\lambda_1}$. El teorema queda demostrado.

□

Definimos un **campo primario** como un operador de intercambio (cf. [AY], sección 3.1)

$$\phi : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_0,\mathrm{k}} \hat{\otimes} V(z),$$

que proviene de un morfismo del tipo

$$g : L_{\lambda_1} \to L_{\lambda_0} \otimes V.$$

Más en general, en la definición de campo primario podemos emplear cualquier módulo de peso máximo o de tipo $V_{\lambda,\mathrm{k}}$, cuya componente de grado cero sea L_{λ_i}. Si k es genérico, entonces $V_{\lambda,\mathrm{k}} = L_{\lambda,\mathrm{k}} = M_{\lambda,\mathrm{k}}$, y por el teorema anterior, el campo primario existe.

Definimos un **$\hat{\mathfrak{g}}$-operador de intercambio formal** como un morfismo $\hat{\mathfrak{g}}$-lineal

$$\Phi : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_0} \hat{\otimes} z^{-\Delta} V[z, z^{-1}],$$

donde $\Delta \in \mathbb{C}$ y nuevamente $M_{\lambda_0} \hat{\otimes} z^{-\Delta} V[z, z^{-1}]$ es el producto tensorial completado de los módulos con respecto a la $\mathbb{Z}$-graduación de $M_{\lambda_0,\mathrm{k}}$, es decir,

$$M_{\lambda_0,\mathrm{k}} \hat{\otimes} z^{-\Delta} V[z, z^{-1}] = \prod_{n \geq 0} M_{\lambda_1,\mathrm{k}}[n] \otimes z^{-\Delta} V[z, z^{-1}].$$

Análogamente al caso no formal, en la definición podemos emplear cualquier módulo de peso máximo o un módulo del tipo $V_{\lambda,\mathrm{k}}$.

Empleando el lema anterior con modificaciones mínimas obtenemos

Teorema 5.3.6. *Sea* $\mathrm{k} \in \mathbb{C}$ *y sea*

$$g : L_{\lambda_1} \to L_{\lambda_0} \otimes V,$$

un morfismo $\mathfrak{g}$*-lineal. Si* k *es genérico con respecto a* λ_i *(*$i = 0, 1$*), luego existe un único* $\hat{\mathfrak{g}}$*-operador de intercambio formal*

$$\Phi^g(z) : V_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to V_{\lambda_0,\mathrm{k}} \hat{\otimes} V[z, z^{-1}],$$

tal que la componente de grado cero de $\phi^g(z)(v)$ *es* $g(v)$*, para todo* $v \in V_{\lambda_1,\mathrm{k}}[0] = L_{\lambda_1}$*.*

Definimos un **campo primario formal** como un operador de intercambio formal

$$\Phi : M_{\lambda_2,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_1} \hat{\otimes} z^{-\Delta} V[z, z^{-1}],$$

que proviene de un morfismo del tipo

$$g : L_{\lambda_1} \to L_{\lambda_0} \otimes V.$$

Análogamente al caso no formal, en la definición de campo primario podemos emplear cualquier módulo de peso máximo o de tipo $V_{\lambda,\mathrm{k}}$ cuya componente de grado cero sea L_{λ_i}.

Nuevamente, por el teorema anterior, teniendo en cuenta que si k es genérico, $V_{\lambda,\mathrm{k}} = L_{\lambda,\mathrm{k}}$, el campo primario formal existe dado el morfismo g.

De ahora en adelante vamos a poner $V = V_\mu$, un módulo de peso mínimo $-\mu$, a menos que se diga lo contrario. Además, deseamos remarcar que los enunciados sobre campos primarios con módulos de Verma en la definición, i.e., campos primarios del tipo

$$\Phi : M_{\lambda_2,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_1} \hat{\otimes} V(z),$$

o en el caso formal también, son igualmente válidos en el caso de tomar otros módulos de peso máximo o módulos del tipo $V_{\lambda,\mathrm{k}}$, en lugar de $M_{\lambda,\mathrm{k}}$.

Al espacio de campos primarios que provienen de morfismos de la forma

$$g : L_{\lambda_1} \to L_{\lambda_0} \otimes V_\mu,$$

lo denotaremos $\tilde{H}^{\mu}_{\lambda_0,\lambda_1}$. La dimensión de este espacio es lo que llamamos **reglas de fusión de $\hat{\mathfrak{g}}$**.

Denotaremos $H^{\mu}_{\lambda_0,\lambda_1}$ al espacio de los morfismos $\mathfrak{g}$-lineales

$$g : L_{\lambda_1} \to L_{\lambda_0} \otimes V_\mu.$$

El teorema 5.3.2 reduce el problema de hallar las reglas de fusión (para el caso de k genérico) a calcular la dimensión del espacio $H^{\mu}_{\lambda_0,\lambda_1}$.

Podemos expandir el campo primario formal $\Phi^g(z)$ en una serie formal

$$\Phi^g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi^g[n] z^{-n}$$

donde $\Phi^g[n] : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_0,\mathrm{k}} \otimes V$ es un operador de grado n. Veamos lo primero. Para ello sólo hay que notar que

$$\Phi^g(z)(v)_0 \in L_{\lambda_0} \otimes V \subset L_{\lambda_0} \hat{\otimes} V[z, z^{-1}],$$

para $v \in L_{\lambda_1}$ (ver observaciones 5.3.5 y 5.3.4). Luego, usando la equivariancia de los campos primarios tenemos que $\Phi^g[n] \in L_{\lambda_0} \otimes V$.

Para ver que es de grado n sólo debemos notar que $\Phi^g[n]$ es un operador homógeneo que manda vectores de grado 0 en grado n, pues por la equivariancia la imagen de vectores de grado j es de grado $j+n$. La homogeneidad es inmediata de la observación 5.3.4, de donde también concluimos que $\Phi^g[-n](v)$ es de grado $-n$, ya que $w_n \otimes v_n$ es de grado $-n$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

En general nos interesa el $\hat{\mathfrak{g}}$-operador de intercambio $z^{-\Delta}\Phi^g$ que se expande como

$$\tilde{\Phi}^g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi^g[n] z^{-n-\Delta}.$$

Para que $z^{-\Delta}\Phi^g(z)$ sea $\tilde{\mathfrak{g}}$-lineal tenemos la siguiente proposición (ver [EFK], Prop. 3.2.1, p. 31)

Proposición 5.3.7. *El operador*

$$z^{-\Delta}\Phi^g(z) : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_0,\mathrm{k}} \hat{\otimes} z^{-\Delta} V_\mu[z, z^{-1}]$$

es $\tilde{\mathfrak{g}}$-lineal si y sólo si $\Delta = \Delta(\lambda_1) - \Delta(\lambda_0)$.

Para esta elección de Δ, denotaremos $\tilde{\Phi}^g(z)$ al operador $z^{-\Delta}\Phi^g(z)$.

Si V es un módulo sobre $\mathfrak{g}$, entonces tenemos los isomorfismos evidentes $V(z)^* \simeq V^*(z)$ y $V[z, z^{-1}]^* \simeq V^*[z, z^{-1}]$. Si $v \in V^*$ y $\phi^g(z) : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_0,\mathrm{k}} \hat{\otimes} V_\mu(z)$ es un campo primario, entonces podemos definir sin problemas el operador

$$\phi^g_u(z) : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to \hat{M}_{\lambda_0,\mathrm{k}}$$

dado por

$$w \mapsto (\mathrm{id} \otimes u)(\phi^g(z)(w)).$$

La $\hat{\mathfrak{g}}$-equivariancia implica directamente que

$$[x[n], \phi_u^g(z)] = z^n \phi_u^g(z).$$

A su vez, tenemos que

$$J_+^x(\zeta)u = \sum_{n>0} \zeta^{n-1} x[-n]u = \sum_{n>0} \zeta^{n-1} z^{-n} xu = \frac{xu}{z-\zeta},$$

y

$$J_-^x(\zeta)u = -\sum_{n\leq 0} \zeta^{n-1} x[-n]u = -\sum_{n\leq 0} \zeta^{n-1} z^{-n} xu = \frac{xu}{z-\zeta},$$

donde la primera igualdad tiene sentido para $|\zeta| < |z|$ y la segunda para $|z| < |\zeta|$.

De las igualdades anteriores obtenemos

$$[J_\pm^x(\zeta), \phi_u^g(z)] = \frac{\phi_{xu}^g(z)}{z-\zeta},$$

con las condiciones $|\zeta| < |z|$ para el signo $+$ y $|z| < |\zeta|$ para el signo $-$.

Análogamente, si $\Phi^g(z) : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to M_{\lambda_0,\mathrm{k}} \hat{\otimes} V_\mu(z)[z, z^{-1}]$ es un campo primario formal, entonces podemos definir sin problemas el operador

$$\Phi_u^g(z) : M_{\lambda_1,\mathrm{k}} \to \hat{M}_{\lambda_0,\mathrm{k}}[z, z^{-1}]$$

de la misma manera y obtenemos las mismas relaciones de conmutación que las anteriores para $\Phi_u^g(z)$ en lugar de $\phi_u^g(z)$.

De ahora en adelante los campos siempre se escribirán $\Phi^g(z)$, sin intentar distinguir entre el caso formal y el no formal, ya que tanto el caso formal como el no formal son análogos, y el caso no formal se obtiene del formal aplicando el morfismo de evaluación visto al final de la sección 4.3.

Sea el operador $\hat{\Phi}^g(z)$ dado por $z^{-\Delta(\mu)}\tilde{\Phi}^g(z)$, que escribimos directamente

$$\hat{\Phi}^g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi^g[n] z^{-n-\Delta},$$

para $\Delta = \Delta(\lambda_1) - \Delta(\lambda_0) + \Delta(\mu)$.

Dado $a \in \mathfrak{g}$, definimos el producto ordenado normalmente

$$: J^a(z)\hat{\Phi}_u^g(z) := J_+^a(z)\hat{\Phi}_u^g(z) - \hat{\Phi}_u^g(z) J_-^a(z).$$

Tenemos la siguiente proposición que aparece por primera vez en [FR] (ver [EFK], Thm. 3.2.2, pp. 32–33),

Teorema 5.3.8. *Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Entonces los operadores $\hat{\Phi}^g(z)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$(\mathrm{k} + h^\vee)\frac{d\hat{\Phi}_u^g}{dz}(z) = \sum_{a\in\mathcal{B}} : J^a(z)\hat{\Phi}_{au}^g(z) : .$$

Este resultado se conoce como la **ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov de operadores**.

Observación 5.3.9. *En el teorema anterior la hipótesis de que V_μ sea módulo de peso mínimo es superflua. Sólo es necesario que tenga una descomposición en pesos tal que el Casimir actúe como una constante en cada grado.*

5.4 Funciones de correlación en WZW y sistema de ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov

Sean L_{λ_i} $(0 \leq i \leq N)$ $\mathfrak{g}$-módulos irreducibles de peso máximo y sea V_{μ_i} $(0 \leq i \leq N)$ $\mathfrak{g}$-módulos de peso mínimo $-\mu_i$. Sea $\mathrm{k} \in \mathbb{C}$ genérico con respecto a cada λ_i y sean los morfismos $\mathfrak{g}$-lineales $g_i : L_{\lambda_i} \to L_{\lambda_{i-1}} \otimes V_{\mu_i}$. Por lo tanto, tenemos los campos primarios

$$\hat{\Phi}^{g_i}(z_i) : V_{\lambda_i,\mathrm{k}} \to V_{\lambda_{i-1},\mathrm{k}} \otimes z^{-\Delta_i} V_{\mu_i}[z_i, z_i^{-1}].$$

Definimos entonces el producto

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = (\hat{\Phi}^{g_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}) \dots (\hat{\Phi}^{g_{N-1}} \otimes \mathrm{id})\hat{\Phi}^{g_N} : V_{\lambda_N,\mathrm{k}} \to V_{\lambda_0,\mathrm{k}} \hat{\otimes} z^{-\Delta_1} V_{\mu_1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} z^{-\Delta_N} V_{\mu_N},$$

que tiene sentido como serie formal de potencias en $z_1, \dots, z_N$.

Sea $u_0 \in v_{\lambda_0,\mathrm{k}}[0]^*$ y $u_{N+1} \in v_{\lambda_N,\mathrm{k}}[0]$, luego definimos la **función de correlación**

$$\langle u_0, \Psi(z_1, \dots, z_N) u_{N+1} \rangle \in z_1^{-\Delta_1} \dots z_N^{-\Delta_N} (V_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes V_{\mu_N}) [\![\frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_N}{z_{N-1}}]\!].$$

Sea $V = V_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes V_{\mu_N} \otimes L^*_{\lambda_N}$. Para u_0 fijo, tenemos la siguiente serie de potencias

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \langle u_0, \Psi(z_1, \dots, z_N)(-) \rangle.$$

También, dados $u_i \in V^*_{\mu_i}$ $(i = 1, \dots, N+1)$, definimos la serie de potencias

$$\psi_{u_1,\dots,u_{N+1}}(z_1, \dots, z_N) = \langle u_0, \hat{\Phi}^{g_1}_{u_1}(z_1) \dots \hat{\Phi}^{g_N}_{u_N}(z_N) u_{N+1} \rangle \in z_1^{-\Delta_1} \dots z_N^{-\Delta_N} \mathbb{C} [\![\frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_N}{z_{N-1}}]\!].$$

Dado $x \in \mathfrak{g}$, denotamos x_i la acción de x en el i-ésimo factor del producto tensorial

$$V_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes V_{\mu_N} \otimes L^*_{\lambda_N}.$$

Denotamos del mismo modo $(x \otimes y)_{ij}$ para $x \otimes y \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Tenemos el siguiente teorema que fue probado originalmente en [KZ] (para una demostración ver [EFK], Thm. 3.4.1, pp. 34–36):

Teorema 5.4.1. *Las funciones de correlación $\psi(z_1, \dots, z_N)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$(\mathrm{k} + h^\vee) \frac{\partial \psi}{\partial z_i} = (\sum_{j=1, j \neq i}^{N} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} + \frac{\Omega_{i,N+1}}{z_i}) \psi,$$

donde $i = 1, \dots, N$.

El sistema de ecuaciones anteriores se puede escribir equivalentemente

$$(\mathrm{k} + h^\vee) \frac{\partial \psi}{\partial z_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^{N+1} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} \psi, \tag{5.4.1}$$

para $i = 1, \dots, N+1$.

Para demostrar que los dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, supongamos en principio que $\psi(z_1, \ldots, z_{N+1})$ es solución del sistema anterior. Luego $\psi(z_1, \ldots, z_N, 0)$ satisface el sistema de ecuaciones dado en el teorema. Recíprocamente, si $\psi(z_1, \ldots, z_{N+1})$ es una solución del sistema de ecuaciones dado en el teorema 5.4.1, entonces

$$\psi'(z_1, \ldots, z_{N+1}) = \psi(z_1 - z_{N+1}, \ldots, z_N - z_{N+1})$$

es una solución de la ecuación (5.4.1).

A cualquiera de los dos sistemas equivalentes se lo denomina el **sistema de ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov**.

Observación 5.4.2. *Si $u_0 \in (V_{\lambda_0,\mathrm{k}}[0])^*$ es un vector de peso mínimo con respecto a $\mathfrak{g}$, entonces la función de correlación ψ toma valores en $V^{\mathfrak{n}^-}$, y si $\lambda_0 = 0$, por lo que u_0 es $\mathfrak{g}$-invariante, ψ toma valores en $V^{\mathfrak{g}}$.*

Se puede ver que la hipótesis de que k sea genérico es innecesaria, siempre que reemplacemos los módulos $V_{\lambda,\mathrm{k}}$ por módulos del mismo peso máximo, por ejemplo, $L_{\lambda,\mathrm{k}}$ y los operadores $\Phi^g(z)$ existan.

Observación 5.4.3. *Las funciones de correlación no son solamente series formales de potencias, sino que también tienen sentido como funciones analíticas en la región del espacio complejo dada por $0 < |z_N| < \cdots < |z_1|$ (ver [EFK], sección 3.6).*

De ahora en adelante vamos a denotar los campos $\hat{\Phi}^g(z)$ simplemente de la forma $\Phi(z)$, excepto que sea necesario aclarar.

Deseamos recalcar algunos aspectos de las funciones de correlación para los modelos G-WZW. Las identidades de Ward de la teoría de campos conformes, que dan cuenta de la invariancia global conforme $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, se pueden escribir

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^m (z_i \partial_i + (m+1)\Delta_i) \langle \Phi_1(z_1) \ldots \Phi_n(z_n) \rangle = 0,$$

donde $m = 0, \pm 1$. Por otro lado, la invariancia G-global implica

$$\delta_\omega \langle \Phi_1(z_1) \ldots \Phi_n(z_n) \rangle = 0,$$

donde ω es una constante. De la ecuación (5.1.28), podemos reescribir la igualdad anterior de la forma siguiente

$$\oint dz \sum_a \omega^a \langle J^a(z) \Phi_1(z_1) \ldots \Phi_n(z_n) \rangle = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - z_j} \sum_a \omega^a t_i^a \langle \Phi_1(z_1) \ldots \Phi_n(z_n) \rangle = 0.$$

Como ω es independiente de z, entonces obtenemos las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^a \langle \Phi_1(z_1) \ldots \Phi_n(z_n) \rangle = 0. \tag{5.4.2}$$

Estas identidades fijan la forma de las funciones de 2 y 3 puntos en un modelo G-WZW.

Capítulo 6

Modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW y teoría de cuerdas en AdS_3

Luego de estudiar las teorías de campos conformes y WZW en general, nos abocamos al estudio de la teoría $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW. Nuestra motivación para esto es esencialmente la teoría de cuerdas en AdS_3, como explicamos en la sección siguiente.

Presentamos el modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW, que posee no pocas diferencias con los modelos sobre grupos de Lie compactos. Debido a la no compacidad de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$, la teoría se vuelve mas complicada y nuevas simetrías, que antes eran triviales, deben ser tenidas en cuenta. Ése es el caso del flujo espectral.

Siguiendo a [MO1] y [MO2], describimos el espectro físico del modelo y las funciones de correlación, así como las ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov. Esencialmente, la técnica más usual en la bibliografía para estudiar las funciones de correlación de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW es la continuación analítica de las correspondientes funciones de H_3^+-WZW, estudiadas en [Te1] y [Te2].

6.1 Introducción a la teoría de cuerdas en campos de fondo no triviales

Los modelos sigma no lineales clásicos en dos dimensiones conformemente invariantes se pueden interpretar como teorías de cuerdas propagándose en un espacio de base (en inglés *target*). Si el espacio tiene una dirección temporal y las funciones β del grupo de renormalización correspondientes se anulan, entonces la versión cuántica del modelo sigma es consistente y describe la propagación clásica de cuerdas. El modelo sigma $\mathcal{M} = M_4 \times G_c$, donde M_4 es el espacio de Minkowski de dimensión 4 y G_c es un grupo de Lie compacto simple, es unitario y describe la propagación de cuerdas en $\mathcal{M}$. En el caso de otras variedades de Einstein la teoría se vuelve en extremo complicada, aún en el caso donde $\mathcal{M}$ es un grupo de Lie. El único grupo de Lie con un embedding temporal simple no trivial está dado por $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times G_c$.

El modelo sigma en dos dimensiones más general, invariante de Weyl renormalizable está dado por

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ab}G_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu + \frac{1}{2}\epsilon^{ab}B_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu\right),$$

donde $G_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ son la métrica y un tensor antisimétrico del espacio base respectivamente. La invariancia de Weyl en la hoja de mundo, necesaria para la consistencia de la teoría de cuerdas, no se satisface automáticamente. Para solucionar el problema se agrega a la acción anterior el término

$$S_d = \frac{1}{4\pi}\int d^2\xi\sqrt{\gamma}R^{(2)}\Phi(X),$$

donde $R^{(2)}$ denota el escalar de curvatura de la hoja de mundo y $\Phi(X)$ es el campo del dilatón del espacio de campos de fondo. La invariancia de Weyl se puede escribir como una condición de traza cero para el tensor de energía-momento. Esto implica que las funciones β^{Φ}, β^{G} y β^{B} se anulan. Un cálculo perturbativo de las funciones β a primer orden de la expansión del campo de fondo da lugar a las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de movimiento para el dilatón y el campo $B_{\mu\nu}$.

Para el caso de grupos de Lie, el término de Wess-Zumino en S se interpreta de la siguiente forma: introduce un campo paralelizable de torsión que agrega a la conección riemanniana $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ un término $H^{\mu}_{\nu\rho}$, proveniente de $\partial^{\mu}B_{\nu\rho}$. Esto implica que el nuevo tensor de Riemann es cero. Deseamos recalcar que para todo grupo de Lie existe un campo paralelizable de torsión.

Consideramos entonces una cuerda propagándose en un grupo de Lie G con la acción estándar de WZW, i.e., la acción del modelo sigma no lineal más el término de WZ, junto con las condiciones de contorno para las cuerdas cerradas

$$g(0,\tau) = g(2\pi,\tau),$$

donde τ es la coordenada temporal de la hoja de mundo de la cuerda. Definimos $z = \exp(i(\tau+\sigma))$ y $\bar{z} = \exp(i(\tau-\sigma))$, por lo que la acción tiene una simetría de Kac-Moody no compacta generada por las corrientes derecha e izquierda

$$\begin{aligned} J(z) &= -\frac{\mathrm{k}}{2}\partial_z g g^{-1} \\ \bar{J}(\bar{z}) &= -\frac{\mathrm{k}}{2}\partial_{\bar{z}} g^{-1} g. \end{aligned}$$

Al expandir $J(z)$ en serie de Laurent, vemos que los coeficientes del desarrollo cumplen con las reglas de conmutación del álgebra de Kac-Moody, como en el caso compacto. El tensor de energía-momento está dado por

$$T(z) = \frac{1}{\kappa}g_{ab} : J^a(z)J^b(z) :,$$

donde κ es una constante. Los coeficientes de la serie de Laurent de $T(z)$, que llamamos L_n, son los generadores del álgebra de Virasoro (y lo mismo para $\bar{T}(\bar{z})$ y $\bar{L}_n$). Como los generadores de Virasoro corresponden a una reparametrización de la cuerda, entonces

$$\begin{aligned} L_n|\text{fis}\rangle = \bar{L}_n|\text{fis}\rangle &= 0,\ n\in\mathbb{N}, \\ (L_0-\bar{L}_0)|\text{fis}\rangle &= 0, \\ (L_0+\bar{L}_0-2)|\text{fis}\rangle &= 0, \end{aligned}$$

donde $|\text{fis}\rangle$ pertenece al espacio de Hilbert de estados físicos.

6.2 Modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW y flujo espectral

En esta sección seguiremos más o menos a [MO1]. Estudiaremos el modelo de Wess-Zumino-Witten para el grupo de Lie $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ y presentaremos el concepto de flujo espectral.

Observación 6.2.1. *Usualmente, el modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW tiene como grupo de Lie el cubrimiento universal de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, que se denota $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$, y no $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (aunque en algunas situaciones se emplea como grupo de Lie a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ y no su cubrimiento universal). A pesar de esto, es costumbre entre los físicos escribir aún en esos casos $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW, y no $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$-WZW. Heurísticamente, trabajar con el cubrimiento universal $\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ significa imponer que la coordenada temporal, que en $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ era periódica, sea ahora no acotada. Esto resulta físicamente más satisfactorio, ya que se evitan curvas temporales cerradas.*

Por un lado, podemos parametrizar los elementos de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mediante

$$g = e^{iu\sigma_2}e^{\rho\sigma_3}e^{iv\sigma_2} = \begin{pmatrix} \cos(t)\cosh(\rho)+\cos(\phi)\mathrm{senh}(\rho) & \mathrm{sen}(t)\cosh(\rho)-\mathrm{sen}(\phi)\mathrm{senh}(\rho) \\ -\mathrm{sen}(t)\cosh(\rho)-\mathrm{sen}(\phi)\mathrm{senh}(\rho) & \cos(t)\cosh(\rho)-\cos(\phi)\mathrm{senh}(\rho) \end{pmatrix}, \tag{6.2.1}$$

donde σ_i ($i=1,\dots,3$) son las matrices de Pauli y

$$u = \frac{1}{2}(t+\phi), \qquad v = \frac{1}{2}(t-\phi). \tag{6.2.2}$$

Otra parametrización para $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (vía el isomorfismo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SU}(1,1)$) está dada por

$$g = \begin{pmatrix} x_1+x_1 & x_0-x_2 \\ -x_0-x_2 & x_{-1}-x_1 \end{pmatrix}, \tag{6.2.3}$$

para

$$x_{-1}^2 + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1. \tag{6.2.4}$$

Por otro lado, la métrica de AdS_3 es

$$ds^2 = -dx_{-1}^2 - dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2, \tag{6.2.5}$$

o, expresada en coordenadas (t,ϕ,ρ),

$$ds^2 = -\cosh^2(\rho)dt^2 + d\rho^2 + \mathrm{senh}^2(\rho)d\phi^2. \tag{6.2.6}$$

La acción del modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW está dada por

$$S = \frac{\mathrm{k}}{8\pi\alpha'}\int \mathrm{tr}(g^{-1}\partial g g^{-1}\partial g)\, d^2\sigma + \mathrm{k}\Gamma. \tag{6.2.7}$$

En este caso, como $H_2(\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}),\mathbb{Z}) = 0$ el término de Wess-Zumino está bien definido, pero como $H_3(\tilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}),\mathbb{Z}) = 0$ el nivel k pertenece a $\mathbb{C}$ y no necesariamente a $\mathbb{Z}$.

Definimos las coordenadas derecha e izquierda en la hoja de mundo

$$x^{\pm} = \tau \pm \sigma, \tag{6.2.8}$$

donde $\sigma \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$. A su vez, tenemos las corrientes conservadas (derecha e izquierda)

$$J_R^a(x^+) = \mathrm{k}\,\mathrm{tr}(t^a\partial_+ g g^{-1}), \qquad J_L^a(x^-) = \mathrm{k}\,\mathrm{tr}(t^a g^{-1}\partial_- g), \tag{6.2.9}$$

donde t^a es una base del álgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$. De hecho, elegimos

$$t^3 = -\frac{i}{2}\sigma_2, \qquad t^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_3 + i\sigma_1). \tag{6.2.10}$$

Podemos escribir las corrientes anteriores en términos de las coordenadas (t,ϕ,ρ) como

$$J_R^3 = \mathrm{k}(\partial_+ u + \cosh(2\rho)\partial_+ v), \quad J_R^\pm = \mathrm{k}(\partial_+\rho \pm i\mathrm{senh}(2\rho)\partial_+ v)e^{\mp i2u}, \tag{6.2.11}$$

y

$$J_L^3 = \mathrm{k}(\partial_- v + \cosh(2\rho)\partial_- u), \quad J_L^\pm = \mathrm{k}(\partial_-\rho \pm i\mathrm{senh}(2\rho)\partial_- u)e^{\mp i2v}. \tag{6.2.12}$$

A su vez, los modos cero de $J_{R,L}^3$ están relacionados con la energía E y el momento angular l en AdS_3 de la siguiente manera

$$J_0^3 = \int_0^{2\pi} J_R^3 \frac{dx^+}{2\pi} = \frac{1}{2}(E+l), \quad \bar{J}_0^3 = \int_0^{2\pi} J_L^3 \frac{dx^-}{2\pi} = \frac{1}{2}(E-l). \tag{6.2.13}$$

Como ya vimos, las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la acción WZW son

$$\partial_-(\partial_+ g g^{-1}) = 0, \tag{6.2.14}$$

es decir, las corrientes J_R y J_L son función exclusivamente de x^+ y de x^-, respectivamente. Nuevamente, una solución general está dada por

$$g = g_+(x^+)g_-(x^-). \tag{6.2.15}$$

La condición de cuerdas cerradas bajo $\sigma \mapsto \sigma + 2\pi$ (periodicidad de σ) impone que

$$g_+(x^+ + 2\pi) = g_+(x^+)M, \quad g_-(x^- - 2\pi) = M^{-1}g_-(x^-), \tag{6.2.16}$$

donde M es un elemento del grupo de Lie.

Para cuerdas en $\mathrm{AdS}_3 \times G_c$ debemos imponer los vínculos de Virasoro, es decir,

$$T_{\pm\pm}^{total} = T_{\pm\pm}^{AdS} + T_{\pm\pm}^{otros} = 0, \tag{6.2.17}$$

donde

$$T_{++}^{AdS} = \frac{1}{\mathrm{k}} J_R^a J_R^a \tag{6.2.18}$$

es el tensor de energía-momento para AdS_3 y T_{++}^{otros} es el tensor de energía-momento para el modelo sigma en G_c.

Dada una solución de las ecuaciones de movimiento $\tilde{g} = \tilde{g}_+\tilde{g}_-$, podemos obtener nuevas soluciones de la forma

$$g_+ = e^{\frac{i}{2}w_R x^+ \sigma_2}\tilde{g}_+, \quad g_- = \tilde{g}_- e^{\frac{i}{2}w_L x^- \sigma_2}. \tag{6.2.19}$$

Al comparar con la parametrización dada por la ecuación (6.2.1) para $g = g_+g_-$, vemos que esta operación es equivalente a

$$t \mapsto t + \frac{1}{2}(w_R + w_L)\tau + \frac{1}{2}(w_R - w_L)\sigma,$$
$$\phi \mapsto \phi + \frac{1}{2}(w_R + w_L)\sigma + \frac{1}{2}(w_R - w_L)\tau.$$

La condición de periodicidad en σ implica que $w_R = w_L = w \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, las corrientes cambian de la siguiente manera

$$J_R^3 = \tilde{J}_R^3 + \frac{\mathrm{k}}{2}w, \quad J_R^\pm = \tilde{J}_R^\pm e^{\mp i w x^+}, \tag{6.2.20}$$

y del mismo modo para las corrientes J_L. De la descomposición en modos de las corrientes, podemos escribir

$$J_n^3 = \tilde{J}_n^3 + \frac{\mathrm{k}}{2} w \delta_{n,0}, \qquad J_n^\pm = \tilde{J}_{n\mp w}^\pm. \tag{6.2.21}$$

De aquí vemos inmediatamente cómo es el cambio del tensor de energía-momento:

$$T_{++}^{AdS} = \tilde{T}_{++}^{AdS} - w\tilde{J}^3 - \frac{\mathrm{k}}{4} w^2. \tag{6.2.22}$$

Esta operación es el llamado **flujo espectral**.

En otras palabras, el flujo espectral es un morfismo de álgebras de Lie ϕ_w de $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ en sí misma dado por (si empleamos la notación de la sección 4.4.2)

$$\begin{aligned} h[n] &\mapsto h[n] + cw\delta_{n,0}, \\ e[n] &\mapsto e[n-w], \\ f[n] &\mapsto f[n+w], \\ c &\mapsto c, \end{aligned}$$

como se ve directamente de calcular los corchetes. De hecho, este morfismo es un automorfismo de álgebras de Lie de $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$. Más aún, la flecha $w \mapsto \phi_w$ es un morfismo de grupos de $\mathbb{Z}$ en $\mathrm{Aut}_{Lie}(\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C}))$, y por lo tanto una acción de $\mathbb{Z}$ en $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ por automorfismos de álgebras de Lie. Induce un automorfismo F_w en la categoría de representaciones de $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$. Este funtor es también llamado flujo espectral.

La imagen de una representación de $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ bajo el funtor flujo espectral se denotará con un superíndice w. De este modo, escribiremos $\hat{\mathcal{D}}_j^{\pm,w}$ para las imágenes de las representaciones discretas bajo F_w y $\hat{\mathcal{C}}_j^{\alpha,w}$ para las continuas. De acuerdo con [MO1], estas representaciones deben ser incluidas en el espectro físico, ya que son una simetría del modelo WZW. Siguiendo la interpretación de los mismos autores, llamaremos a w el **número de vueltas** (en inglés *winding number*).

Se puede ver fácilmente que $F_{-1}(\hat{\mathcal{D}}_j^+) = \hat{\mathcal{D}}_{\mathrm{k}/2-j}^-$ y $F_1(\hat{\mathcal{D}}_j^-) = \hat{\mathcal{D}}_{\mathrm{k}/2-j}^+$. Por lo tanto, si tenemos una representación discreta $\hat{\mathcal{D}}_{j'}^\pm$ con $j' > (\mathrm{k}-1)/2$, al aplicar el flujo espectral obtenemos representaciones $\hat{\mathcal{D}}_j^\mp$ con $j < 1/2$. Como habíamos excluido estas representaciones (ver final de subsección 4.4.1), obtenemos la llamada **cota de unitariedad**: $1/2 < j < (\mathrm{k}-1)/2$.

6.3 Espectro de estados físicos

En esta sección presentamos la propuesta de [MO1] para el espectro físico del modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW. Las representaciones que proponen son las siguientes:

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{C}}_{1/2+is,L}^{\alpha,w} \otimes \hat{\mathcal{C}}_{1/2+is,R}^{\alpha,w}, \\ \hat{\mathcal{D}}_{j,L}^{\pm,w} \otimes \hat{\mathcal{D}}_{j,R}^{\pm,w}, \end{gathered}$$

para $1/2 < j < (\mathrm{k}-1)/2$. A su vez, también analizamos los vínculos de Virasoro, necesarios para la teoría de cuerdas.

Sabemos que no todas las representaciones de $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$ son unitarizables, sino que en general puede haber vectores de norma negativa. Para que la teoría sea consistente, debemos imponer los vínculos de Virasoro para eliminar estas posibilidades, es decir, debemos imponer

$$L_n + \mathcal{L}_n - \delta_{n,0} = 0,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{6.3.1}$$

donde L_n es el generador de Virasoro para el modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW y $\mathcal{L}_n$ es el generador de Virasoro para el modelo sigma en la variedad compacta correspondiente a las dimensiones internas de la teoría. El teorema de no existencia de fantasmas dice que las representaciones $\hat{\mathcal{C}}_j^\alpha$ para $j = 1/2 + is$ ($s \in \mathbb{R}$) y $\mathcal{D}_j^\pm$ para $0 < j < \mathrm{k}/2$ no poseen vectores de norma negativa al imponer los vínculos de Virasoro.

La demostración se puede hacer en dos pasos. Primero se puede mostrar que los vínculos de Virasoro se pueden expresar, módulo vectores nulos, como estados en el modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$-WZW que satisfacen

$$J_n^3|\psi\rangle = 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.3.2}$$

donde la igualdad anterior significa que el miembro derecho es el operador cero sobre el espacio de Hilbert dado por el espectro. Esto es cierto para las representaciones $\hat{\mathcal{C}}_{1/2+is}^\alpha$ y $\hat{\mathcal{D}}_j^\pm$ $(0 < j < \mathrm{k}/2)$ si la carga central total del generador de Virasoro $L_n + \mathcal{L}_n$ es 26. Luego, se puede ver que la condición (6.3.2) elimina todos los estados de norma negativa.

Si suponemos $w = 0$, el espectro de la teoría resulta estar dado por

$$(L_0 - 1)|j,m,N,h\rangle = 0, \tag{6.3.3}$$

donde N es el nivel del álgebra de corrientes y h es el peso conforme de la CFT interna. Por lo tanto, obtenemos que

$$-\frac{j(j-1)}{\mathrm{k}-2} + N + h - 1 = 0. \tag{6.3.4}$$

El caso $w \neq 0$ es un poco más complejo. Comencemos analizando las representaciones $\hat{\mathcal{D}}_j^+$.
Por un lado, tenemos que ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
J_{n+w}^+|j,m\rangle &= 0,\\
J_{n-w}^-|j,m\rangle &= 0,\\
J_n^3|j,m\rangle &= 0,\\
J_0^3|j,m\rangle &= \left(\frac{\mathrm{k}}{2}w + m\right)|j,m\rangle.
\end{aligned}$$

Los vínculos de Virasoro resultan ser

$$(L_0 - 1)|j,m\rangle = \left(-\frac{j(j-1)}{\mathrm{k}-2} - wm - \frac{\mathrm{k}}{4}w^2 + N + h - 1\right)|j,m\rangle = 0, \tag{6.3.5}$$

$$L_n|j,m\rangle = (\tilde{L}_n - w\tilde{J}_n^3)|j,m\rangle = 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.3.6}$$

donde h es el peso conforme de la CFT interna y N es el nivel del álgebra de corrientes antes de aplicar flujo espectral.

6.4 Funciones de correlación para $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ y sistema de ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov

En esta sección presentamos las funciones de correlación de 2 y 3 puntos para la teoría $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW.

Para ello, primero repasamos la forma de las funciones de correlación del modelo H_3^+-WZW estudiadas en [Te1] y [Te2]. De acuerdo con [MO2], las funciones de correlación para el modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW (para campos en el sector de flujo espectral $w=0$) se obtienen de las anteriores por continuación analítica en el valor de j.

De acuerdo a [Te2], los campos primarios (normalizables) del modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$ están dados por

$$\Phi_j(x,\bar{x};z,\bar{z}) = \frac{1-2j}{\pi}(e^{-\phi}+|\gamma-x|^2e^{\phi})^{-2j}. \tag{6.4.1}$$

Siguiendo la correspondencia $\mathrm{AdS/CFT}$, interpretamos x como las coordenadas del borde del espacio-tiempo.

A su vez, las corrientes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ actúan de la manera siguiente

$$J^a(z)\Phi_j(x,\bar{x};w,\bar{w}) \sim \frac{D^a}{z-w}\Phi_j(x,\bar{x};w,\bar{w}), \tag{6.4.2}$$

donde $a=\pm$ o $a=3$, y D^a son operadores diferenciales con respecto a x dados por

$$\begin{aligned} D^+ &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ D^3 &= x\frac{\partial}{\partial x}+j, \\ D^- &= x^2\frac{\partial}{\partial x}+2jx. \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Éstos son los operadores diferenciales que dan al espacio de polinomios $\mathbb{C}[x]$ la estructura de dual graduado de un módulo de Verma de peso mínimo $-j$. Si j es genérico, vemos inmediatamente que es un módulo de Verma de peso máximo j.

Las funciones de correlación cumplen, además de las identidades de Ward conformes dadas en la sección 3.2, las identidades de Ward de $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\langle\Phi_{j_1}(z_1,x_1)\ldots\Phi_{j_n}(z_n,x_n)\rangle &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (x_i\partial_{x_i}+j_i)\langle\Phi_{j_1}(z_1,x_1)\ldots\Phi_{j_n}(z_n,x_n)\rangle &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (x_i^2\partial_{x_i}+2x_ij_i)\langle\Phi_{j_1}(z_1,x_1)\ldots\Phi_{j_n}(z_n,x_n)\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

La función de 2 puntos se puede escribir

$$\langle\Phi_j(z_1,\bar{z}_1,x_1,\bar{x}_1)\Phi_{j'}(z_2,\bar{z}_2,x_2,\bar{x}_2)\rangle = \frac{1}{|z_{12}|^{4\Delta(j)}}(\delta^2(x_1-x_2)\delta(j+j'-1)+\frac{\mathcal{B}(j)}{|x_{12}|^{4j}}\delta(j-j')), \tag{6.4.5}$$

donde $x_{12} = x_1 - x_2$, el factor $\mathcal{B}(j)$ está dado por

$$\mathcal{B}(j) = \frac{\mathrm{k}-2}{\pi}\frac{\nu^{1-2j}}{\gamma(\frac{2j-1}{\mathrm{k}-2})}, \tag{6.4.6}$$

y también

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}, \qquad \nu = \pi\frac{\Gamma(\frac{\mathrm{k}-3}{\mathrm{k}-2})}{\Gamma(\frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}-2})}. \tag{6.4.7}$$

Explicaremos rápidamente cómo encontrar la forma funcional de esta expresión, salvo constantes. Veamos sólo la parte holomorfa. Por un lado, la dependencia en z está ya determinada por invariancia conforme (que tiene la teoría debido a la construcción de Sugawara). Sólo debemos encontrar la dependencia en x. Para ello, aplicamos la ecuación (5.4.2) para $a = 3, \pm$.

Para el caso $a = +$, obtenemos que la función de dos puntos $\psi(x_1, x_2)$ en realidad se puede escribir $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1 - x_2)$. Luego, aplicamos la ecuación (5.4.2) para $a = 3$, con lo que al elegir $x = x_1 - x_2$ y $f(x) = \psi(x_1, x_2)$, se puede escribir de la forma

$$xf'(x) + (j + j')f(x) = 0. \tag{6.4.8}$$

Una solución regular de la ecuación anterior es obligatoriamente de la forma

$$f(x) = \frac{A}{x^{j+j'}}. \tag{6.4.9}$$

Al imponer la identidad de Ward para $a = -$, resulta que $j = j'$.

Por otro lado, con una solución singular de tipo $f(x) = C\delta(x)$, la ecuación para $a = 3$ se puede escribir

$$(x\delta(x))' + (j + j' - 1)\delta(x) = 0, \tag{6.4.10}$$

y por lo tanto implica que $j + j' - 1 = 0$. La ecuación (5.4.2) para $a = -$ se cumple trivialmente en este caso.

A su vez, también podemos escribir la forma genérica de la función de 3 puntos

$$\begin{aligned}&\langle\Phi_{j_1}(z_1,\bar z_1,x_1,\bar x_1)\Phi_{j_2}(z_2,\bar z_2,x_2,\bar x_2)\Phi_{j_3}(z_3,\bar z_3,x_3,\bar x_3)\rangle\\ &\qquad = \mathcal{C}(j_1,j_2,j_3)\frac{1}{|z_{12}|^{2(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3)}|z_{23}|^{2(\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1)}|z_{31}|^{2(\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2)}}\\ &\qquad\qquad \frac{1}{|x_{12}|^{2(j_1+j_2-j_3)}|x_{23}|^{2(j_2+j_3-j_1)}|x_{31}|^{2(j_3+j_1-j_2)}}\end{aligned} \tag{6.4.11}$$

donde $x_{ij} = x_i - x_j$, el factor $\mathcal{C}(j_1, j_2, j_3)$ es de la forma

$$\mathcal{C}(j_1,j_2,j_3) = -\frac{G(1-j_1-j_2-j_3)G(j_3-j_1-j_2)G(j_2-j_3-j_1)G(j_1-j_2-j_3)}{2\pi^2\nu^{j_1+j_2+j_3-1}\gamma(\frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}-2})G(-1)G(1-2j_1)G(1-2j_2)G(1-2j_3)}, \tag{6.4.12}$$

y

$$G(j) = (\mathrm{k}-2)^{\frac{j(\mathrm{k}-1-j)}{2(\mathrm{k}-2)}}\Gamma_2(-j|1,\mathrm{k}-2)\Gamma_2(\mathrm{k}-1+j|1,\mathrm{k}-2). \tag{6.4.13}$$

En la fórmula anterior escribimos $\Gamma_2(x|1,\omega)$ para la función doble Gamma de Barnes, que se define de la manera siguiente

$$\log(\Gamma_2(x|1,\omega)) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big(\sum_{n,m\in\mathbb{N}_0}(x+n+m\omega)^{-\epsilon} - \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N}_0\\(n,m)\neq(0,0)}}(n+m\omega)^{-\epsilon}\Big). \tag{6.4.14}$$

Los polos de Γ_2 están dados por $x = -n - m\omega$, $n, m \in \mathbb{N}_0$. La función $G(j)$ tiene polos entonces para $j = n + m(\mathrm{k} - 2)$ o $j = -(n+1) - (m+1)(\mathrm{k} - 2)$ ($n, m \in \mathbb{N}_0$).

La forma de la función de 3 puntos puede encontrarse de manera análoga a como lo hicimos para la función de 2 puntos.

Del mismo modo que para el caso conforme sin simetrías extras, y teniendo en cuenta la ecuación (3.2.9), la función de n puntos para el modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW está dada por

$$\langle \Phi_{j_1}(z_1, \bar{z}_1, x_1, \bar{x}_1) \dots \Phi_{jn}(z_n, \bar{z}_n, x_n, \bar{x}_n) \rangle = \prod_{i<j}^{n} z_{ij}^{\gamma_{ij}} \bar{z}_{ij}^{\gamma_{ij}} x_{ij}^{a_{ij}} \bar{x}_{ij}^{a_{ij}} f(z^1, \bar{z}^1, x^1, \bar{x}^1, \dots, z^l, \bar{z}^l, x^l, \bar{x}^l), \tag{6.4.15}$$

donde $z^1, \dots, z^l$ son las razones anarmónicas (conformes), $x_{ij} = x_i - x_j$, y $x^1, \dots, x^l$ son las razones anarmónicas para las coordenadas x_i ($l = n - 3$).

Del mismo modo que para las coodenadas conformes z_i, la teoría $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW también se descompone en una parte holomorfa y otra antiholomorfa para las coordenadas x, que son simétricas. La mayoría de las veces nos enfocaremos solamente en la parte holomorfa de las coordenadas x, al igual que dijimos para las coordendas conformes, sin que ello cause problema alguno.

Finalmente, deseamos presentar la forma de las ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov para este caso. Se obtienen trivialmente escribiendo la forma del operador de Casimir a partir de los operadores diferenciales anteriores. Resultan

$$(\mathrm{k} - 2)\frac{\partial \psi}{\partial z_i} = \sum_{\substack{1 \le l \le N \\ l \ne i}} \frac{1}{z_i - z_l} \left((x_l - x_i)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} + 2(x_l - x_i) \left(j_l \frac{\partial}{\partial x_i} - j_i \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - 2 j_i j_l \right) \psi, \tag{6.4.16}$$

donde

$$\psi(z_1, x_1, \dots, z_N, x_N) = \langle \Phi_{j_1}(z_1, x_1) \dots \Phi_{j_N}(z_N, x_N) \rangle, \tag{6.4.17}$$

y $1 \le i \le N$.

6.5 Funciones de correlación con campos en el sector de flujo espectral $w = 1$

En esta sección presentaremos las funciones de correlación para campos en el sector flujo espectral 1. Para ello, debemos hacer primero unos comentarios preliminares.

El campo $\Phi_{\mathrm{k}/2}$ es un campo no físico, i.e., no se encuentra dentro del espectro físico del modelo (ver sección 6.3), sin embargo juega un rol importante en la teoría, ya que posee un descendiente nulo: $J^-_{-1}|\mathrm{k}/2, \mathrm{k}/2\rangle$. Este hecho nos permite muchas veces estudiar el modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW de modo similar a como estudiamos las teorías compactas, es decir, explotando las propiedades de los vectores nulos.

Este campo se denomina **operador de flujo espectral**, ya que es posible presentar una expresión para los campos en el sector de flujo espectral $w = 1$ empleando el campo $\Phi_{\mathrm{k}/2}$ de la siguiente forma presente en [MO2], apéndice E: dado un campo Φ_j, el correspondiente flujo espectral con $w = 1$ resulta

$$\Phi^{w=1,j}_{J,\bar{J}}(x,z) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^m \bar{\epsilon}^{\bar{m}} \int_{\mathbb{C}} y^{j-m-1} \bar{y}^{j-\bar{m}-1} \Phi_j(x+y, z+\epsilon) \Phi_{\mathrm{k}/2}(x,z)\, d^2y. \tag{6.5.1}$$

En este punto es importante recordar que, independientemente del estado de partida, la imagen bajo el flujo espectral siempre resulta un estado de peso máximo o mínimo del álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, con

$$J = m + \mathrm{k}/2. \tag{6.5.2}$$

El hecho de que el campo anteriormente definido coincida con el obtenido al aplicar el flujo espectral con $w=1$ se deduce directamente de calcular los OPEs de éste con las corrientes de $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{R})$(ver [MO2], E.1, p. 78). Asimismo, es fácil ver que el peso conforme del campo $\Phi^{w,j}_{J,\bar{J}}$ es

$$\Delta^w(j,J) = \Delta(j) - wm - \frac{\mathrm{k}}{4}w^2 = \Delta(j) - wJ + \frac{\mathrm{k}}{4}w^2. \tag{6.5.3}$$

Muchas veces vamos a escribir simplemente Δ^w en lugar de $\Delta^w(j,J)$, y también $\bar{\Delta}^w$ en lugar de $\Delta^w(j,\bar{J})$.

Si suponemos que uno de los campos dentro del correlador es un operador de flujo espectral, i.e., un campo del tipo $\Phi_{\mathrm{k}/2}(x,z)$, entonces podemos escribir

$$\psi(z_1,x_1,\ldots,z_N,x_N) = \langle \Phi_{\mathrm{k}/2}(z_1,x_1)\Phi_{j_2}(z_2,x_2)\ldots\Phi_{j_N}(z_N,x_N)\rangle. \tag{6.5.4}$$

Como $J^-_{-1}|\mathrm{k}/2,\mathrm{k}/2\rangle = 0$, al escribir J^-_{-1} como operador diferencial obtenemos la siguiente **ecuación del vector nulo** para la función de correlación

$$\sum_{i=2}^{N} \frac{x_i - x_1}{z_1 - z_n}((x_i - x_1)\frac{\partial}{\partial x_i} + 2j_i))\psi(z_1,x_1,\ldots,z_N,x_N) = 0. \tag{6.5.5}$$

Empleando esta ecuación, vemos fácilmente que la ecuación de Knizhnik-Zamolodchikov para z_1 es equivalente a la ecuación

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_1} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{z_1 - z_i}((x_i - x_1)\frac{\partial}{\partial x_i} + j_i)\psi. \tag{6.5.6}$$

Maldacena y Ooguri calcularon las funciones de 2 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral w no necesariamente 1 en [MO2] (ver ecuación (5.13))

$$\begin{aligned}&\langle \Phi^{w,j}_{J,\bar{J}}(z_1,\bar{z}_1,x_1,\bar{x}_1)\Phi^{w,j'}_{J,\bar{J}}(z_2,\bar{z}_2,x_2,\bar{x}_2)\rangle \\ &= \frac{1}{z_{12}^{2\Delta^w(j,J)}\bar{z}_{12}^{2\Delta^w(j,\bar{J})}}\frac{1}{x_{12}^{2J}\bar{x}_{12}^{2\bar{J}}}\left(\delta(j+j'-1) + \delta(j-j')\frac{\pi\,\mathcal{B}(j)\,\Gamma(j+m)\,\Gamma(j-\bar{m})}{\gamma(2j)\,\Gamma(1-j+m)\,\Gamma(1-j-\bar{m})}\right),\end{aligned} \tag{6.5.7}$$

donde el factor $\mathcal{B}(j)$ está dado por la ecuación (6.4.6).

A su vez, también hallaron la función de 3 puntos con un campo en el sector de flujo espectral $w=1$ (ver ecuaciones (5.34) y (5.38))

$$\begin{aligned}&\langle \Phi^{w=1,j_1}_{J_1,\bar{J}_1}(z_1,\bar{z}_1,x_1,\bar{x}_1)\Phi_{j_2}(z_2,\bar{z}_2,x_2,\bar{x}_2)\Phi_{j_3}(z_3,\bar{z}_3,x_3,\bar{x}_3)\rangle \\ &= \mathcal{B}(j_1)\mathcal{C}(\frac{\mathrm{k}}{2} - j_1, j_2, j_3)\frac{\Gamma(j_2+j_3-J_1)\,\Gamma(j_1+J_1-\mathrm{k})}{\Gamma(1+\bar{J}_1-j_2-j_3)\,\Gamma(1-j_1-\bar{J}_1-\frac{\mathrm{k}}{2})\,\gamma(j_2+j_3+j_1-\frac{\mathrm{k}}{2})} \\ &\quad \frac{1}{z_{12}^{\Delta^{w=1}(j_1,J_1)+\Delta(j_2)-\Delta(j_3)}z_{23}^{\Delta(j_2)+\Delta(j_3)-\Delta^{w=1}(j_1,J_1)}z_{13}^{\Delta^{w=1}(j_1,J_1)+\Delta(j_3)-\Delta(j_2)}} \\ &\quad \frac{1}{\bar{z}_{12}^{\Delta^{w=1}(j_1,\bar{J}_1)+\Delta(j_2)-\Delta(j_3)}\bar{z}_{23}^{\Delta(j_2)+\Delta(j_3)-\bar{J}_1}\bar{z}_{13}^{\Delta^{w=1}(j_1,\bar{J}_1)+\Delta(j_3)-\Delta(j_2)}} \\ &\quad \frac{1}{x_{12}^{J_1+j_2-j_3}x_{23}^{j_2+j_3-J_1}x_{13}^{J_1+j_3-j_2}\bar{x}_{12}^{\bar{J}_1+j_2-j_3}\bar{x}_{23}^{j_2+j_3-\bar{J}_1}\bar{x}_{13}^{\bar{J}_1+j_3-j_2}},\end{aligned} \tag{6.5.8}$$

donde $\mathcal{C}(j_1, j_2, j_3)$ está definido en la ecuación (6.4.12).

El correlador anterior se obtiene esencialmente de hallar la función de cuatro puntos con un operador de flujo espectral y aplicar la fórmula (6.5.1).

Capítulo 7

Cálculos de funciones de correlación

En este capítulo presentamos los resultados originales de la tesis. Calculamos la función de correlación de tres campos donde uno de ellos corresponde al operador de flujo espectral en $\mathrm{k}/2$ al estilo [AY]. Nuestros resultados concuerdan con [MO2].

Por otro lado, también calculamos la función de 5 puntos con dos operadores de flujo espectral y tres campos de momentos cualesquiera en el sector de flujo espectral $w = 0$. A partir de ésta hallamos la función de 4 puntos, que incluye un operador de flujo espectral y un campo en el sector de flujo espectral $w = 1$. Aplicando otra vez la operación de flujo espectral encontramos la función de 3 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$.

7.1 Funciones de 3 puntos con un operador de flujo espectral

En esta sección vamos a presentar un método alternativo para obtener la función de correlación de tres campos donde uno de ellos corresponde al operador de flujo espectral en $\mathrm{k}/2$. Para ello, necesitamos el siguiente teorema, que se encuentra en [FFM], Thm. 3.2, (también está en [AY], Thm. 1, aunque con un error)

Teorema 7.1.1. *Sea $t = 2 - \mathrm{k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y sea j el peso máximo, de la forma $2j_{r,s} - 1 = -r + st$, con $r, s \in \mathbb{Z}$, tales que*

1. $0 < r$, $0 \leq s$,
2. $r < 0$, $s < 0$.

Luego existe un vector nulo $|\chi_{r,s}\rangle \in M_{j,\mathrm{k}}$ dado por

1. *Si* $0 < r$, $0 \leq s$,

$$|\chi_{r,s}\rangle = (J_0^-)^{r+st}(J_{-1}^+)^{r+(s-1)t}(J_0^-)^{r+(s-2)t}(J_{-1}^+)^{r+(s-3)t}\dots(J_{-1}^+)^{r-(s-1)t}(J_0^-)^{r-st}|j_{r,s}\rangle,$$

2. *Si* $r < 0$, $s < 0$

$$|\chi_{r,s}\rangle = (J_{-1}^+)^{-r-(s+1)t}(J_0^-)^{-r-(s+2)t}(J_{-1}^+)^{-r-(s+3)t}\dots(J_0^-)^{-r+(s+2)t}(J_{-1}^+)^{-r+(s+1)t}|j_{r,s}\rangle,$$

donde las fórmulas anteriores tienen sentido de acuerdo con la fórmula (4) de [FFM].

Observación 7.1.2. *De acuerdo con [AY], tenemos los siguientes casos*

1. *Si $j-1 \neq -r+st$, entonces el módulo de Verma $M_{j,\mathrm{k}}$ no tiene vectores nulos y es, por lo tanto, irreducible.*

2. *Si $2j-1=-r+st$ y $t \in \mathbb{Q}$, entonces el módulo de Verma $M_{j,\mathrm{k}}$ es tal que $I_{j,\mathrm{k}}$ está generado por un sólo vector nulo.*

3. *Si $2j-1 \neq -r+st$ y $t \notin \mathbb{Q}$, entonces el módulo de Verma $M_{j,\mathrm{k}}$ es tal que $I_{j,\mathrm{k}}$ está generado por dos vectores nulos.*

Como remarcaron [AY], por invariancia $\hat{\mathfrak{sl}}(2,\mathbb{C})$, tenemos que

$$\langle j_3|\Phi_{j_2}(x,z)|j_1\rangle = C_{123}x^{-j_1-j_2+j_3}z^{-\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}. \tag{7.1.1}$$

Observación 7.1.3. *La expresión anterior es esencialmente una función de 3 puntos para tres campos Φ_{j_1}, Φ_{j_2} y Φ_{j_3} donde elegimos el argumento de Φ_{j_3} igual a infinito y el argumento de Φ_{j_1} igual a cero. (ver [DMS], p. 152).*

Veamos esto un poco más en detalle. La dependencia en z se obtiene de la invariancia conforme, como vimos en la subsección 3.2. Para obtener la dependencia en x hay que tener en cuenta el hecho siguiente:

$$[J^3, \Phi_j(z,x)] = (x\frac{d}{dx}+j)\Phi_j(z,x). \tag{7.1.2}$$

Luego, de

$$\langle j_3|J_0^3\Phi_{j_2}(x,z)|j_1\rangle = \langle j_3|[J_0^3,\Phi_{j_2}(x,z)]|j_1\rangle + \langle j_3|\Phi_{j_2}(x,z)J_0^3|j_1\rangle, \tag{7.1.3}$$

obtenemos

$$j_3\langle j_3|\Phi_{j_2}(x,z)|j_1\rangle = (x\frac{d}{dx}+j_2)\langle j_3|\Phi_{j_2}(x,z)|j_1\rangle + j_1\langle j_3|\Phi_{j_2}(x,z)|j_1\rangle, \tag{7.1.4}$$

y resulta

$$\langle j_3|\Phi_{j_2}(x,z)|j_1\rangle = C_{123}x^{-j_1-j_2+j_3}z^{-\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}. \tag{7.1.5}$$

Deseamos remarcar que la dependencia en z se puede obtener con el mismo procedimiento, empleando el operador L_0 en lugar de J_0^3.

Si j_1 es tal que $2j_1-1=-r+st$, definimos $f_{r,s}(j_1,j_2,j_3)$ de la siguiente manera

$$\langle j_3|\Phi_{j_2}(x,z)|\chi_{r,s}\rangle = C_{123}f_{r,s}(j_1,j_2,j_3)x^{-j_1-j_2+j_3-r}z^{-\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-rs}. \tag{7.1.6}$$

Notar que $C_{123}f_{r,s}(j_1,j_2,j_3) = \mathcal{C}(j_1,j_2,j_3)$.

La siguiente proposición fue demostrada por Awata y Yamada (ver [AY], Prop. 2):

Teorema 7.1.4. 1. *Si $0<r$, $0\leq s$,*

$$f_{r,s}(j_1,j_2,j_3) = \prod_{n=0}^{r-1}\prod_{m=0}^{s}(-j_1-j_2+j_3-n+mt)\prod_{n=1}^{r}\prod_{m=1}^{s}(j_1-j_2-j_3+n-mt),$$

2. *Si $r<0$, $s<0$*

$$f_{r,s}(j_1,j_2,j_3) = \prod_{n=0}^{-r-1}\prod_{m=0}^{-s-1}(j_1-j_2-j_3-n+mt)\prod_{n=1}^{-r}\prod_{m=1}^{-s-1}(-j_1-j_2+j_3+n-mt).$$

Observación 7.1.5. *Como es usual, los productos indexados sobre un conjunto vacío se consideran igual a* 1*. En el teorema anterior, resultan los siguientes casos*

1. *Si* $s = 0$,
$$f_{r,s}(j_1, j_2, j_3) = \prod_{n=0}^{r-1}(-j_1 - j_2 + j_3 - n),$$

2. *Si* $s = -1$
$$f_{r,s}(j_1, j_2, j_3) = \prod_{n=0}^{-r-1}(j_1 - j_2 - j_3 - n).$$

La condición de desacoplamiento de los vectores nulos (que por la proposición 5 de [AY], es equivalente a la existencia del OPE) implica que $f_{r,s}(j_1, j_2, j_3) = 0$. De la igualdad anterior obtenemos las reglas de fusión:

1. Si $0 < r$, $0 \leq s$, $j_3 = j_1 + j_2 + n - mt$ $(0 \leq n \leq r-1, 0 \leq m \leq s)$ o $j_3 = j_1 - j_2 + n - mt$ $(1 \leq n \leq r, 1 \leq m \leq s)$.

2. Si $r < 0$, $s < 0$, $j_3 = j_1 - j_2 - n + mt$ $(0 \leq n \leq -r-1, 0 \leq m \leq -s-1)$ o $j_3 = j_1 + j_2 - n + mt$ $(1 \leq n \leq -r, 1 \leq m \leq -s-1)$.

Por lo tanto, si tenemos que $j_1 = \mathrm{k}/2$ $(r = -1, s = -1)$ nos encontramos en el caso 2 del teorema 7.1.1. En ese caso vemos que $j_3 = j_1 + j_2 - n + mt$ no es posible, ya que la desigualdad $1 \leq m \leq 0$ y vemos trivialmente que los únicos valores de j_3 posibles que cumplen con lo anterior son de la forma (ver observación 7.1.5)

$$j_2 + j_3 - \frac{\mathrm{k}}{2} = 0. \tag{7.1.7}$$

Ésta es la condición encontrada por [MO2], fórmula (2.12), p. 12.

7.2 Funciones de 5 puntos con dos operadores de flujo espectral

En esta sección presentamos una deducción de la función de correlación de 5 puntos con dos operadores de flujo espectral y tres operadores de momentos cualesquiera en el sector de flujo espectral $w = 0$, que aparece de forma incompleta en las notas [FZZ]. De ésta, aplicando el procedimiento presentado en la sección 6.2 para el flujo espectral en la base x (ver ecuación (6.5.1)), obtendremos en la sección siguiente la función de 4 puntos que contiene un operador de flujo espectral y otro en el sector de flujo espectral $w = 1$. A su vez, también hallaremos la función de 3 puntos para dos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$.

La función de 5 puntos que vamos a calcular es de la forma

$$A_5(z_1, x_1, \ldots, z_5, x_5) = \langle \Phi_{\mathrm{k}/2}(z_1, x_1)\Phi_{\mathrm{k}/2}(z_2, x_2)\Phi_{j_1}(z_3, x_3)\Phi_{j_2}(z_4, x_4)\Phi_{j_3}(z_5, x_5)\rangle. \tag{7.2.1}$$

Para ello proponemos que la función de correlación sea de la forma dada por la ecuación (6.4.15)

$$\langle \Phi_1(z_1, x_1) \ldots \Phi_n(z_5, x_5)\rangle = \prod_{i<j}^{5} z_{ij}^{\gamma_{ij}} x_{ij}^{a_{ij}} f(z, w, x, y), \tag{7.2.2}$$

donde z, w son las razones anarmónicas (conformes) dadas por

$$z = \frac{z_{13}z_{45}}{z_{15}z_{43}}, \qquad w = \frac{z_{23}z_{45}}{z_{25}z_{43}}, \tag{7.2.3}$$

y x, y son las razones anarmónicas dadas por

$$x = \frac{x_{13}x_{45}}{x_{15}x_{43}}, \qquad y = \frac{x_{23}x_{45}}{x_{25}x_{43}}. \tag{7.2.4}$$

Las identidades de Ward (conformes) implican las siguientes igualdades, como se ve de manera directa,

$$\begin{aligned} \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{15} &= \frac{\mathrm{k}}{2}, \\ \gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{24} + \gamma_{25} &= \frac{\mathrm{k}}{2}, \\ \gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{34} + \gamma_{35} &= -2\Delta_1, \\ \gamma_{14} + \gamma_{24} + \gamma_{34} + \gamma_{45} &= -2\Delta_2, \\ \gamma_{15} + \gamma_{25} + \gamma_{35} + \gamma_{45} &= -2\Delta_3, \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

mientras que las identidades de Ward para la base x implican

$$\begin{aligned} a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} &= -\mathrm{k}, \\ a_{12} + a_{23} + a_{24} + a_{25} &= -\mathrm{k}, \\ a_{13} + a_{23} + a_{34} + a_{35} &= -2j_1, \\ a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{45} &= -2j_2, \\ a_{15} + a_{25} + a_{35} + a_{45} &= -2j_3. \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Además, si definimos

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{x_{14}x_{25}}{z_{14}z_{25}} - \frac{x_{24}x_{15}}{z_{24}z_{15}}, \\ \mu_2 &= \frac{x_{15}x_{23}}{z_{15}z_{23}} - \frac{x_{13}x_{25}}{z_{13}z_{25}}, \\ \mu_3 &= \frac{x_{13}x_{24}}{z_{13}z_{24}} - \frac{x_{23}x_{14}}{z_{23}z_{14}}, \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

entonces resulta

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{x_{14}x_{25}}{z_{14}z_{25}}\tilde{\mu}_1, \\ \mu_2 &= \frac{x_{15}x_{23}}{z_{15}z_{23}}\tilde{\mu}_2, \\ \mu_3 &= \frac{x_{13}x_{24}}{z_{13}z_{24}}\tilde{\mu}_3, \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 &= 1 - \frac{(1-y)(1-z)}{(1-x)(1-w)}, \\ \tilde{\mu}_2 &= 1 - \frac{xw}{yz}, \\ \tilde{\mu}_3 &= 1 - \frac{x(1-y)w(1-z)}{y(1-x)z(1-w)}. \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

Siguiendo la prescripción de [FZZ], proponemos que la función f sea de la forma:

$$f(z,w,x,y) = C_5(j_1,j_2,j_3)\tilde{\mu}_1^{j_1-j_2-j_3}\tilde{\mu}_2^{j_2-j_1-j_3}\tilde{\mu}_3^{j_3-j_1-j_2}, \tag{7.2.10}$$

donde la constante $C_5(j_1,j_2,j_3)$ está dada por

$$C_5(j_1,j_2,j_3) = \mathcal{B}(j_1)\mathcal{B}(j_2)\mathcal{C}(\mathrm{k}/2-j_1,\mathrm{k}/2-j_2,j_3). \tag{7.2.11}$$

Veamos rápidamente cómo obtener este coeficiente. Comenzamos con la expresión formal del OPE propuesta en [Te1]

$$\Phi_{j_1}(z_1,x_1)\Phi_{j_2}(z_2,x_2) \sim \int Q(j_1,j_2,j)\Phi_j(z_2,x_2)\,dj. \tag{7.2.12}$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por otro campo de la forma Φ_{j_3}, y tenemos en cuenta que la función de 2 puntos dada por la ecuación (6.4.5) contiene $\delta(j-j_3)$ y $\delta(j+j_3-1)$, luego

$$Q(j_1,j_2,j_3) \sim \frac{\mathcal{C}(j_1,j_2,j_3)}{\mathcal{B}(j_3)}. \tag{7.2.13}$$

Generalizando este procedimiento es posible mostrar que

$$\begin{aligned}&\langle\Phi_{j_1}(z_1,x_1)\Phi_{j_2}(z_2,x_2)\Phi_{j_3}(z_3,x_3)\Phi_{j_4}(z_4,x_4)\Phi_{j_5}(z_5,x_5)\rangle\\ &\qquad\sim \int\int Q(j_1,j_2,j)Q(j_3,j_4,j')\langle\Phi_j(z_2,x_2)\Phi_{j'}(z_4,x_4)\Phi_{j_5}(z_5,x_5)\rangle\,dj\,dj'.\end{aligned} \tag{7.2.14}$$

Para $j_2=j_4=\mathrm{k}/2$, usando el resultado (7.1.7) obtenido en la sección anterior, podemos calcular la integral anterior, de donde obtenemos

$$\langle\Phi_{j_1}(z_1,x_1)\Phi_{\mathrm{k}/2}(z_2,x_2)\Phi_{j_3}(z_3,x_3)\Phi_{\mathrm{k}/2}(z_4,x_4)\Phi_{j_5}(z_5,x_5)\rangle \sim \mathcal{B}(j_1)\mathcal{B}(j_3)\mathcal{C}(\mathrm{k}/2-j_1,\mathrm{k}/2-j_3,j_5), \tag{7.2.15}$$

que es equivalente a la ecuación (7.2.11), ya que

$$\mathcal{B}(j_1)\mathcal{B}(j_3)\mathcal{C}(\mathrm{k}/2-j_1,\mathrm{k}/2-j_3,j_5) \sim \mathcal{C}(j_1,j_3,j_5), \tag{7.2.16}$$

(para más detalles, ver [HMN], Apéndice A, pp. 27–28).

Luego, el sistema formado por las dos ecuaciones del vector nulo para (z_1,x_1) y (z_2,x_2) (ver ecuación (6.5.5)) y las identidades de Ward determinan completamente la dependencia x_{ij} de la función de cinco puntos, que se puede escribir de la forma

$$x_{12}^{j_1+j_2+j_3-\mathrm{k}}\mu_1^{j_1-j_2-j_3}\mu_2^{j_2-j_1-j_3}\mu_3^{j_3-j_1-j_2}. \tag{7.2.17}$$

Para determinar la dependencia en z_{ij} faltante no es suficiente el sistema formado por las identidades de Ward conformes. Es necesario también emplear las dos ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov reducidas en (z_1,x_1) y (z_2,x_2) (ver ecuación (6.5.6)). Del sistema conjunto de ecuaciones determinamos la dependencia en z_{ij}.

Finalmente la función de 5 puntos resulta de la forma (escribiendo también la parte antiholomorfa)

$$\begin{aligned}A_5(z_1,x_1,\ldots,z_5,x_5) = {}& C_5(j_1,j_2,j_3)|x_{12}|^{2(j_1+j_2+j_3-\mathrm{k})}|\mu_1|^{2(j_1-j_2-j_3)}|\mu_2|^{2(j_2-j_1-j_3)}|\mu_3|^{2(j_3-j_1-j_2)}\\ &|z_{12}|^{\mathrm{k}}|z_{13}|^{-2j_1}|z_{14}|^{-2j_2}|z_{15}|^{-2j_3}|z_{23}|^{-2j_1}|z_{24}|^{-2j_2}|z_{25}|^{-2j_3}\\ &|z_{34}|^{2(\Delta_3-\Delta_1-\Delta_2)}|z_{35}|^{2(\Delta_2-\Delta_1-\Delta_3)}|z_{45}|^{2(\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3)}.\end{aligned} \tag{7.2.18}$$

Trivialmente vemos que si suponemos $j_3=0$ en la ecuación anterior, obtenemos la expresión para la función de cuatro puntos con dos operadores de flujo espectral hallada en [MO2], ec. (5.25), p. 58, eligiendo en la notación de dicho trabajo $j_1=j_2=\mathrm{k}/2$.

7.3 Funciones de 4 puntos con un operador de flujo espectral y un campo en el sector de flujo espectral $w = 1$

A partir de la función de 5 puntos con dos operadores de flujo espectral, y empleando la definición alternativa de flujo espectral dada por la ecuación (6.5.1), podemos hallar la función de correlación con un operador de flujo espectral y un campo en el sector de flujo espectral $w = 1$. En otras palabras debemos encontrar

$$A_4^{w=1}(z_1, x_1, z_2, x_2, z_4, x_4, z_5, x_5) = \langle \Phi_{\mathrm{k}/2}(z_1, x_1)\Phi^{w=1,j_1}_{J_1,\bar{J}_1}(z_2, x_2)\Phi_{j_2}(z_4, x_4)\Phi_{j_3}(z_5, x_5)\rangle. \tag{7.3.1}$$

Vamos a calcular este correlador en dos pasos. En primer lugar, tenemos que calcular una integral para realizar la operación de flujo espectral. Luego, debemos obtener el límite de la expresión resultante al hacer tender el parámetro ϵ a cero. Empezaremos entonces escribiendo explícitamente la definición, que es de la forma

$$\begin{aligned}
&A_4^{w=1}(z_1, x_1, z_2, x_2, z_4, x_4, z_5, x_5)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{m_1}\bar{\epsilon}^{\bar{m}_1} \int_{\mathbb{C}} t^{j_1-m_1-1}\bar{t}^{j_1-\bar{m}_1-1} A_5(z_1, x_1, z_2, x_2, z_2+\epsilon, x_2+t, z_4, x_4, z_5, x_5)\, d^2t\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} C_5(j_1, j_2, j_3)\epsilon^{m_1}\bar{\epsilon}^{\bar{m}_1} z'|x_{12}|^{2(j_1+j_2+j_3-\mathrm{k})}|\mu_1|^{2(j_1-j_2-j_3)}\\
&\quad \int_{\mathbb{C}} t^{j_1-m_1-1}\bar{t}^{j_1-\bar{m}_1-1}|\mu_2|^{2(j_2-j_1-j_3)}|\mu_3|^{2(j_3-j_1-j_2)}\, d^2t,
\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

donde z' indica el producto de las potencias restantes de $|z_{ij}|$.

El cálculo de la integral es bastante engorroso y no lo deduciremos aquí. En lugar de eso, presentamos el siguiente resultado, que se puede hallar directamente de hacer cambio de variables de la expresión que se encuentra en [GN], ec. (4)–(11), pp. 11–16,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} t^p\bar{t}^{\bar{p}}|at+b|^{2q}|ct+d|^{2r}d^2t\\
&= 2i(-1)^{p+\bar{p}}\pi\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(-\bar{p}-q-1)}{\Gamma(-\bar{p})\Gamma(-q)\Gamma(p+q+2)}\frac{|d|^{2r}b^{p+q+1}\bar{b}^{\bar{p}+q+1}}{a^{p+1}\bar{a}^{\bar{p}+1}}\\
&\Big[{}_2F_1(-r, 1+p, 2+p+q; \frac{cb}{ad}){}_2\bar{F}_1(-r, 1+\bar{p}, 2+\bar{p}+q; \frac{\bar{c}\bar{b}}{\bar{a}\bar{d}}) + \lambda\Big(\frac{cb}{ad}\Big)^{-1-p-q}\Big(\frac{\bar{c}\bar{b}}{\bar{a}\bar{d}}\Big)^{-1-\bar{p}-q}\\
&\ {}_2F_1(-q, -1-p-q-r, -p-q; \frac{cb}{ad}){}_2\bar{F}_1(-q, -1-\bar{p}-q-r, -\bar{p}-q; \frac{\bar{c}\bar{b}}{\bar{a}\bar{d}})\Big],
\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

donde

$$\lambda = \frac{\Gamma(p+q+2)\Gamma(-q-\bar{p}-r-1)\gamma(-q)\Gamma(-\bar{p})\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(-q-\bar{p})\Gamma(-q-\bar{p}-1)\gamma(-r)\Gamma(p+1)\Gamma(p+q+r+2)}. \tag{7.3.4}$$

Deseamos hacer notar que la ecuación anterior es una generalización de la fórmula (C.3) de [MO2], p. 71, en el caso $p = \bar{p}$ (aunque en esa ecuación falta un factor $2i$, al igual que en la ecuación (C.6)). Esto nos permite encontrar la expresión general, aún en el caso $p \neq \bar{p}$.

Si empleamos la identidad previa en nuestro caso particular podemos hallar la integral general que aparece más arriba. Deseamos remarcar que no estamos suponiendo necesariamente el caso $m_1 = \bar{m}_1$. De manera directa, obtenemos que los exponentes de ϵ y $\bar{\epsilon}$ se cancelan, y por lo tanto el límite se puede calcular trivialmente. Teniendo en cuenta esto, fácilmente vemos que

$$
\begin{aligned}
&A_4^{w=1}(z_1, x_1, \ldots, z_5, x_5) \\
&= 2i(-1)^{m_1+\bar{m}_1}\pi C_5(j_1,j_2,j_3)\frac{\Gamma(j_1 - J_1 + \mathrm{k}/2)\Gamma(j_2 - j_1 - j_3 + 1)\Gamma(j_3 - j_2 + \bar{J}_1 - \mathrm{k}/2)}{\Gamma(1 + \bar{J}_1 - \mathrm{k}/2 - j_1)\Gamma(j_1 + j_3 - j_2)\Gamma(j_2 - j_3 - J_1 + \mathrm{k}/2 + 1)} \\
&\quad x_{12}^{j_2+j_3-J_1-\mathrm{k}/2}\bar{x}_{12}^{j_2+j_3-\bar{J}_1-\mathrm{k}/2}x_{15}^{J_1-\mathrm{k}/2-j_2-j_3}\bar{x}_{15}^{\bar{J}_1-\mathrm{k}/2-j_2-j_3}|x_{24}|^{-4j_2}x_{25}^{j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2}\bar{x}_{25}^{j_2-j_3-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2} \\
&\quad |z_{15}|^{\mathrm{k}}z_{24}^{\Delta_3-\Delta_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_{\mathrm{k}/2}}\bar{z}_{24}^{\Delta_3-\bar{\Delta}_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_{\mathrm{k}/2}}z_{25}^{\Delta_2-\Delta_3-\Delta_1^{w=1}+\Delta_{\mathrm{k}/2}}\bar{z}_{25}^{\Delta_2-\Delta_3-\bar{\Delta}_1^{w=1}+\Delta_{\mathrm{k}/2}} \\
&\quad z_{45}^{\Delta_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_3+\Delta_{\mathrm{k}/2}}\bar{z}_{45}^{\bar{\Delta}_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_3+\Delta_{\mathrm{k}/2}}z^{J_1}\bar{z}^{\bar{J}_1}|1-z|^{-2j_2}|1-u|^{2(j_1-j_2-j_3)} \\
&\quad \Big[{}_2F_1(j_1 + j_2 - j_3, j_1 - J_1 + \mathrm{k}/2, j_2 - j_3 - J_1 + \mathrm{k}/2 + 1; u) \\
&\quad {}_2\bar{F}_1(j_1 + j_2 - j_3, j_1 - \bar{J}_1 + \mathrm{k}/2, j_2 - j_3 - \bar{J}_1 + \mathrm{k}/2 + 1; \bar{u}) \\
&+ \lambda u^{j_3+J_1-j_2-\mathrm{k}/2}\bar{u}^{j_3+\bar{J}_1-j_2-\mathrm{k}/2}{}_2F_1(j_1 + j_3 - j_2, j_1 + J_1 - \mathrm{k}/2, j_3 - j_2 + J_1 - \mathrm{k}/2 + 1; u) \\
&\quad {}_2\bar{F}_1(j_1 + j_3 - j_2, j_1 + \bar{J}_1 - \mathrm{k}/2, j_3 - j_2 + \bar{J}_1 - \mathrm{k}/2 + 1; \bar{u})\Big],
\end{aligned}
\tag{7.3.5}
$$

donde usamos la ecuación (6.5.2),

$$u = \frac{1-x}{1-z} \tag{7.3.6}$$

y

$$
\begin{aligned}
\lambda = &\frac{\gamma(j_1 + j_3 - j_2)\Gamma(j_2 - j_3 - J_1 + \mathrm{k}/2 + 1)}{\gamma(j_1 + j_2 - j_3)\Gamma(j_3 + \bar{J}_1 - j_2 - \mathrm{k}/2 + 1)} \\
&\frac{\Gamma(j_1 + \bar{J}_1 - \mathrm{k}/2)\Gamma(\bar{J}_1 - \mathrm{k}/2 - j_1 + 1)\Gamma(j_2 - j_3 - J_1 + \mathrm{k}/2)}{\Gamma(j_3 + \bar{J}_1 - j_2 - \mathrm{k}/2)\Gamma(j_1 - J_1 + \mathrm{k}/2)\Gamma(-j_1 - J_1 + \mathrm{k}/2 + 1)}.
\end{aligned}
\tag{7.3.7}
$$

Deseamos aclarar que el factor λ hallado en la ecuación previa coincide con el coeficiente dado en [MO2], ec. (C.2), para el caso $m_1 = \bar{m}_1$.

7.4 Funciones de 3 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$

En esta sección vamos a obtener una representación integral para la función de 3 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$. Esto lo haremos a partir de la función de cuatro puntos con un campo en el sector de flujo espectral $w = 1$ y un operador de flujo espectral, ecuación (7.3.5). El resultado reflejará principalmente la dependencia de la función de 3 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$ en x y z. Sin embargo, este método sólo permite hallar una expresión muy engorrosa del coeficiente de dicho correlador (que depende de los momentos de los campos). Es por esto que calcularemos explícitamente tal factor de un modo distinto.

Empezaremos determinando la forma general de la función de 3 puntos. En otras palabras debemos calcular

$$A_3^{w=1,w=1}(z_1, x_1, z_2, x_2, z_4, x_4) = \langle \Phi^{w=1,j_3}_{J_3,\bar{J}_3}(z_1,x_1)\Phi^{w=1,j_1}_{J_1,\bar{J}_1}(z_2,x_2)\Phi_{j_2}(z_4,x_4)\rangle. \tag{7.4.1}$$

Para ello vamos a emplear nuevamente la definición alternativa de flujo espectral. Deseamos aclarar que no estamos suponiendo necesariamente $m_3 = \bar{m}_3$. Al igual que en la sección anterior, vamos primero a calcular la integral en t y luego obtener el límite al hacer tender ϵ y $\bar{\epsilon}$ a cero. Escribiendo explícitamente la definición, obtenemos la expresión siguiente

$$
\begin{aligned}
&A_3^{w=1,w=1}(z_1,x_1,z_2,x_2,z_4,x_4)\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{m_3}\bar{\epsilon}^{\bar{m}_3}\int_{\mathbb{C}} t^{j_3-m_3-1}\bar{t}^{j_3-\bar{m}_3-1}A_4^{w=1}(z_1,x_1,z_2,x_2,z_4,x_4,z_1+\epsilon,x_1+t)\,d^2t\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{m_3}\bar{\epsilon}^{\bar{m}_3}2i(-1)^{m_1+\bar{m}_1}\pi C_5(j_1,j_2,j_3)\frac{\Gamma(j_1-J_1+\mathrm{k}/2)\Gamma(j_3-j_2+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2)}{\Gamma(1+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2-j_1)\Gamma(j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2+1)}\\
&\quad\frac{\Gamma(j_2-j_1-j_3+1)}{\Gamma(j_1+j_3-j_2)}\int_{\mathbb{C}} t^{j_3-m_3-1}\bar{t}^{j_3-\bar{m}_3-1}x_{12}^{j_2+j_3-J_1-\mathrm{k}/2}\bar{x}_{12}^{j_2+j_3-\bar{J}_1-\mathrm{k}/2}t^{J_1-\mathrm{k}/2-j_2-j_3}\bar{t}^{\bar{J}_1-\mathrm{k}/2-j_2-j_3}\\
&\quad|x_{24}|^{-4j_2}(x_{21}-t)^{j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2}(\bar{x}_{21}-t)^{j_2-j_3-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2}\\
&\quad|\epsilon|^{\mathrm{k}}z_{24}^{\Delta_3-\Delta_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_{\mathrm{k}/2}}\bar{z}_{24}^{\Delta_3-\bar{\Delta}_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_{\mathrm{k}/2}}(z_{21}-\epsilon)^{\Delta_2-\Delta_3-\Delta_1^{w=1}+\Delta_{\mathrm{k}/2}}(\bar{z}_{21}-\bar{\epsilon})^{\Delta_2-\Delta_3-\bar{\Delta}_1^{w=1}+\Delta_{\mathrm{k}/2}}\\
&\quad(z_{41}-\epsilon)^{\Delta_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_3+\Delta_{\mathrm{k}/2}}(\bar{z}_{41}-\bar{\epsilon})^{\bar{\Delta}_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_3+\Delta_{\mathrm{k}/2}}z^{J_1}\bar{z}^{\bar{J}_1}|1-z|^{-2j_2}|1-u|^{2(j_1-j_2-j_3)}\\
&\quad\Big[{}_2F_1(j_1+j_2-j_3,j_1-J_1+\mathrm{k}/2,j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2+1;u)\\
&\quad{}_2\bar{F}_1(j_1+j_2-j_3,j_1-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2,j_2-j_3-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2+1;\bar{u})\\
&+\lambda u^{j_3+J_1-j_2-\mathrm{k}/2}\bar{u}^{j_3+\bar{J}_1-j_2-\mathrm{k}/2}{}_2F_1(j_1+j_3-j_2,j_1+J_1-\mathrm{k}/2,j_3-j_2+J_1-\mathrm{k}/2+1;u)\\
&\quad{}_2\bar{F}_1(j_1+j_3-j_2,j_1+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2,j_3-j_2+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2+1;\bar{u})\Big]\,d^2t.
\end{aligned}
\tag{7.4.2}
$$

Vamos a hacer un cambio de variable conveniente que nos va a permitir eliminar el límite en ϵ y $\bar{\epsilon}$ de una forma muy sencilla. En primer lugar, debemos reeescribir la integral previa empleando el cambio de variables asociado a la definición de u, es decir, proponemos el siguiente cambio de variables

$$u=\frac{(x_{21}-t)x_{14}}{x_{42}t}\frac{\epsilon z_{24}}{z_{14}(z_{21}-\epsilon)}=e\frac{x_{21}-t}{t}. \tag{7.4.3}$$

Directamente de la expresión anterior, obtenemos la identidad

$$t=\frac{ex_{21}}{u+e}, \tag{7.4.4}$$

y por lo tanto resulta

$$d^2t=\left|\frac{ex_{21}}{(u+e)^2}\right|^2 d^2u. \tag{7.4.5}$$

Empleando el teorema de cambio de variable en la expresión integral de arriba, vemos fácilmente que los exponentes de ϵ y $\bar{\epsilon}$ se anulan nuevamente. Sin embargo, la integral restante todavía depende de ϵ y $\bar{\epsilon}$, debido a la dependencia de los factores e y $\bar{e}$, y por lo tanto el límite aún permanece.

Podremos eliminar completamente esta dependencia al tomar el límite dentro de la integral como veremos en un instante. En ese caso sólo debemos hallar el límite de una función, que resulta sencillo.

Podemos reescribir la integral previa de la siguiente manera, salvo signos,

$$\begin{aligned}
&A_3^{w=1,w=1}(z_1,x_1,z_2,x_2,z_4,x_4)\\
&=\lim_{\epsilon\to 0} 2i\pi C_5(j_1,j_2,j_3)\frac{\Gamma(j_1-J_1+\mathrm{k}/2)\Gamma(j_2-j_1-j_3+1)\Gamma(j_3-j_2+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2)}{\Gamma(1+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2-j_1)\Gamma(j_1+j_3-j_2)\Gamma(j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2+1)}\\
&\quad x_{12}^{j_2-J_1-J_3}\bar{x}_{12}^{j_2-\bar{J}_1-\bar{J}_3}x_{14}^{J_1-j_2-J_3}\bar{x}_{14}^{\bar{J}_1-j_2-\bar{J}_3}x_{24}^{J_3-J_1-j_2}\bar{x}_{24}^{\bar{J}_3-\bar{J}_1-j_2}\\
&\quad z_{12}^{\Delta_2-\Delta_1^{w=1}-\Delta_3^{w=1}}\bar{z}_{12}^{\Delta_2-\bar{\Delta}_1^{w=1}-\bar{\Delta}_3^{w=1}}z_{14}^{\Delta_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_3^{w=1}}\bar{z}_{14}^{\bar{\Delta}_1^{w=1}-\Delta_2-\bar{\Delta}_3^{w=1}}z_{24}^{\Delta_3^{w=1}-\Delta_1^{w=1}-\Delta_2}\bar{z}_{24}^{\bar{\Delta}_3^{w=1}-\bar{\Delta}_1^{w=1}-\Delta_2}\\
&\quad\int_{\mathbb{C}} u^{j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2}\bar{u}^{j_2-j_3-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2}(u+e)^{J_3+j_3-\mathrm{k}/2-1}(\bar{u}+\bar{e})^{\bar{J}_3+j_3-\mathrm{k}/2-1}|1-u|^{2(j_1-j_2-j_3)}\\
&\quad\Big[{}_2F_1(j_1+j_2-j_3,j_1-J_1+\mathrm{k}/2,j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2+1;u)\\
&\quad{}_2\bar{F}_1(j_1+j_2-j_3,j_1-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2,j_2-j_3-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2+1;\bar{u})\\
&+\lambda u^{j_3+J_1-j_2-\mathrm{k}/2}\bar{u}^{j_3+\bar{J}_1-j_2-\mathrm{k}/2}{}_2F_1(j_1+j_3-j_2,j_1+J_1-\mathrm{k}/2,j_3-j_2+J_1-\mathrm{k}/2+1;u)\\
&\quad{}_2\bar{F}_1(j_1+j_3-j_2,j_1+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2,j_3-j_2+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2+1;\bar{u})\Big]\,d^2u.
\end{aligned}\tag{7.4.6}$$

Teniendo en cuenta que el factor e depende de ϵ de acuerdo con la ec. (7.4.3), de manera inmediata vemos que podemos tomar el límite dentro de la integral y por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned}
&A_3^{w=1,w=1}(z_1,x_1,z_2,x_2,z_4,x_4)\\
&=\pi C_5(j_1,j_2,j_3)\frac{\Gamma(j_1-J_1+\mathrm{k}/2)\Gamma(j_2-j_1-j_3+1)\Gamma(j_3-j_2+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2)}{\Gamma(1+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2-j_1)\Gamma(j_1+j_3-j_2)\Gamma(j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2+1)}\\
&\quad x_{12}^{j_2-J_1-J_3}\bar{x}_{12}^{j_2-\bar{J}_1-\bar{J}_3}x_{14}^{J_1-j_2-J_3}\bar{x}_{14}^{\bar{J}_1-j_2-\bar{J}_3}x_{24}^{J_3-J_1-j_2}\bar{x}_{24}^{\bar{J}_3-\bar{J}_1-j_2}\\
&\quad z_{12}^{\Delta_2-\Delta_1^{w=1}-\Delta_3^{w=1}}\bar{z}_{12}^{\Delta_2-\bar{\Delta}_1^{w=1}-\bar{\Delta}_3^{w=1}}z_{14}^{\Delta_1^{w=1}-\Delta_2-\Delta_3^{w=1}}\bar{z}_{14}^{\bar{\Delta}_1^{w=1}-\Delta_2-\bar{\Delta}_3^{w=1}}z_{24}^{\Delta_3^{w=1}-\Delta_1^{w=1}-\Delta_2}\bar{z}_{24}^{\bar{\Delta}_3^{w=1}-\bar{\Delta}_1^{w=1}-\Delta_2}\\
&\quad\int_{\mathbb{C}} u^{j_2+J_3-J_1-1}\bar{u}^{j_2+\bar{J}_3-\bar{J}_1-1}|1-u|^{2(j_1-j_2-j_3)}\\
&\quad\Big[{}_2F_1(j_1+j_2-j_3,j_1-J_1+\mathrm{k}/2,j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2+1;u)\\
&\quad{}_2\bar{F}_1(j_1+j_2-j_3,j_1-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2,j_2-j_3-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2+1;\bar{u})\\
&+\lambda u^{j_3+J_1-j_2-\mathrm{k}/2}\bar{u}^{j_3+\bar{J}_1-j_2-\mathrm{k}/2}{}_2F_1(j_1+j_3-j_2,j_1+J_1-\mathrm{k}/2,j_3-j_2+J_1-\mathrm{k}/2+1;u)\\
&\quad{}_2\bar{F}_1(j_1+j_3-j_2,j_1+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2,j_3-j_2+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2+1;\bar{u})\Big]\,d^2u.
\end{aligned}\tag{7.4.7}$$

Resumiendo un poco, encontramos la forma funcional de la función de 3 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w=1$. Es importante destacar que la forma obtenida resulta ser precisamente la esperada a partir de las identidades de Ward cuando los correladores contienen estados en el sector de flujo espectral $w=1$, esencialmente reeemplazando j por J y $\Delta(j)$ por $\Delta^w(j,J)$.

Todavía necesitamos encontrar el factor de dicha función, que depende de los momentos de los campos. Una manera de hallar dicho coeficiente es calcular de forma explícita la integral anterior. Esto es posible pero en extremo engorroso. Nosotros vamos a proceder de una manera distinta: a partir de la función de cinco puntos, fijamos los argumentos de tres de los campos, que es posible por invariancia conforme, y los otros dos argumentos se fijan por la operación de flujo espectral. Obtenemos entonces una integral doble que se puede calcular de forma explícita siguiendo a [Sa] (o a [GN]).

Observación 7.4.1. *Deseamos notar que para el caso $j_1 = j_3$, $j_2 = 0$, $m_1 = \bar{m}_1$ y $m_3 = \bar{m}_3$, la integral anterior puede calcularse de manera sencilla empleando la identidad (C.1) de [MO2], p. 72. En ese caso obtenemos el coeficiente de la función de dos puntos* (6.5.7), *como esperábamos.*

Vamos entonces a encontrar el factor de la función de tres puntos

$$\begin{aligned}
&C_3^{w=1,w=1}(j_1,j_2,j_3,J_1,J_3)\\
&=\pi C_5(j_1,j_2,j_3)\frac{\Gamma(j_1-J_1+\mathrm{k}/2)\Gamma(j_2-j_1-j_3+1)\Gamma(j_3-j_2+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2)}{\Gamma(1+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2-j_1)\Gamma(j_1+j_3-j_2)\Gamma(j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2+1)}\\
&\quad\int_{\mathbb{C}} u^{j_2+J_3-J_1-1}\bar{u}^{j_2+\bar{J}_3-\bar{J}_1-1}|1-u|^{2(j_1-j_2-j_3)}\\
&\quad\Big[{}_2F_1(j_1+j_2-j_3,j_1-J_1+\mathrm{k}/2,j_2-j_3-J_1+\mathrm{k}/2+1;u)\\
&\quad{}_2\bar{F}_1(j_1+j_2-j_3,j_1-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2,j_2-j_3-\bar{J}_1+\mathrm{k}/2+1;\bar{u})\\
&+\lambda u^{j_3+J_1-j_2-\mathrm{k}/2}\bar{u}^{j_3+\bar{J}_1-j_2-\mathrm{k}/2}{}_2F_1(j_1+j_3-j_2,j_1+J_1-\mathrm{k}/2,j_3-j_2+J_1-\mathrm{k}/2+1;u)\\
&\quad{}_2\bar{F}_1(j_1+j_3-j_2,j_1+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2,j_3-j_2+\bar{J}_1-\mathrm{k}/2+1;\bar{u})\Big]\,d^2u.
\end{aligned}\tag{7.4.8}$$

Procedemos de la siguiente forma. Como ya tenemos la forma funcional de un correlador de tres campos con dos en el sector de flujo espectral $w = 1$, podemos evaluar los argumentos de los campos de dicho correlador de la forma siguiente:

$$x_1 = z_1 = 0, \quad x_2 = z_2 = 1, \quad x_4 = z_4 = \infty. \tag{7.4.9}$$

Fijamos

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_1 + t_1, \quad & z_3 &= z_1 + \epsilon_1,\\
x_5 &= x_2 + t_2, \quad & z_5 &= z_2 + \epsilon_2,
\end{aligned}\tag{7.4.10}$$

En este caso la función de 5 puntos (7.2.18) se puede reducir a la siguiente forma

$$\begin{aligned}
A_5(z_1,x_1,\dots,z_5,x_5) = C_5(j_1,j_2,j_3)&\left|\frac{\epsilon_2-t_2}{\epsilon_2(1-\epsilon_2)}\right|^{2(j_1-j_2-j_3)}\left|\frac{\epsilon_1-t_1}{\epsilon_1(1+\epsilon_1)}\right|^{2(j_3-j_1-j_2)}\\
&\left|\frac{t_2t_1}{\epsilon_2\epsilon_1}-\frac{(1+t_1)(1-t_2)}{(1+\epsilon_1)(1-\epsilon_2)}\right|^{2(j_2-j_1-j_3)}|1+\epsilon_1|^{-2j_1}|\epsilon_2|^{-2j_3}|\epsilon_1|^{-2j_1}\\
&|1-\epsilon_2|^{-2j_3}|1+\epsilon_1-\epsilon_2|^{2(\Delta_2-\Delta_1-\Delta_3)},
\end{aligned}\tag{7.4.11}$$

donde se cancela toda dependencia en x_4 y z_4.

Vamos a aplicar el flujo espectral para generar dos campos en el sector de flujo espectral

$w = 1$ de manera simultánea de acuerdo con la prescripción anterior. Calcularemos entonces

$$\begin{aligned}
&C_3^{w=1,w=1}(j_1, j_2, j_3, J_1, J_3)\\
&= \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} \epsilon_1^{m_1}\bar{\epsilon}_1^{\bar{m}_1}\epsilon_2^{m_3}\bar{\epsilon}_2^{\bar{m}_3} \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} t_1^{j_1-m_1-1}\bar{t}_1^{j_1-\bar{m}_1-1}t_2^{j_3-m_3-1}\bar{t}_2^{j_3-\bar{m}_3-1} A_5(z_1, x_1, z_2, x_2, z_3, x_3, z_4, x_4, z_5, x_5)\\
&\quad d^2t_1 d^2t_2\\
&= \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} \epsilon_1^{m_1}\bar{\epsilon}_1^{\bar{m}_1}\epsilon_2^{m_3}\bar{\epsilon}_2^{\bar{m}_3} C_5(j_1, j_2, j_3) \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} t_1^{j_1-m_1-1}\bar{t}_1^{j_1-\bar{m}_1-1}t_2^{j_3-m_3-1}\bar{t}_2^{j_3-\bar{m}_3-1}\\
&\quad \left|\frac{\epsilon_2 - t_2}{\epsilon_2(1-\epsilon_2)}\right|^{2(j_1-j_2-j_3)}\left|\frac{\epsilon_1 - t_1}{\epsilon_1(1+\epsilon_1)}\right|^{2(j_3-j_1-j_2)}\left|\frac{t_2 t_1}{\epsilon_2\epsilon_1} - \frac{(1+t_1)(1-t_2)}{(1+\epsilon_1)(1-\epsilon_2)}\right|^{2(j_2-j_1-j_3)}\\
&\quad |1+\epsilon_1|^{-2j_1}|\epsilon_2|^{-2j_3}|\epsilon_1|^{-2j_1}|1-\epsilon_2|^{-2j_3}|1+\epsilon_1-\epsilon_2|^{2(\Delta_2-\Delta_1-\Delta_3)}\, d^2t_1 d^2t_2.
\end{aligned} \tag{7.4.12}$$

Si hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned} t_1 &= u\epsilon_1,\\ t_2 &= v\epsilon_2, \end{aligned} \tag{7.4.13}$$

vemos que los exponentes de ϵ_1 y ϵ_2 se anulan, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
&A_3^{w=1,w=1}(j_1, j_2, j_3, J_1, J_3)\\
&= \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} C_5(j_1, j_2, j_3) \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} u^{j_1-m_1-1}\bar{u}^{j_1-\bar{m}_1-1}v^{j_3-m_3-1}\bar{v}^{j_3-\bar{m}_3-1}|v-1|^{2(j_1-j_2-j_3)}|u-1|^{2(j_3-j_1-j_2)}\\
&\quad \left|uv - \frac{(1+u\epsilon_1)(1-v\epsilon_2)}{(1+\epsilon_1)(1-\epsilon_2)}\right|^{2(j_2-j_1-j_3)} d^2u d^2v\\
&= C_5(j_1, j_2, j_3) \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} u^{j_1-m_1-1}\bar{u}^{j_1-\bar{m}_1-1}v^{j_3-m_3-1}\bar{v}^{j_3-\bar{m}_3-1}|v-1|^{2(j_1-j_2-j_3)}|u-1|^{2(j_3-j_1-j_2)}\\
&\quad |uv-1|^{2(j_2-j_1-j_3)}\, d^2u d^2v\\
&= C_5(j_1, j_2, j_3) \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} u^{j_1-m_1-1}\bar{u}^{j_1-\bar{m}_1-1}v'^{j_3+m_3-1}\bar{v}'^{j_3+\bar{m}_3-1}|v'-1|^{2(j_1-j_2-j_3)}|u-1|^{2(j_3-j_1-j_2)}\\
&\quad |u-v'|^{2(j_2-j_1-j_3)}\, d^2u d^2v',
\end{aligned} \tag{7.4.14}$$

donde en el último miembro hicimos el cambio de variable

$$v' = \frac{1}{v}. \tag{7.4.15}$$

Para calcular la integral anterior, empleamos la expresión siguiente, ec. (A.1)-(A.3), [Sa], pp. 15–16,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} u^{\alpha}\bar{u}^{\bar{\alpha}}v^{\alpha'}\bar{v}^{\bar{\alpha}'}(1-u)^{\beta}(1-\bar{u})^{\bar{\beta}}(1-v)^{\beta'}(1-\bar{v})^{\bar{\beta}'}|u-v|^{4\sigma}\, d^2u d^2v\\
&= (C^{12}[\alpha_i, \alpha_i']P^{12}[\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i'] + C^{21}[\alpha_i, \alpha_i']P^{21}[\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i']),
\end{aligned} \tag{7.4.16}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha, \quad \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = \gamma,\\ \alpha_1' &= \alpha', \quad \alpha_2' = \beta', \alpha_3' = \gamma', \end{aligned} \tag{7.4.17}$$

y del mismo modo para los $\bar{\alpha}_i$ y $\bar{\alpha}'_i$. Estos parámetros cumplen que

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= k' = -2\sigma - 1, \\ \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 &= k' = -2\sigma - 1. \end{aligned} \tag{7.4.18}$$

Además

$$C^{ab}[\alpha_i, \alpha'_i] = \frac{\Gamma(1+\alpha_a+\alpha'_a-k')\Gamma(1+\alpha_b+\alpha'_b-k')}{\Gamma(k'-\alpha_c+\alpha_c)} G\begin{bmatrix} \alpha_{a'}+1, \alpha_b+1, k'-\alpha_c-\alpha'_c \\ \alpha'_a-\alpha_c+1, \alpha_b-\alpha'_c+1 \end{bmatrix}, \tag{7.4.19}$$

para $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$, y donde la función G está dada por

$$G\begin{bmatrix} a, b, c \\ d, e \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(d)\Gamma(e)} {}_3F_2(a, b, c; d, e; 1). \tag{7.4.20}$$

Por otro lado, tenemos también

$$\begin{aligned} P^{12}[\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}'_i] &= \mathrm{sen}(\pi\bar{\alpha}_2)\mathrm{sen}(\pi\bar{\alpha}'_2)C^{23}[\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}'_i] - \mathrm{sen}(\pi\bar{\alpha}_2)\mathrm{sen}(\pi(\bar{\alpha}'_2-k'))C^{32}[\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}'_i], \\ P^{21}[\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}'_i] &= -\mathrm{sen}(\pi\bar{\alpha}'_2)\mathrm{sen}(\pi(\bar{\alpha}_2-k'))C^{23}[\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}'_i] + \mathrm{sen}(\pi\bar{\alpha}_2)\mathrm{sen}(\pi\bar{\alpha}'_2)C^{32}[\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}'_i]. \end{aligned} \tag{7.4.21}$$

Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} & C_3^{w=1,w=1}(j_1, j_2, j_3, J_1, J_3) \\ &= C_5(j_1, j_2, j_3)\frac{\Gamma(j_2-J_1+J_3)\Gamma(2-j_1-j_2-j_3)^2\Gamma(j_2+\bar{J}_1-\bar{J}_3)}{\Gamma(1-j_2-J_1+J_3)\Gamma(1-j_2+\bar{J}_1-\bar{J}_3)} \\ &\quad \Bigg\{ G\begin{bmatrix} j_3+J_3-\frac{\mathrm{k}}{2}, j_3-j_1-j_2+1, 1-j_2+J_3-J_1 \\ j_3-j_1+J_3-J_1+1, 2-j_1-j_2+J_3-\frac{\mathrm{k}}{2} \end{bmatrix} s(j_3-j_1-j_2) \\ &\quad \Bigg(G\begin{bmatrix} j_1-j_2-j_3+1, j_1+\bar{J}_1-\frac{\mathrm{k}}{2}, 1-j_2+\bar{J}_1-\bar{J}_3 \\ 2-j_2-j_3+\bar{J}_1-\frac{\mathrm{k}}{2}, j_1-j_3+\bar{J}_1-\bar{J}_3+1 \end{bmatrix} s(j_1-j_2-j_3) \\ &\quad -G\begin{bmatrix} j_3-\bar{J}_3+\frac{\mathrm{k}}{2}, j_3-j_1-j_2+1, 1-j_2+\bar{J}_1-\bar{J}_3 \\ j_3-j_1+\bar{J}_1-\bar{J}_3+1, 2-j_1-j_2-J_3+\frac{\mathrm{k}}{2} \end{bmatrix} s(1-2j_2)\Bigg) \\ &\quad + G\begin{bmatrix} j_1-j_2-j_3+1, j_1-J_1+\frac{\mathrm{k}}{2}, 1-j_2+J_3-J_1 \\ 2-j_2-j_3-J_1+\frac{\mathrm{k}}{2}, j_1-j_3+J_3-J_1+1 \end{bmatrix} s(j_1-j_2-j_3) \\ &\quad \Bigg(G\begin{bmatrix} j_3-\bar{J}_3+\frac{\mathrm{k}}{2}, j_3-j_1-j_2+1, 1-j_2+\bar{J}_1-\bar{J}_3 \\ j_3-j_1+\bar{J}_1-\bar{J}_3+1, 2-j_1-j_2-\bar{J}_3+\frac{\mathrm{k}}{2} \end{bmatrix} s(j_3-j_1-j_2) \\ &\quad -G\begin{bmatrix} j_1-j_2-j_3+1, j_1+\bar{J}_1-\frac{\mathrm{k}}{2}, 1-j_2+\bar{J}_1-\bar{J}_3 \\ 2-j_2-j_3+J_1-\frac{\mathrm{k}}{2}, j_1-j_3+\bar{J}_1-\bar{J}_3+1 \end{bmatrix} s(1-2j_2)\Bigg)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{7.4.22}$$

donde utilizamos la notación $s(\alpha) = \mathrm{sen}(\pi\alpha)$.

En el caso en que $j_2 = 0$ y $j_1 = j_3 = j$, la ecuación anterior se puede reducir de la forma siguiente

$$A_2^{w=1,w=1} = \mathcal{B}(j)\frac{\Gamma(1-2j)}{\Gamma(2j)}\left(\frac{\Gamma(j+m)\Gamma(j-\bar{m})}{\Gamma(1-j+m)\Gamma(1-j-\bar{m})} + \frac{\Gamma(j-m)\Gamma(j+\bar{m})}{\Gamma(1-j-m)\Gamma(1-j+\bar{m})}\right). \tag{7.4.23}$$

Deseamos notar que la expresión anterior es exactamente igual a la hallada por [MO2], para la función de 2 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w = 1$, ec. (6.5.7), ya que como se ve inmediatamente

$$\frac{\Gamma(j\pm m)}{\Gamma(1-j\mp\bar{m})} = (-1)^{\bar{m}-m}\frac{\Gamma(j\pm\bar{m})}{\Gamma(1-j\mp m)}, \tag{7.4.24}$$

(usar que $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ y $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\mathrm{sen}(\pi z)$).

El coeficiente de la función de 3 puntos (7.4.22) tiene polos provenientes de las funciones Γ, de C_5 y de las funciones hipergeométricas no normalizadas G. Los polos de C_5 son

$$j = n + m(\mathrm{k}-2), \quad j = -(n+1) - (m+1)(\mathrm{k}-2), \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \tag{7.4.25}$$

con

$$j = 1 - j_1 - j_2 - j_3, \quad j_1 - j_2 - j_3, \quad j_2 - j_3 - j_1, \quad j_3 - j_1 - j_2. \tag{7.4.26}$$

Los polos de las funciones Γ son

$$J_1 = J_2 + j_3 + n, \quad J_2 = J_1 + j_3 + n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{7.4.27}$$

y de manera análoga para $\bar{J}_1$ y $\bar{J}_2$.

Los polos de la función $G[a, b, c; d, e]$ están en a, b, c, $d + e - a - b - c = -n$. Estos polos ya aparecen entre los anteriores, excepto aquellos que indican la presencia de imágenes bajo el flujo espectral de representaciones discretas, i.e., $m_1 = j_1 + n_1$, $\bar{m}_1 = j_1 + \bar{n}_1$. Por lo tanto, la estructura de polos para este caso es idéntica a la discutida por [MO2] sin flujo espectral, agregando también los polos de la forma (7.4.27), que son análogos a los que aparecen en la matriz S en la teoría de cuerdas en el espacio de Minkowski.

Observación 7.4.2. *Observar que los polos en* (7.4.25)*, con excepción de los primeros, aparecerieron al final de la sección 7.1, donde se encontraron las reglas de fusión de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$*. Los polos de la forma* $j = j_2 - j_3 - j_1$ *no aparecen en esa sección solamente por la elección de los argumentos de los campos. Los otros polos, de la forma* $j = 1 - j_1 - j_2 - j_3$*, fueron explicados en [MO2] en términos de efectos de instantones de la hoja de mundo y se deben físicamente a que ésta puede estar muy cerca del borde de* AdS_3.

Capítulo 8

Discusión

Como ya dijimos, las teorías de campos no compactas son más complejas que sus hermanas compactas, esencialmente debido a la inexistencia de vectores nulos, herramienta principal de la teoría WZW compacta. Por lo tanto, en el estudio del modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW debemos emplear nuevas simetrías que se encuentran presentes en la teoría, aunque no de forma evidente.

Luego de un estudio de las teorías de campos conformes en dos dimensiones y álgebras de Kac-Moody, presentamos, siguiendo a [TK], las definiciones básicas del modelo de Wess-Zumino-Witten sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. A su vez, estudiamos las herramientas básicas de los modelos de WZW: la construcción de Sugawara y el sistema de ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov sobre un álgebra de Kac-Moody afín no torcida.

Posteriormente, analizamos más en detalle el modelo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW. Para ello fue necesario estudiar las representaciones unitarias irreducibles de este grupo de Lie, con especial interés en las series principales. Teniendo en cuenta estas cuestiones, como también la simetría de flujo espectral, es posible determinar el espectro físico de estados del modelo. El flujo espectral surge en esta teoría como una nueva simetría, que en el caso de $\mathrm{SU}(2)$ resulta redundante, pero que para $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ debe ser tenida en consideración. Con respecto a este último, estudiamos también la definición alternativa de flujo espectral para $w=1$ presentada por [MO2].

Nos dedicamos especialmente al estudio de las funciones de correlación para el modelo de Wess-Zumino-Witten sobre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Éstas no sólo son la herramienta fundamental de cualquier teoría de campos sino que en el caso particular de nuestro interés, la teoría de cuerdas en AdS_3, es necesario conocer las amplitudes de scattering para poder establecer su consistencia. Comenzamos recordando los resultados que se encuentran en la bibliografía, donde esencialmente las funciones de correlación se obtienen por continuación analítica de las halladas en [Te1] y [Te2] para el modelo H_3^+.

Empleando técnicas diferentes, basadas en [AY], hallamos la función de 3 puntos con un operador de flujo espectral. De este cálculo obtuvimos una condición de anulación para la función de 3 puntos que coincide con la dada por [MO2].

A su vez, también calculamos la función de 5 puntos con dos operadores de flujo espectral, siguiendo las prescripciones de [FZZ]. Esencialmente verificamos que el correlador hallado cumpliera las identidades de Ward, las dos ecuaciones del vector nulo y las ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov. Obtenemos coincidencia entre casos particulares de nuestras expresiones y las halladas por [MO2]. A partir de la función de 5 puntos pudimos encontrar la función de 4 puntos con un campo en el sector de flujo espectral $w=1$ y un operador de flujo espectral.

Realizando nuevamente la operación de flujo espectral, obtenemos la forma general para la función de 3 puntos con dos campos en el sector de flujo espectral $w=1$. Estudiamos también algunos casos especiales. Al elegir en la función de 3 puntos el campo con $w = 0$ como la identidad, vemos que el coeficiente que se obtiene para la función de 2 puntos coincide exactamente con el hallado por [MO2]. Estos resultados fueron enviados como publicación y también se encuentran en el arXiv, [HMN].

Nuestros resultados representan un avance hacia la determinación definitiva de la consistencia de la teoría de cuerdas en AdS_3. Para establecer la unitariedad de la teoría completa sería necesario estudiar las propiedades de factorización de las funciones de 4 puntos que contienen estados en sectores de flujo espectral no nulo. Según [MO2], para los correladores sin flujo espectral la estructura de la factorización contiene varias diferencias con el caso plano. En particular, las funciones de 4 puntos no se factorizan en estados físicos intermedios a menos que $j_1 + j_2 < (\mathrm{k}+1)/2$ y $j_3 + j_4 < (\mathrm{k}+1)/2$.

La interpretación de estos vínculos realizada por Maldacena y Ooguri se basa en el análisis de la teoría conforme dual en el borde del espacio-tiempo. En esta teoría los correladores que violan esas condiciones no corresponden a funciones bien definidas. Sin embargo, esta interpretación es similar al análisis de la cota de unitariedad sobre los momentos de los campos físicos (i.e., $j < (\mathrm{k}-1)/2$) como la condición de que sólo operadores locales sean considerados en la teoría conforme del borde. No obstante, en este caso los vínculos ($1/2 < j < (\mathrm{k}-1)/2$) se entienden naturalmente en la teoría de la hoja de mundo de la cuerda en términos de las representaciones de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ y la simetría de flujo espectral (ver p. 53).

De manera similar, sería deseable entender mejor esas características de la factorización de las funciones de 4 puntos en términos de la teoría de la hoja de mundo de la cuerda y ver cómo se generalizan al incluir estados en sectores de flujo espectral no nulo. En este sentido, en el trabajo [HMN] se calculó la función de 4 puntos que contiene un estado en el sector de flujo espectral $w = 1$ y de 3 estados de momentos genéricos. Pero la estructura de la factorizacion de $A_4^{w=1}$ presenta dificultades adicionales a las que se encuentran en el caso sin flujo espectral, ya que, esencialmente, los polos que aparecen en ese caso son más numerosos, algunos de los cuales cruzan el contorno de integración antes de realizar continuación analítica, no preservan monodromía, etc. Tampoco queda claro cómo reemplazar el ansatz de Teschner, ec. (4.10) de [MO2]. El análisis de consistencia de la teoría de cuerdas para correladores con flujo espectral se considera por lo tanto como una tarea pendiente.

Referencias

[AY] Awata, H.; Yamada, Y. *Fusion rules for the fractional level* $\hat{\mathfrak{sl}}(2)$ *algebra*. Mod. Phys. Lett. A **13**, (1992), pp. 1185–1195.

[BOFW] Balog, J.; O'Raifeartaigh, L.; Forgacs, P.; Wipf, A. *Consistency of string propagation on curved space-time: an* $\mathrm{SU}(1,1)$ *based counterexample*. Nucl. Phys. B **325**, (1989), pp. 225–241.

[BN] Bars, I.; Nemeschansky, D. *String propagations in backgrounds with curved space-time*. Nucl. Phys. B **348**, (1991), pp. 89–107.

[CEFRT] Clerc, J-L.; Faraut, J.; Eymard, P.; Rais, M.; Takahashi, R. *Analyse harmonique*. Les cours du C.I.M.P.A., 1982.

[Con] Conway, J. *A course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Math. 96, Springer-Verlag, 1990.

[Co] Cotlar, M. *Introducción a la teoría de la representación de grupos*. Cursos y Seminarios de Matemática, Fascículo **11**, (1963), Departamento de Matemática, FCEyN, UBA.

[De&al] Deligne, P. et al. *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*. Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[DMS] Di Francesco, P.; Mathieu, P.; Senechal, D. *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag, 1996.

[EFK] Etingof, P.; Frenkel, I.; Kirillov, A. Jr. *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 108, Amer. Math. Soc, 1998.

[EGP] Evans, J.; Gaberdiel, M.; Perry, M. *The no-ghost theorem for* Ads_3 *and the stringy exclusion principle*. Nucl. Phys. B **535**, (1998), pp. 152–170. **`hep-th/9806024`**.

[FZ] Fateev, V.; Zamolodchikov, A. *Operator algebra and correlation functions in two-dimensional* $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ *chiral Wess-Zumino model*. Sov. J. Nucl. Phys. **43**, (1986), pp. 657–664.

[FZZ] Fateev, V.; Zamolodchikov, A.; Zamolodchikov, Al. Unpublished notes.

[FFM] Feigin, B.; Fuchs, D.; Malikov, F. *Singular vectors in Verma modules over affine Kac-Moody algebras*. Func. An. App. **20**, (1986), pp. 103–113.

[FU] Fuchs, J. *Affine Kac-Moody algebras and quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[FH] Fulton, W.; Harris, J. *Representation theory. A first course*. Graduate Texts in Math. 129, Springer-Verlag, 1999.

[FR] Frenkel, I.; Reshetikhin, N. *Quantum affine algebras and holonomic difference equations*. Comm. Math. Phys. **146**, (1992), pp. 1–60.

[Ga] Gawedzki, K. *Non-compact WZW conformal field theories*. Proc. of NATO ASI Cargese, 1991, Plenum Press, 1992, pp. 247–274. **hep-th/9110076v1**.

[GN] Geronimo, J.; Navalet, H. *On certain two-dimensional Integrals that appear in Conformal Field Theory*. J. Math. Phys. **44**, (2003), pp. 2293–2319. **math-ph/0003019v1**.

[Hua] Huang, Y. *Vertex operator algebras, fusion rules and modular transforInfinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Third edition, Cambridge, 1990.

[HMN] Herscovich, E.; Minces, P.; Nuñez, C. *Winding Strings in* AdS_3. **hep-th/0512196**.

[Hum] Humphreys, J. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag, New-York, 1972.

[H1] Hwang, S. *No ghost theorem for* $\mathrm{SU}(1,1)$ *string theories*. Nucl. Phys. B **354**, (1991), pp. 100–112.

[H2] Hwang, S. *Cosets as gauge slices in* $\mathrm{SU}(1,1)$ *strings*. Phys. Lett. B **276**, (1992), pp. 451–454. **hep-th/9110039**.

[H3] Hwang, S. *Unitarity of string and non-compact hermitian symmetric spaces*. Phys. Lett. B **435**, (1998), pp. 331–336. **hep-th/9806049**.

[Kac1] Kac, V. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Third edition, Cambridge, 1990.

[Kac2] Kac, V. *Vertex algebras for beginners*. University Lectures Series, vol. 10, 2nd edition, Amer. Math. Soc., 1998.

[KK] Kac, V.; Kazhdan, D. A. *Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras*. Adv. in Math. **34**, (1979), pp. 97–108.

[KZ] Knizhnik, V.; Zamolodchikov, A.B. *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*. Nucl. Phys. B **247**, (1984), pp. 83–103.

[KS] Kutasov, D.; Seiberg, N. *More comments on String theory on* AdS_3. JHEP **9904**, (1994), pp. 008–050. **hep-th/9903219**.

[La] Lang, S. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Graduate Texts in Math. 105, Springer-Verlag, 1998.

[Mal] Maldacena, J. *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*. Adv. Theor. Math. Phys. **2**, (1998), pp. 231–252. **hep-th/9711200**.

[MO1] Maldacena, J.; Ooguri, H. *Strings in* AdS_3 *and the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$*-WZW model. Part 1: The Spectrum*. J. Math. Phys. **42**, (2001), pp. 2929–2960. **hep-th/0001053**.

[MO2] Maldacena, J.; Ooguri, H. *Strings in* AdS_3 *and the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$*-WZW model. Part 3: Correlation functions*. Phys. Rev. D **65**, (2002), pp. 106006–. **hep-th/0111180v2**.

[MOS] Maldacena, J.; Ooguri, H.; Son, J. *Strings in* AdS_3 *and the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$*-WZW model. Part 2: Euclidean black hole*. J. Math. Phys. **42**, (2001), pp. 2961–2977. **hep-th/0005183**.

[Mo] Mohammedi, N. *On the unitariry of string propagating on* $\mathrm{SU}(1,1)$. Int. J. Mod. Phys. A **5**, (1990), pp. 3201–3212.

[Pe1] Petropoulos, P. *Comments on* $\mathrm{SU}(1,1)$ *string theory*. Phys. Lett. B **236**, (1990), pp. 151–.

[Pe2] Petropoulos, P. *String theory on* AdS_3*: some open questions*. Proc. of TMR European program meetting, Quantum aspects of Gauge Theories, Supersymmetry and Unification, Paris, France, 1999. **hep-th/9908189**.

[Pu] Pukánszki, L. *The Plancherel formula for the universal covering group of* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Math. Ann. **156**, (1964), pp. 96–143.

[Sa] Satoh, Y. *Three point functions and operator product expansions in the* $\mathrm{SL}(2)$ *conformal field theory*. Nucl. Phys. B **629**, (2002), pp. 188–208. **hep-th/0109059**.

[Seg] Segal, I. *A class of operator algebras which are determined by groups*. Duke Math. **18**, (1951), pp. 221–265.

[SU] Shimizu, Y.; Ueno, K. *Advances in Moduli Theory*. Translations of Math. Monogrphs, vol. 206, Amer. Math. Soc., 2002.

[Si1] Simon, B. *Representations of finite and compact groups* Graduate Studies in Math., vol. 10, Amer. Math. Soc., 1996.

[Te1] Teschner, J. *Operator product expansion and factorization in the* H_3^+*-WZNW model*. Nucl. Phys. B **571**, (2000), pp. 555–582.

[Te2] Teschner, J. *On structure constants and fusion rules in the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$ *WZNW model*. Nucl. Phys. B **546**, (1999), pp. 390–422.

[TK] Tsuchiya, A.; Kanie, Y. *Vertex operators in conformal field theory on* P^1 *and monodromy representations of braid group*. Conformal field theory and solvable lattice models (Kyoto, 1986). Lett. Math. Phys. **13**, (1987), pp. 303–312. Adv. Stud. Pure Math., vol. 16, Academic Press, Boston, 1988, pp. 297–372.

[TUY] Tsuchiya, A.; Ueno, K.; Yamada, Y. *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*. Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics. Adv. Stud. Pure Math., vol. 19, Academic Press, Boston, 1992, pp. 459–566.

[Var] Varadarajan, V. *Lie groups, Lie algebras and their representations*. Graduate Texts in Math. 102, Springer-Verlag, 1984.

[War] Warner, F. *Foundations of differential manifolds and Lie groups*. Graduate Texts in Math. 94, Springer-Verlag, 1980.

[WW] Whittaker, E.; Watson, G. *Course of modern analysis*. 4ta edición, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

[Wit] Witten, E. *Non-Abelian bosonization in two dimensions*. Comm. Math. Phys. **92**, (1984), pp. 455–472.