Introduction aux EDO et aux EDP

Notes du cours 2014-2015 (sans preuves)

Quelques références :

Équations différentielles ordinaires.

V. Arnold, *Équations différentielles ordinaires* (Mir)
A. Avez, *Calcul différentiel* (Masson)
C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications* (Springer)
J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles* (Presses Universitaires de Grenoble) ; voir aussi sur sa page Web, http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/, les “Documents pour le cours de L3 de Calcul différentiel (parcours A)”
M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* (Elsevier)
J. Dieudonné, *Éléments d'analyse 1* (Gauthier-Villars) et *Calcul infinitésimal* (Hermann)
F. Laudenbach, *Calcul différentiel et intégral* (cours de l'École Polytechnique)

Équations aux dérivées partielles.

H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* (Masson) ; une nouvelle édition avec exercices corrigés est *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* (Springer)
L. C. Evans, *Partial differential equations* (American Mathematical Society)
J. Rauch, *Partial differential equations* (Springer)
M. E. Taylor, *Partial differential equations I, Basic theory* (Springer)

Table des matières

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

Dans tout ce chapitre, E est un espace de Banach réel (de norme notée $\|\cdot\|$), U un ouvert de E, et I un intervalle (de $\mathbb{R}$) ouvert.

1.1 Introduction

Un exemple typique d'équations différentielles ordinaires (EDO) provient de la mécanique newtonienne : pour un objet ponctuel de masse m, situé à l'instant t à la position $x(t)$ ($\in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3\dots$) et soumis à une force $f(t, x(t))$, l'accélération est soumise à la relation

$$mx''(t) = f(t, x(t)).$$

Étant données, à un instant initial $\underline{t}$, la position $x(\underline{t})$ et la vitesse $x'(\underline{t})$, on pense pouvoir connaître la trajectoire future, c'est-à-dire $x(t)$ pour $t \geq \underline{t}$.
Pour avoir un exemple explicite de force f, et pour voir que la fonction x peut être à valeurs dans un espace de dimension beaucoup plus grande que 1, 2 ou 3, on peut penser au problème (d'astronomie) à N corps : la position du j-ème corps ($j = 1, \dots, N$) à l'instant t est $q_j(t) \in \mathbb{R}^3$, sa masse est m_j, et on a

$$m_j\, q_j'' = -G \sum_{k \neq j} m_j m_k \frac{q_j - q_k}{|q_j - q_k|},$$

avec $G > 0$ la constante de gravitation. L'inconnue est ici $q = (q_1, \dots, q_N)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{3N}$.

Rappels (?) sur la dérivation et l'intégration de $u : I \to E$.
La fonction u est *dérivable* en $t \in I$ s'il existe une limite (dans $(E, \|\cdot\|)$) au taux d'accroissement $\frac{1}{\tau}(u(t+\tau) - u(t))$ lorsque τ tend vers zéro. On note alors cette limite $u'(t)$. Le fait que u soit dérivable en t équivaut au développement de Taylor $u(t+\tau) = u(t) + \tau u'(t) + o(\tau)$. On a la notion habituelle de classe $\mathcal{C}^k$, et les développements de Taylor d'ordre supérieur.
Une intégrale peut être construite sur $\mathcal{C}([a, b], E)$ par densité des fonctions affines

par morceaux (continues). On a alors

$$\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u\left(a + n\frac{b-a}{N}\right),$$

$$\left\| \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

et si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],E)$,

$$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Considérations formelles.
La forme la plus générale d'une EDO est

$$G(t, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0.$$

On ne s'intéressera ici qu'aux EDO sous forme résolue, *i.e.* lorsque la relation précédente se réécrit de façon plus simple, par

$$G(t, u_0, u_1, \dots, u_k) = 0 \Longleftrightarrow u_k = F(t, u_0, u_1, \dots, u_{k-1}),$$

pour une certaine fonction F.
On note alors que l'EDO d'ordre k correspondante équivaut à une EDO (un système, en fait) d'ordre 1 :

$$u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \Longleftrightarrow U' = \mathbb{F}(t, U),$$

où on a posé

$$U = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}(t, U) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{k-1} \\ F(t, U) \end{pmatrix}.$$

On ne considèrera donc que des EDO de la forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t, u), \tag{1.1}$$

où f est une fonction de $I \times U$ dans E.
Remarques :

1) Si f ne dépend pas de t, l'EDO (1.1) est dite *autonome*. Toute EDO de la forme (1.1) se ramène à une EDO autonome par l'étude du système

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, u) \end{pmatrix},$$

mais il est souvent important de savoir étudier une EDO sans utiliser cette astuce (pour conserver sa structure).

2) On envisagera aussi le cas où f dépend de paramètres $\lambda \in \Lambda$ (avec Λ une partie de $\mathbb{R}^p$). On étudie alors la famille d'EDO

$$\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} = f(t, u_\lambda, \lambda).$$

Si on peut définir pour chaque λ une solution à l'EDO correspondante, on cherche comment elle dépend de λ.

Notion de solution.
On appelle *solution* de (1.1) (sur l'intervalle $J \subset I$) toute fonction $u : J \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, à valeurs dans U ($u \in \mathcal{C}^1(J, U)$) telle que

$$\forall t \in J, \quad u'(t) = f(t, u(t)).$$

On appelle *condition initiale* toute relation $u(\underline{t}) = \underline{u}$, lorsque $\underline{t} \in I$ et $\underline{u} \in U$ sont donnés.
On appelle *problème de Cauchy* associé à (1.1), avec la condition initiale $u(\underline{t}) = \underline{u}$, le système d'équations

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J, \\ u(\underline{t}) = \underline{u}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Résoudre (1.2) (localement en temps) consiste à trouver un intervalle $J \subset I$ contenant $\underline{t}$ et $u \in \mathcal{C}^1(J, U)$ vérifiant ce système.

Un exemple en dimension infinie : les réseaux de Fermi-Pasta-Ulam(-Tsingou).
En dimension 1, un tel réseau consiste en des “particules”, couplées à leurs plus proches voisin(e)s par une loi élastique : si on note x_n l'écart de la n-ième particule à sa position d'équilibre, on a

$$x_n'' + x_n = V'(x_{n+1} - x_n) - V'(x_n - x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

avec $V(r)$ de la forme $|r|^\alpha$. L'espace E est alors $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.
Fermi, Pasta, Ulam et Tsingou s'attendaient à une “thermalisation” (une répartition de l'énergie du système dans tous les modes d'oscillation), mais ils ont vu apparaître des phénomènes de “récurrence”. La dynamique de ces systèmes n'est toujours pas complètement comprise.
On peut consulter sur Scholarpedia l'article (en anglais) de T. Dauxois et S. Russo.

Deux (trois) remarques fondamentales.
1. Lorsque $f \in \mathcal{C}(J \times U, E)$, on a équivalence entre

$$u \in \mathcal{C}^1(J, U) \text{ satisfait (1.2)}$$

et

$$u \in \mathcal{C}^0(J, U) \text{ vérifie : } \forall t \in J, \quad u(t) = \underline{u} + \int_{\underline{t}}^{t} f(t', u(t'))\mathrm{d}t'$$

(cette identité est la *formulation intégrale* de (1.2)).

2. Si $u \in \mathcal{C}^1(J,U)$ satisfait (1.2) et f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \times U$ (pour préciser cette notion, on peut consulter C. Wagschal, Dérivation et intégration), alors $u \in \mathcal{C}^{k+1}(J,U)$ (par une récurrence, qu'on appelle "bootstrap").

3. **(Un) lemme de Gronwall.**

Lemme 1. *Si $\phi \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ est telle qu'il existe $a, b \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ telles que $b \geq 0$ et*

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a(t) + \int_0^t b(t')\,\phi(t')\,\mathrm{d}t',$$

alors :

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a(t) + \int_0^t a(t')\,b(t')\,e^{\int_{t'}^t b(t'')\,\mathrm{d}t''}\mathrm{d}t'.$$

Remarques :

1) En pratique, on aura non seulement b positive, mais aussi a et ϕ (et la majoration obtenue sur ϕ est d'autant plus utile qu'on a la minoration).
2) On peut noter que, si a est de classe $\mathcal{C}^1$, on a par intégration par parties :

$$\phi(t) \leq a(0)\,e^{\int_0^t b(t')\,\mathrm{d}t'} + \int_0^t a'(t')\,e^{\int_{t'}^t b(t'')\,\mathrm{d}t''}\mathrm{d}t',$$

et le membre de droite est la solution de l'EDO $u' = a' + bu$ avec condition initiale $u(0) = a(0) \geq \phi(0)$.
3) Le traitement de l'inégalité différentielle

$$\chi'(t) \leq c(t) + d(t)\,\chi(t)$$

(en calculant la dérivée de $\chi(t)\exp(-\int_0^t d(t')\,\mathrm{d}t')$ comme dans la preuve ci-dessus) est plus simple que celui de l'inégalité intégrale du lemme, et ne nécessite pas d'avoir $d \geq 0$. De plus, il mène au fait (simple) que χ est majorée par la solution ρ de l'équation différentielle

$$\rho'(t) = c(t) + d(t)\,\rho(t),$$

avec condition initiale $\rho(0) = \chi(0)$:

$$\forall t \in [0,T], \quad \chi(t) \leq \rho(t) = \chi(0)\,e^{\int_0^t d(t')\,\mathrm{d}t'} + \int_0^t c(t')\,e^{\int_{t'}^t d(t'')\,\mathrm{d}t''}\,\mathrm{d}t'.$$

4) On étend facilement le lemme (dans le cas $b \geq 0$ et $\phi \geq 0$) à :

$$\text{si pour tout } t \in [T-\tau_0, T+\tau_1], \quad \phi(t) \leq a(t) + \left|\int_T^t b(t')\,\phi(t')\mathrm{d}t'\right|,$$

$$\text{alors pour tout } t \in [T-\tau_0, T+\tau_1], \quad \phi(t) \leq a(t) + \left|\int_T^t a(t')\,b(t')\,e^{\left|\int_{t'}^t b(t'')\,\mathrm{d}t''\right|}\mathrm{d}t'\right|.$$

1.2 Existence et unicité locale, solutions maximales

Définition 1.2.1. *Soit $f : I \times U \to E$.*
Lorsque $D \subset I \times U$, s'il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall (t', u_1), (t', u_2) \in D, \quad \|f(t', u_2) - f(t', u_1)\| \leq k \|u_1 - u_2\|,$$

*on dit que f est (k-)*lipschitzienne par rapport à son deuxième argument *sur D. Si c'est le cas avec $D = I \times U$, on dit que f est* globalement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument*, ou simplement que f est lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.*
Si pour tout $(t, u) \in I \times U$ il existe un voisinage de (t, u) dans $I \times U$ sur lequel f est lipschitzienne par rapport à son deuxième argument, on dit que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument*.*

Remarques :
1) Un voisinage dans $I \times U$ d'un point (t, u) de $I \times U$ peut toujours être choisi sous forme cylindrique, *i.e.* sous la forme $C((t, u), \tau, r) = [t - \tau, t + \tau] \times \overline{B}(u, R)$ (avec $\tau, r > 0$).
2) **(Exo de TD ?)** Lorsque E est localement compact (*i.e.* tout voisinage contient un voisinage compact – E est alors de dimension finie), si $f \in \mathcal{C}^1(I \times U, E)$, alors f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.

Théorème 1.2.2 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}(I \times U, E)$, localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. Alors*
(i) (existence locale) pour tout $(\underline{t}, \underline{u}) \in I \times U$, il existe $\tau > 0$ et $u \in \mathcal{C}^1([\underline{t} - \tau, \underline{t} + \tau], U)$ solution de (1.2) *avec $J = [\underline{t} - \tau, \underline{t} + \tau]$;*
(ii) (unicité) si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1.1) *(respectivement sur J_1 et J_2, intervalles non nécessairement fournis par le point (i)) coïncidant en un point (donc $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$), alors elles coïncident sur $J_1 \cap J_2$; ainsi, leur recollement donne une solution de* (1.1) *sur $J_1 \cup J_2$;*
(iii) (régularité) si f est de classe $\mathcal{C}^r$ pour un $r \in \mathbb{N}$, alors u est de classe $\mathcal{C}^{r+1}$.

Remarques :
1) Le théorème de l'application contractante assure la convergence dans $\mathcal{C}([\underline{t} - \tau, \underline{t} + \tau], E)$ de la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$u^0 \equiv \underline{u}, \quad u^{n+1}(t) = \underline{u} + \int_0^t f(t', u^n(t')) \, \mathrm{d}t',$$

qui forme donc une suite de solutions approchées de (1.2).
2) **(Exo de TD ?)** On n'était pas obligé d'utiliser un argument de contraction pour $\mathcal{T}_{\tau,r}$ (et donc de réduire τ) pour avoir un unique point fixe dans $X_{\tau,r}$: si X est un espace métrique complet, et $\mathcal{T} : X \to X$, continue, vérifie que pour un

$p \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{T}^p$ est contractante, alors $\mathcal{T}$ admet un unique point fixe. Ici, on montre que pour tous $u, v \in X_{\tau,r}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\|\mathcal{T}^p_{\tau,r} u - \mathcal{T}^p_{\tau,r} v\|_{X_{\tau,r}} \leq \frac{k^p \tau^p}{p!} \|u - v\|_{X_{\tau,r}} \ldots$$

Définition 1 (Solutions maximales, solutions globales et explosion)**.** *Sous les hypothèses du théorème 1.2.2, il existe un plus grand intervalle J sur lequel* (1.2) *admet une solution. Cette solution est unique, et dite* solution maximale *de* (1.2)*. Si $J = I$, on dit que cette solution est une* solution globale *(en temps) de* (1.2)*. Sinon, on dit qu'il y a* explosion *(en temps fini).*

Remarque : Par existence locale (en temps), l'intervalle J est ouvert. En effet : si on dispose d'une solution u de (1.2) sur $[\underline{t}, \underline{t} + \tau]$ et d'une solution v de l'équation différentielle sur $[\underline{t} + \tau, \underline{t} + \tau + \tau']$, avec $v(\underline{t} + \tau) = u(\underline{t} + \tau)$, alors ces solutions se recollent en w, solution de (1.2) sur $[\underline{t}, \underline{t} + \tau + \tau']$. L'intervalle J ne peut donc pas être fermé à droite. Idem à gauche.

1.3 Existence globale et explosion

Dans ce paragraphe, on donne une (des) condition(s) nécessaire(s) pour l'explosion (sous forme de "comportement lors de l'explosion"), et une (des) condition(s) suffisante(s) pour assurer l'existence globale.

Un exemple (explicite).
Pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2, \\ u(0) = \underline{u} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

• si $\underline{u} = 0$, alors $u \equiv 0$ est (la) solution maximale (qui est globale) ;
• si $\underline{u} \neq 0$, alors $t \mapsto \dfrac{\underline{u}}{1 - t\underline{u}}$ est solution pour t proche de zéro ; elle est même solution
- sur $]-\infty, 1/\underline{u}[$, si $\underline{u} > 0$,
- sur $]1/\underline{u}, +\infty[$, si $\underline{u} < 0$,

et considérée sur cet intervalle, c'est la solution maximale, car $u(t)$ n'a pas de limite finie quand t tend vers $1/\underline{u}$ (il devrait y en avoir une si u se prolongeait en une solution – continue – au-delà de $1/\underline{u}$).

De façon générale, la solution de (1.2) s'étend "à l'infini en temps ou en espace" (ce qui justifie la terminologie "explosion") : on a le

Théorème 1.3.1. *Soit $f \in \mathcal{C}(I \times U, E)$, localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument, et soit $u \in \mathcal{C}(J, U)$ la solution maximale de* (1.2)*. On note b la borne supérieure de I et β la borne supérieure de J. Alors ou bien $\beta = b$, ou bien*

$\beta < b$ (explosion au temps β) et "u sort de tout compact de U", c'est-à-dire : pour tout compact $K \subset U$, il existe $T \in J$, $T < \beta$ tel que $u(T) \notin K$. On peut même choisir T tel que :

$$\forall t \in J, \quad t \geq T \Longrightarrow u(t) \notin K.$$

De même avec les bornes inférieures.

En dimension finie, on peut préciser :

Corollaire 1.3.2. *Si E est de dimension finie et $U = E$, sous les hypothèses du théorème, lorsque $\beta < b$, on a $\|u(t)\| \underset{t\to\beta}{\longrightarrow} +\infty$.*
(Il suffit d'appliquer le théorème en choisissant comme compact K une boule $\bar{B}(0, M)$ de rayon M arbitrairement grand).

Et même, dans le cas où $U =]u_-, u_+[\subset \mathbb{R}$:

Corollaire 1.3.3. *Si $E = \mathbb{R}$ et $U =]u_-, u_+[$ avec $-\infty \leq u_- < u_+ \leq +\infty$, sous les hypothèses du théorème, lorsque $\beta < b$, on a $u(t) \underset{t\to\beta}{\longrightarrow} u_-$ ou $u(t) \underset{t\to\beta}{\longrightarrow} u_+$.*

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant, qui assure une minoration du temps d'existence des solutions localement en $(\underline{t}, \underline{u})$:

Lemme 1.3.4. *Supposons que f soit continue, bornée et lipschitzienne par rapport à son deuxième argument sur $[T - 2\tau, T + 2\tau] \times \bar{B}(v, 2R)$ (pour certains $v \in U$, $T, \tau > 0$). Alors, il existe $\tau' \in]0, \tau]$ tel que pour tout $(\underline{t}, \underline{u}) \in [T - \tau, T + \tau] \times \bar{B}(v, R)$, la solution maximale de (1.2) soit définie (au moins) sur $[\underline{t} - \tau', \underline{t} + \tau']$.*

Remarques :

1) **(Exo de TD ?)** Dans le cas où f est lipschitzienne sur les bornés de E, uniformément sur les compacts en temps (*i.e.* : $f \in \mathcal{C}(I \times E, E)$, et

   $$\forall R > 0, \forall [a, b] \subset I, \exists k > 0, \forall t \in [a, b], \quad f(t, \cdot) \text{ est } k\text{-lipschitzienne sur } \bar{B}(0, R)),$$

   on a aussi $\|u(t)\| \underset{t\to\beta}{\longrightarrow} +\infty$ lorsque $\beta < b$.
2) **(Exo de TD ?)** Lorsque E est de dimension finie, et $f \in \mathcal{C}^1(I \times E, E)$, f est lipschitzienne sur les bornés de E, uniformément sur les compacts en temps. Avec E de dimension quelconque, si f est de la forme $f(t, u) = g(\|u\|)u$, avec $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors f est lipschitzienne sur les bornés de E, uniformément en temps.

On dispose d'un certain nombre de conditions suffisantes pour assurer l'existence globale des solutions. Par exemple, le cas de f globalement lipschitzienne sur E entier (la solution ne peut pas "sortir" du domaine de définition de f...) :

Théorème 1.3.5. *Soit f continue sur $I \times E$ et globalement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. Alors, pour tout $(\underline{t}, \underline{u}) \in I \times E$, la solution maximale de (1.2) est globale.*

Remarques :

1) On a le même résultat si f est globalement lipschitzienne sur E entier, uniformément sur les compacts en temps (par exemple, avec une constante de Lipschitz continue par rapport au temps). Cela s'applique au cas où f est affine : $f(t,u) = A(t)\,u + b(t)$, avec $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}_{\mathrm{c}}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$.
2) **(Exo de TD ?)** Dans le cas de f Lipschitz sur les bornés, uniformément (sur les compacts) en temps, on a existence globale dès que
   - f est à croissance sous-linéaire ($\exists a, b \geq 0, \forall u \in E, \|f(t,u)\| \leq a\,\|u\| + b$),
   ou
   - si E est un Hilbert, lorsqu'il existe $a, b \geq 0$ tels que :
   $\forall u \in E$, $(f(t,u) \mid u) \leq a\,\|u\|^2 + b$ (dans le cas de E réel),
   $\forall u \in E$, $\mathrm{Re}\,(f(t,u) \mid \overline{u}) \leq a\,\|u\|^2 + b$ (dans le cas de E complexe),
   (idem avec des coefficients a, b continus en temps).

1.4 Dépendance par rapport aux données initiales

Pour pouvoir perturber les données initiales sans risque de grosse erreur, on aimerait que la solution de (1.2) varie continument avec $\underline{u}$. Pour que cela ait un sens, il faut aussi que toutes les solutions correspondant à des données initiales proches restent définies sur un intervalle de temps commun. C'est ce qu'assurait le lemme de "minoration locale du temps d'existence". On a même le

Lemme 1.4.1. *Supposons que f soit continue, bornée et lipschitzienne par rapport à son deuxième argument sur $[T-2\tau, T+2\tau] \times \bar{B}(v, 2R)$ (pour certains $v \in U$, $T, \tau > 0$). Alors, en plus de $\tau' \in]0, \tau]$ du lemme 1.3.4, il existe $C > 0$ tel que : pour tous $(\underline{t}_i, \underline{u}_i) \in [T-\tau, T+\tau] \times \bar{B}(v, R)$ $(i = 1, 2)$, avec u_i la solution maximale de $(1.2)_i$, si $|\underline{t}_2 - \underline{t}_1| \leq \tau'$, on ait*

$$\forall t \in [\underline{t}_2 - \tau', \underline{t}_2 + \tau'] \cap [\underline{t}_1 - \tau', \underline{t}_1 + \tau'], \quad \|u_2(t) - u_1(t)\| \leq C(\|\underline{u}_2 - \underline{u}_1\| + |\underline{t}_2 - \underline{t}_1|).$$

On en déduit le

Théorème 1.4.2. *Soit $f \in \mathcal{C}(I \times U, E)$, localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. Alors, pour tout $(\underline{t}, v) \in I \times U$, il existe $\tau, R, C > 0$ et $\phi^{\underline{t}} : [\underline{t} - \tau, \underline{t} + \tau] \times \bar{B}(v, R) \to E$ tels que*
- $\forall \underline{u} \in \bar{B}(v, R), \quad \phi^{\underline{t}}(\cdot, \underline{u})$ *est solution de* (1.2) *sur* $[\underline{t} - \tau, \underline{t} + \tau]$ *;*
- $\forall t \in [\underline{t} - \tau, \underline{t} + \tau], \quad \phi^{\underline{t}}(t, \cdot)$ *est* $C-$*lipschitzienne.*

($\phi^{\underline{t}}$ est appelé le *flot (local) au temps* $\underline{t}$ de l'équation (1.1)).
Remarque : Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ et E est de dimension finie (sinon, prendre f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$), on peut montrer que le flot $\phi^{\underline{t}}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de $(\underline{t}, \underline{u})$: c'est un théorème de 1968 dû à J. Robbin – on peut consulter à ce propos C. Chicone, *Ordinary differential equations and applications.*

1.5 Dépendance par rapport aux paramètres

Si on perturbe la non-linéarité f (en la faisant dépendre de paramètres), on a le

Théorème 1.5.1. *Soit $f \in \mathcal{C}(I \times U \times \Lambda, E)$, localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument ((u, λ)), avec Λ un ouvert d'un Banach F. Alors, la solution du problème de Cauchy* (1.2) *associé à $f(\cdot, \cdot, \lambda)$ dépend continument (et même, de façon localement Lipschitz) de $\lambda \in \Lambda$.*

Remarque : Ici aussi, avoir f de classe $\mathcal{C}^k$ (avec E de dimension finie ; sinon, prendre $\mathcal{C}^{k+1}$) implique que $u(t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par rapport à $(\underline{u}, \underline{\lambda})$.

1.6 Existence (seule) par le théorème de Cauchy-Peano

Dans le cas où f est seulement continue sur $I \times U$, on perd l'unicité dans la résolution de (1.2).
Exemple : Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{|u|}, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

a pour solution $t \mapsto t^2/4$, mais aussi, lorsque $t_0 \leq 0 \leq t_1$, l'application qui à t associe $-(t - t_0)^2/4$ si $t \leq t_0$, 0 si $t_0 \leq t \leq t_1$, et $(t - t_1)^2/4$ si $t \geq t_1$.

Lorsque E est de dimension finie, on peut cependant encore montrer l'existence de solutions à (1.2).
Remarque : En dimension infinie, l'existence n'est pas assurée : voir Dieudonné, *Éléments d'analyse 1*, page 296 (avec $U = E = c_0$, et $f(u)_n = \sqrt{|u_n|} + 1/(n+1)$, $\underline{u} = 0$).

Théorème 1 (Cauchy-Peano)**.** *On suppose E de dimension finie, et $f \in \mathcal{C}(I \times U, E)$. Alors, il existe une solution à* (1.2)*.*

La preuve repose sur la construction de solutions approchées, et sur un résultat de compacité, le

Théorème 2 (Ascoli)**.** *Soit (K, d) un espace métrique compact, et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p), \|\cdot\|_\infty)$. On suppose $\mathcal{F}$ équicontinue :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in K, \quad d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{F}, \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon.$$

Alors $\overline{\mathcal{F}}$ est compacte.

Remarque : On aurait aussi pu fabriquer une suite de solutions approchées $(u^{(N)})_N$ en "régularisant" f, *i.e.* en consid{erant une suite $(f_N)_N$ de fonctions lipschitziennes convergeant uniformément vers f sur le cylindre de sécurité. Même si la constante de Lipschitz de f_N explose quand N tend vers l'infini, on peut définir (par Cauchy-Lipschitz) une solution $u^{(N)}$ à (1.2) associée à f_N sur un intervalle de temps ne d{ependant pas de cette constante de Lipschitz. On a alors une borne uniforme sur $u^{(N)}$, donc sur $f_N(\cdot, u^{(N)})$, d'où l'on déduit que la famille $(u^{(N)})_N$ est uniformément lipschitzienne, et on applique Ascoli.

1.7 Équations linéaires

On appelle
- EDO *linéaire homogène* une EDO de la forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)\, u, \tag{1.3}$$

où $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}_{\mathrm{c}}(E))$;
- EDO *linéaire non homogène* une EDO de la forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)\, u + b(t), \tag{1.4}$$

où $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}_{\mathrm{c}}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$.

1.7.1 Généralités

On rappelle que les solutions maximales des problèmes de Cauchy associés,

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)\, u(t), \quad t \in J, \\ u(\underline{t}) = \underline{u}. \end{cases} \tag{1.5}$$

et

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)\, u(t) + b(t), \quad t \in J, \\ u(\underline{t}) = \underline{u}, \end{cases} \tag{1.6}$$

sont globales (donc $J = I$ convient).
Pour le problème homogène, on a même l'estimation (avec la norme d'opérateur associée)

$$\|u(t)\| \le \|u(\underline{t})\| \exp\left(\int_{\underline{t}}^{t} \|A(t')\|\, \mathrm{d}t'\right)$$

(par Gronwall, appliqué à la formulation intégrale).
De plus, l'ensemble des solutions de (1.3) forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$ (de dimension d si E est de dimension finie d – A est alors une matrice $d \times d$).

1.7.2 Résolvante

Définition 1.7.1. *On appelle* résolvante *(ou* solution fondamentale*) de l'équation différentielle*

$$u' = A(t)\, u$$

l'application

$$\begin{array}{rcl} R : I \times I & \to & \mathcal{L}_{\mathrm{c}}(E) \\ (t,s) & \mapsto & R(t,s) \end{array},$$

où, pour tout s dans I, $t \mapsto R(t,s)$ est la solution du problème de Cauchy (linéaire) dans $\mathcal{L}_{\mathrm{c}}(E)$

$$\begin{cases} M' = A(t) \circ M, \quad t \in I, \\ M(s) = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}. \end{cases}$$

Remarque : Attention à la terminologie "résolvante", qui a un sens différent en théorie spectrale.

On peut alors noter que la solution du problème de Cauchy (1.5) est (pour tout $\underline{u} \in E$) l'application $t \mapsto R(t, \underline{t})\, \underline{u}$ (de I dans E). Ainsi, le flot associé $\phi^{\underline{t}}$ est donné par

$$\phi^{\underline{t}}(t, \underline{u}) = R(t, \underline{t})\, \underline{u}.$$

On a alors la

Proposition 1.7.2. *Pour tous $\underline{t}, t, s \in I$, on a*

$$R(t,s) \circ R(s, \underline{t}) = R(t, \underline{t}).$$

Remarque : On a la même formule pour le flot associé à (1.1),

$$\phi^{s}(t, \phi^{\underline{t}}(s, \underline{u})) = \phi^{\underline{t}}(t, \underline{u}),$$

mais avec des restrictions sur $s, t, \underline{t}$ (à cause du temps d'existence des solutions ; sauf si on a existence globale pour toute donnée initiale).
Dans le cas autonome, on peut supposer sans perte de généralité que $\underline{t} = 0$. Lorsque $\underline{u} \in E$ est donné, le flot local ϕ^0 est défini sur un voisinage de $(0_{\mathbb{R}}, \underline{u})$; on pose alors $\theta_t(v) = \phi^0(t, v)$. L'application θ_t est (si f est de classe $\mathcal{C}^2$) un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local, et on a

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s},$$

pour $|s|$ et $|t|$ assez petits : on parle de groupe (local) à un paramètre de difféomorhismes (locaux). Dans le cas (autonome) linéaire homogène, on a (globalement) un groupe à un paramètre d'isomorphismes linéaires (cf ci-dessous).

On peut prouver que l'application $(t,s) \mapsto R(t,s)$ est continue de $I \times I$ dans $\mathcal{L}_{\mathrm{c}}(E)$ (**(Exo de TD ?)** Utiliser que $t \mapsto R(t,s)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $s \mapsto R(t,s)$ est localement lipschitzienne). On a en fait mieux :

Corollaire 1.7.3.
(i) Pour tous $s, t \in I$, $R(t,s)$ est un isomorphisme (linéaire) sur E, d'inverse $R(s,t)$.
(ii) La résolvante R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times I$, avec

$$\forall (t,s) \in I \times I, \quad \frac{\partial R}{\partial t}(t,s) = A(t) \circ R(t,s), \quad \frac{\partial R}{\partial s}(t,s) = -R(t,s) \circ A(t).$$

Dans un certain nombre de cas, on peut plus ou moins expliciter cette résolvante :

- Si E est de dimension 1 (EDO scalaire), disons sur $\mathbb{C}$: $A(t) = a(t) \in \mathbb{C}$, et $R(t,s) = \exp\left(\int_s^t a(t')\,\mathrm{d}t'\right)$.
- Dans le cas autonome : $A(t) \equiv A \in \mathcal{L}_c(E)$, et $R(t,s) = \exp((t-s)A)$ est la somme d'une série. En dimension finie, on peut expliciter l'exponentielle de la matrice A : voir la section suivante.

Remarque : Dans le cas où E est de dimension finie (mais l'EDO non nécessairement autonome), on a
1) Si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de E, alors les applications $t \mapsto R(t, \underline{t})\, e_j$ $(j = 1, \ldots, d)$ forment une famille libre (et même une base) de l'ensemble des solutions de (1.3).
Et si $(u_1, \ldots, u_d)$ est une famille libre de solutions de (1.3), avec $B(t)$ la matrice dont les colonnes sont les $u_j(t)$ (dans une base quelconque), on a $B(t) \in GL_d(\mathbb{R}^d)$, et $R(t,s) = B(t)B(s)^{-1}$.
2. Si $(u_1, \ldots, u_d)$ est une famille de solutions de (1.3), on appelle *wronskien* de cette famille la quantité

$$W(t) := \det(u_1(t), \ldots, u_d(t)).$$

On a alors la formule (de Liouville) **(Exo de TD ?)** :

$$W(t) = \exp\left(\int_{\underline{t}}^t \mathrm{Tr}(A(t'))\,\mathrm{d}t'\right) W(\underline{t})$$

(ainsi, $\quad \det(R(t,s)) = \exp\left(\int_s^t \mathrm{Tr}(A(t'))\,\mathrm{d}t'\right)$).

Terminons cette section par une remarque sur les équations non homogènes : c'est une formulation intégrale de la solution (obtenue par superposition de la solution du problème de Cauchy pour l'équation homogène et de la solution particulière de l'équation inhomogène, à donnée initiale nulle), appelée “formule de la variation de la constante” ou “formule de Duhamel”.

Proposition 1.7.4. *La solution u de* (1.6) *s'écrit*

$$\forall t \in I, \quad u(t) = R(t, \underline{t})\, \underline{u} + \int_{\underline{t}}^t R(t,t')\, b(t')\,\mathrm{d}t'.$$

1.7.3 Comportement en temps grand des solutions des EDO linéaires autonomes en dimension finie

Pour (1.3), dans le cas autonome, la fonction A ne dépend pas du temps, et on sait que la solution du problème de Cauchy (1.5) est

$$u(t) = e^{tA}\underline{u}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Si A est diagonalisable, $\exp(tA)$ est facile à calculer. Cela revient à dire que, si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de E formée de vecteurs propres de A ($Ae_j = \lambda_j e_j$), avec la décomposition $\underline{u} = \sum_{j=1}^{d} \underline{u}_j e_j$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_j(t) = \sum_{j=1}^{d} e^{t\lambda_j}\underline{u}_j e_j.$$

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, on a la décompositionde Jordan, à condition que le polynôme caractéristique de A soit scindé. Ce sera toujours le cas si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}\ldots$ on considèrera donc $\mathbb{R}^d$ comme une partie de $\mathbb{C}^d$.

Théorème 3 (de Jordan)**.** *Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes), et chaque $J_k(\lambda)$ un bloc de Jordan :

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}).$$

On sait alors exprimer $\exp(A)$:

Proposition 1.7.5. *Avec les notations précédentes, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ (ou $t \in \mathbb{C}\ldots$) :*

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_{k_1}(\lambda_1)} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{tJ_{k_m}(\lambda_m)} \end{pmatrix} P^{-1},$$

et

$$e^{tJ_k(\lambda)} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \ldots & t^{k-1}/(k-1)! \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on dispose de la forme de Jordan de A, on connait alors le comportement de $e^{tA}\underline{u}$ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ pour tout $\underline{u} \in \mathbb{C}^d$:

Corollaire 1.7.6. *On note* $\mathbb{K}$ *pour* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. On considère* $A(t) \equiv A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ *:* (1.3) *est noté* (LHA)*, pour "autonome".*
(i) Les solutions de (LHA) *dans* $\mathbb{K}^d$ *tendent toutes vers* 0 *quand* t *tend vers* $+\infty$ *(respectivement,* $-\infty$*) ssi toutes les valeurs propres de* A *sont de partie réelle strictement négative (respectivement, strictement positive).*
(ii) Les solutions de (LHA) *dans* $\mathbb{K}^d$ *sont toutes bornées quand* t *tend vers* $+\infty$ *(respectivement,* $-\infty$*) ssi toutes les valeurs propres de* A *sont de partie réelle négative (respectivement, positive) ou nulle, avec les blocs de Jordan des valeurs propres imaginaires pures de taille 1 (valeurs propres semi-simples).*
(iii) ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)*. Lorsque* A *n'a aucune valeur propre imaginaire pure, on a une (unique) décomposition* $\mathbb{C}^d = E^{\mathrm{s}} \oplus E^{\mathrm{u}}$ *telle que*
- les sous-espaces vectoriels E^{s} *et* E^{u} *sont stables par le flot de* (LHA)*,*
- $\underline{u} \in E^{\mathrm{s}}$ *ssi* $e^{tA}\underline{u} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*,*
- $\underline{u} \in E^{\mathrm{u}}$ *ssi* $e^{tA}\underline{u} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$*.*
En fait, E^{s} *(le* sous-espace stable*) est la somme des sous-espaces caractéristiques de* A *associés aux valeurs propres ayant une partie réelle strictement négative, et* E^{u} *(le* sous-espace instable*) est la somme des sous-espaces caractéristiques de* A *associés aux valeurs propres ayant une partie réelle strictement positive.*

Remarque : Le "u" de E^{u} vient de l'anglais "unstable". Il peut aussi êre utile de savoir qu'en anglais, les sous-espaces caractéristiques sont les "generalized eigenspaces", qui contiennent les "generalized eigenvectors", ou vecteurs propres généralisés.

1.8 Comportement en temps grand des solutions des EDO autonomes en dimension finie

1.8.1 Notions générales

Le cas linéaire autonome précédent rentre dans le cadre général des EDO autonomes, de la forme $u' = f(u)$; $f : U \to E$ est alors appelé un *champ de vecteurs* sur U, et les solutions sont appelées *courbes intégrales* du champ de vecteurs f. Si u est une solution du problème de Cauchy (1.2), on dit aussi que (la courbe) $t \mapsto u(t)$ est la *trajectoire* de $\underline{u}$ (et l'image de cette application est appelée l'*orbite* de $\underline{u}$).
Il existe des solutions particulières :
• si u est une solution de (1.2), et s'il existe $T > 0$ tel que $u(\underline{t} + T) = u(\underline{t})$, alors la fonction de $\mathbb{R}$ dans E obtenue par T-périodisation de $u_{|[\underline{t},\underline{t}+T]}$ est une solution globale ; on parle de *trajectoire périodique* (ou *d'orbite fermée*) ;
• si $u_{\mathrm{eq}} \in U$ vérifie $f(u_{\mathrm{eq}}) = 0$ (on dit que u_{eq} est un *point critique*, ou un *point singulier* du champ de vecteurs), alors la fonction constante $u \equiv u_{\mathrm{eq}}$ est une solution (globale) de l'EDO, appelée *solution stationnaire*, ou *équilibre*.

On s'intéresse ici à l'effet en temps grand (t tend vers $+\infty$) de la perturbation de la donnée initiale. On pourra toujours supposer que $\underline{t} = 0$.

Définition 1.8.1. *Soit* $u_{\mathrm{ref}} \in \mathcal{C}([0,\infty[, U)$ *une solution de* (1.1). *On dira que* u_{ref} *est*
• stable *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un voisinage* V *de* $u_{\mathrm{ref}}(0)$ *tel que pour tout* $\underline{u} \in V$*, la solution maximale* u *de* (1.2) *soit définie (au moins) sur* $[0,\infty[$ *et vérifie*

$$\forall t \geq 0, \quad \|u(t) - u_{\mathrm{ref}}(t)\| \leq \varepsilon;$$

• asymptotiquement stable *si* u_{ref} *est stable et s'il existe un voisinage* V *de* $u_{\mathrm{ref}}(0)$ *tel que pour tout* $\underline{u} \in V$*, la solution maximale* u *de* (1.2) *soit définie (au moins) sur* $[0,\infty[$ *et vérifie*

$$u(t) - u_{\mathrm{ref}}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{E} 0.$$

On va étudier ces questions de stabilité pour les équilibres, dans le cas où E est un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.
• Le cas de la dimension 1 (sur $\mathbb{R}$) est facile : si on a énuméré les zéros de f, en les supposant isolés, disons avec u^1_{eq} le plus grand d'entre eux, et u^2_{eq} le suivant, si f est strictement positive entre u^1_{eq} et u^2_{eq}, et strictement négative au-delà de u^1_{eq}, par monotonie, si $\underline{u}$ appartient à $]u^2_{\mathrm{eq}}, u^1_{\mathrm{eq}}[$, alors la solution u du problème de Cauchy (1.2) est globale, strictement croissante, et tend vers u^1_{eq} en $+\infty$, vers u^2_{eq} en $-\infty$; si $\underline{u} > u^1_{\mathrm{eq}}$, u est définie sur $]T_{\min}, +\infty[$ (avec $]T_{\min} \in [-\infty, 0]$), strictement décroissante, et tend vers u^1_{eq} en $+\infty$, vers $+\infty$ en $T_{\min}$.
• En dimension 2 (sur $\mathbb{R}$), le théorème de Poincaré-Bendixson (voir C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, ou l'article de S. Cantat au Journal de maths des élèves de l'ENS de Lyon, consultable à l'adresse
www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num3/CantatJME3/CantatJME3.pdf) permet de classifier les ensembles compacts sur lesquels des trajectoires peuvent "s'accumuler" : ce sont des équilibres ou des orbites fermées.
• Dans le cas linéaire, on a caractérisé les matrices A pour lesquelles l'origine était un équilibre stable (valeurs propres de partie réelle négative ou nulle, et valeurs propres imaginaires pures semi-simples) ou asymptotiquement stable (valeurs propres de partie réelle strictement négative).

On utilisera une linéarisation de f près de l'équilibre u_{eq}. L'approximation linéaire n'est pas toujours fidèle au cas non linéaire, en particulier s'il existe des valeurs propres (de la matrice $f'(u_{\mathrm{eq}})$) imaginaires pures (il y a alors un défaut de "stabilité structurelle" du système linéarisé).
Exemples :
1) Pour l'équation $u' = -u^3$ ($E = \mathbb{R}$), 0 est asymptotiquement stable, alors qu'il est seulement stable pour l'équation linéarisée $u' = 0$.
2) De même concernant la stabilité de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ pour le système

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

3) C'est “pire” pour les équations $u' = u^3$, $u' = u^2$ et $u' = -u^2$, pour lesquelles, dans tout voisinage de la donnée initiale 0, il y a des données initiales menant à une explosion en temps (positif) fini.

On se restreindra donc aux cas où le linéarisé $f'(u_{\text{eq}})$ n'a pas de valeur propre imaginaire pure.

1.8.2 Cas des puits linéaires

Théorème 4. *On suppose que E est de dimension finie, et $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$. Si u_{eq} est tel que $f(u_{\text{eq}}) = 0$ et les valeurs propres de $f'(u_{\text{eq}})$ sont toutes de partie réelle strictement négative, alors u_{eq} est un équilibre asymptotiquement stable pour* (1.1).

Remarques :

1) Quitte à reprendre la preuve, on peut montrer que, pour tout $\nu > 0$ tel que $\mathrm{Sp}(f'(u_{\text{eq}})) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < -\nu\}$, on a $e^{\nu t}|u(t) - u_{\text{eq}}|$ borné : on dira que $u(t)$ converge vers u_{eq} *avec une décroissance en* $e^{-\nu t}$, et à cause de cette propriété (u_{eq} asymptotiquement stable comme dans le cas linéaire, avec une décroissance comparable même si on ne peut pas atteindre pour ν la valeur $\min(\{-\mathrm{Re}(\lambda), \lambda \in \mathrm{Sp}(f'(u_{\text{eq}}))\}))$, on parlera de *puits linéaire*.
2) Par contre, on ne peut pas obtenir de façon générale une décroissance en $e^{-\nu t}$ avec $\nu = \min(\{-\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(f'(u_{\text{eq}}))$: pour $u' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, si $u_2(0) \neq 0$, $e^t|u_1(t)| \sim t|u_2(0)|$ lorsque t tend vers $+\infty$.
3) On a en fait utilisé une méthode de Lyapunov, avec la fonction $\mathcal{L}(v) = |v - u_{\text{eq}}|^2$: **(Exo de TD ?)** Lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^d)$ et u_{eq} est tel que $f(u_{\text{eq}}) = 0$, s'il existe un voisinage V de u_{eq} et $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R}^d)$ telle que
(i) u_{eq} est un lieu de minimum non dégénéré de $\mathcal{L}$,
(ii) $\forall v \in V,\ \mathcal{L}(v) \cdot f(v) \leq 0$,
alors u_{eq} est un équilibre stable pour $u' = f(u)$. On dit que $\mathcal{L}$ est une fonction de Lyapunov pour l'EDO.
Si la condition (ii) est remplacée par
(ii)' $\forall v \in V \setminus \{u_{\text{eq}}\},\ \mathcal{L}(v) \cdot f(v) < 0$,
alors u_{eq} est asymptotiquement stable, et on dit que $\mathcal{L}$ est une fonction de Lyapunov stricte.
Ainsi, on a **(Exo de TD ?)** : Si x_{eq} est un lieu de minimum non dégénéré de $V \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ (avec U ouvert de $\mathbb{R}^d$), alors x_{eq} est un équilibre stable de $x'' = -\nabla V(x)$, l'énergie $|x'|^2/2 + V(x)$ étant conservée le long des trajectoires.
4) Par contre, dès que $f'(u_{\text{eq}})$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive, u_{eq} est instable (cf premier devoir de 2014-2015).

1.8.3 Cas des équilibres hyperboliques

Un autre cas où le linéarisé donne une bonne idée du comportement des solutions près d'un point d'équilibre : lorsque u_{eq} est un *équilibre hyperbolique*, c'est-à-dire quand $f'(u_{\text{eq}})$ n'a pas de valeur propre imaginaire pure.

On notera encore E^{u} (resp. E^{s}) le sous-espace instable (resp. stable) associé à $f'(u_{\mathrm{eq}})$, dont la dimension est donnée par le nombre de valeurs propres de $f'(u_{\mathrm{eq}})$, comptées avec leur multiplicité algébrique, de partie réelle strictement positive (resp. strictement négative). On définit alors (avec $\underline{t}=0$ dans le problème de Cauchy (1.2)) :

$$W^{\mathrm{u}}(u_{\mathrm{eq}}) = \{\underline{u} \in U \mid \text{la solution } u \text{ de (1.2) est définie sur }]-\infty,0], \text{ et } u(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} u_{\mathrm{eq}}\},$$
$$W^{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{eq}}) = \{\underline{u} \in U \mid \text{la solution } u \text{ de (1.2) est définie sur } [0,\infty[, \text{ et } u(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} u_{\mathrm{eq}}\}.$$

Ces ensembles sont invariants par le flot associé à l'EDO (1.1), et ils ont une structure locale donnée par le théorème suivant : on parle de variétés stable et instable locales pour l'EDO (1.1), près de l'équilibre u_{eq}.

Théorème 5. *On suppose que E est de dimension finie, et $f \in \mathcal{C}^1(U,E)$. Soit u_{eq} un équilibre hyperbolique pour* (1.1)*. Alors, il existe un voisinage V de u_{eq} tel que $W^{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{eq}}) \cap V$ et $W^{\mathrm{u}}(u_{\mathrm{eq}}) \cap V$ soient des sous-variétés différentiables de E de dimension respective* $\dim(E^{\mathrm{s}})$ *et* $\dim(E^{\mathrm{u}})$*. Elles contiennent u_{eq} et y sont tangentes à E^{s} et E^{u}, respectivement.*
Précisément, pour $W^{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{eq}})$:
Il existe $r > 0$ et $h : \bar{B}(u_{\mathrm{eq}}, r/2) \cap (u_{\mathrm{eq}} + E^{\mathrm{s}}) \to (u_{\mathrm{eq}} + E^{\mathrm{u}})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $h(u_{\mathrm{eq}}+v) = u_{\mathrm{eq}}+o(|v|)$ et, étant donnée une solution u de (1.1)*, il y ait équivalence entre*
(i) u est définie sur $[0,\infty[$, et à valeurs dans $\bar{B}(u_{\mathrm{eq}}, r)$,
et
(ii) $u(0)$ appartient au graphe de h.
Dans ce cas, u tend vers u_{eq} avec une décroissance en $e^{-\mu t}$, pour tout $\mu > 0$ tel que $\mu < \min(\{-Re(\lambda) \mid \lambda \in Sp(f'(u_{\mathrm{eq}})) \text{ et } Re(\lambda) < 0\}$.
Le graphe de h est alors $W^{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{eq}}) \cap \bar{B}(u_{\mathrm{eq}}, r)$.

Remarque : Le fait que $W^{\mathrm{u}}(u_{\mathrm{eq}}) \setminus \{u_{\mathrm{eq}}\}$ soit non vide implique que u_{eq} est instable.

Chapitre 2

Équations aux dérivées partielles : introduction, EDP linéaires à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$

2.1 Introduction

Une *équation aux dérivées partielles* (EDP) est une relation de la forme

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \ldots, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right) = 0, \tag{2.1}$$

portant sur une fonction inconnue u des variables $(x_1, \ldots, x_d)$ appartenant à un ouvert de $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{K}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Lorsque $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} u$, ou $\partial_x^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_d}^{\alpha_d} u$: dans (2.1) ne figure qu'un nombre fini de ces dérivées partielles, et F est une fonction donnée, à valeurs dans $\mathbb{K}$ (EDP *scalaire*). Un *système* d'EDP est la donnée de plusieurs EDP scalaires (F à valeurs dans $\mathbb{K}^M$).

Cela correspond à prescrire M "loi(s)" sur u, qui représente N quantité(s) fonction(s) d'une variable $x = (x_1, \ldots, x_d)$ repérant une "position" (éventuellement, dans l'espace-temps : alors, u dépend de (t, x)...). Lorsque u représente plusieurs quantités, elles sont en général interdépendantes, par le biais d'un couplage, linéaire ou non-linéaire (même dans le cas où u est scalaire, des phénomènes d'autointeraction sont possibles).

Quelques exemples tirés de la physique, de la chimie, de la dynamique des populations, des maths...

• L'équation de Laplace,

$$\Delta u = 0,$$

et l'équation de Poisson,

$$\Delta u = f,$$

où f est un terme “source”, ou de “forçage”, donné. L'inconnue u est à valeurs scalaires. L'opérateur $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$ est le laplacien (qui s'applique coordonnée par coordonnée à $u = u(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^N$).
On rencontre ces équations entre autres en théorie (statique) de la gravité : le champ de gravité $g = g(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ engendré par une distribution de masse $\rho = \rho(x,y,z) \in \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ ($\ni (x,y,z)$) est donné par la loi de Gauss,

$$\mathrm{div} g = -4\pi G\rho,$$

où $G > 0$ est la constante de gravitation, et si u est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, sa divergence $\mathrm{div} u$ est donnée par

$$\mathrm{div} u = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u.$$

En cherchant g sous forme potentielle, c'est-à-dire $g = -\nabla\psi$, cela revient à imposer au potentiel ψ l'EDP

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho$$

(on vérifie que $\mathrm{div}\nabla = \Delta$).
La forme “divergence” exprime une conservation. Cela se traduit par exemple par le fait que, si X est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ à divergence nulle, avec ϕ^0 le flot (au temps 0) associé (qui, pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$, est défini au moins sur $[0,T] \times \overline{B}(\underline{x}, r)$), non seulement $\phi^0(t,\cdot)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de $\underline{x}$ (lorsque $t \in [0,T]$), mais de plus il préserve la mesure : son jacobien est identiquement égal à 1 **(Exo de TD ?)** En effet, ce jacobien est le déterminant de la matrice $J(t,x) = \left(\partial_{x_j}\phi_i^0(t,x)\right)_{1\le i,j\le d}$, et on a

$$\partial_t(\det J)(t,x) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(J(t,x))\,\partial_t J(t,x)) = \det(J(t,x))\ (\mathrm{div} X)(\phi^0(t,x)) = 0.$$

On en déduit que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ (où $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}^N)$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}^N$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact), $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \circ \phi^0(t,x)\,\mathrm{d}x$ est indépendant de t (et donc égal à $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,\mathrm{d}y$). Cela s'obtient par le changement de variables $y = \phi^0(t,x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\circ\phi^0(t,x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\varphi\circ\phi^0(t,x))\cdot\partial_t\phi^0(t,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\varphi\circ\phi^0(t,x))\cdot(X\circ\phi^0(t,x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\varphi(y)\cdot X(y)\,\mathrm{d}y = -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,\mathrm{div} X = 0.
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la formule d'intégration par parties,

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}), \forall g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{div} g = -\int_{\mathbb{R}^d} g\cdot\nabla f,$$

où on a utilisé la notation

$$\forall u, v \in \mathbb{K}^N, \quad u \cdot v = \sum_{j=1}^{N} u_j v_j$$

(de même, $\mathrm{div} u = \nabla \cdot u$).
Ainsi, en électrostatique, le champ électrique $E = E(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ engendré par une distribution de charges $\rho = \rho(x, y, z) \in \mathbb{R}$ est donné par la loi de Gauss disant que pour tout domaine $V \subset \mathbb{R}^3$, la somme des charges dans V est égale au flux de εE sortant de V à travers la frontière S de V (avec $\varepsilon > 0$ la permittivité électrique du milieu) :

$$\iiint_V \rho \,\mathrm{d}v = \iint_S \varepsilon E \cdot n \,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}(\varepsilon E) \,\mathrm{d}v,$$

par le théorème de Stokes (avec n la normale unitaire sortante au bord de V). Ceci étant valide pour tout domaine V, on en déduit que $\mathrm{div}(\varepsilon E) = \rho$.

• L'équation de la chaleur,

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0.$$

Historiquement, elle a été obtenue pour $u(t, x)$ représentant la température d'un matériau à l'instant t et à la position $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$:
- si $q = q(t, x) \in \mathbb{R}^d$ est le flux de chaleur, sortant, on a pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega u(t, x) \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} q \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = 0;$$

- la loi (empirique) de comportement de Fourier relie q à u,

$$q = -\kappa \nabla_x u,$$

où $\kappa > 0$ est un coefficient "de diffusion", si bien qu'on a

$$\partial_t u - \Delta_x (\kappa u) = 0.$$

Si le milieu est inhomogène, κ est en fait une fonction de la position x, et l'équation précédente est à coefficients variables. On peut aussi imaginer que κ dépende de u, auquel cas l'équation devient non-linéaire.

• L'équation de Schrödinger,
- de la mécanique quantique,

$$i\partial_t u = \Delta_x u + V u,$$

avec $V = V(t, x) \in \mathbb{K}$ un potentiel donné ($\Delta_x u$ correspond à l'énergie cinétique) ;
- et ses versions non linéaires provenant de l'optique non linéaire, de la physique des plasmas. . .,

$$i\partial_t u = \Delta_x u + V u + |u|^{2\sigma} u.$$

• Les équations de Maxwell, d'inconnues le champ électrique $E = E(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et le champ magnétique $B = B(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (avec $\varepsilon > 0$ la permittivité électrique, $\mu > 0$ la perméabilité magnétique),

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E - \mathrm{rot} B = j, \\ \mu \partial_t B + \mathrm{rot} E = 0, \end{cases}$$

où $j = j(t, x, y, z)$ est la densité de courant électrique (donnée, ou fonction de (E, B)), et le rotationnel $\mathrm{rot} v$ de $v = (v_1, v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donné par

$$\mathrm{rot} v = \nabla \wedge v, \quad \text{soit} \quad \mathrm{rot} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2 \\ \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3 \\ \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1 \end{pmatrix}.$$

Ces équations sont complétées par les conservations

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\varepsilon E) = \rho, \\ \mathrm{div}(\mu B) = 0, \end{cases}$$

où $\rho = \rho(t, x, y, z)$ est la densité de charge électrique (elle aussi, donnée, ou fonction de (E, B)). Ces deux dernières contraintes, lorsqu'elles sont satisfaites à un instant initial, sont en fait propagées, à condition d'avoir

$$\partial_t \rho = \mathrm{div} j$$

(grâce à la relation $\mathrm{div}\mathrm{rot} = 0$) ; c'est en particulier le cas si on a $j = 0$ et $\rho = 0$.

• L'équation des ondes, provenant entre autres des mouvements de cordes vibrantes, ou de membranes (avec $c > 0$ une vitesse),

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta_x u = 0;$$

l'équation de Klein-Gordon issue de la mécanique quantique relativiste (avec $m > 0$ une masse),

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta_x u + mu = 0.$$

• Des équations de la mécanique des fluides, disons dans le cas incompressible : équations d'Euler (si la viscosité ν est nulle) et de Navier-Stokes ($\nu > 0$),

$$\begin{cases} \mathrm{div} u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = \nu \Delta u, \end{cases}$$

où $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^d$ est le champ de vitesse ($x \in \mathbb{R}^d$, avec une dimension d'espace d *a priori* égale à 1, 2 ou 3), et $p = p(t, x) \in \mathbb{R}$ est le champ de pression. La première équation traduit un bilan de quantité de matière ; la seconde, un bilan de quantité de mouvement. La "vraie" inconnue est en fait la vitesse, qui détermine la pression, comme on le voit en appliquant l'opérateur divergence à la deuxième équation : ainsi, $\Delta p = -\mathrm{div}((u \cdot \nabla)u)\ldots$

• Les lois de conservation,

$$\partial_t u + \mathrm{div} f(u) = 0,$$

où x appartient à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^N$ ($N = 1$ correspond au cas scalaire, $N > 1$ au cas d'un système), f est définie sur une partie de $\mathbb{R}^N$, à valeurs dans les matrices réelles $d \times N$ (ou $f = (f_1, \ldots, f_N)$, avec chaque flux f_j à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et le système s'écrit $\partial_t u_j + \mathrm{div} f_j(u) = 0$, $j = 1, \ldots, N$).

• Les équations (et systèmes) de réaction-diffusion (de la chimie, de la dynamique des populations...),

$$\partial_t u - \Delta u = f(u)$$

(où le laplacien traduit la diffusion, et le couplage f traduit la réaction).

• En géométrie, on utilise des "flots géométriques", tels que les "mouvements par courbure moyenne", qui permettent de déformer des courbes, surfaces... par des équations paraboliques (type "chaleur") non-linéaires.

On a ainsi des équations *d'évolution* (comportant ∂_t : une variable de "temps" est distinguée), pour lesquelles on s'intéressera au problème de Cauchy (avec $u_{|t=0} = u(0,\cdot)$ donné ; on pensera à $u : I \times \Omega \to \mathbb{K}$ aussi comme à une fonction $\tilde{u}$ de I dans un espace de fonctions de Ω dans $\mathbb{K}$ – cela revient à écrire $u(t,x) = (\tilde{u}(t))(x)$, et on confondra souvent u et $\tilde{u}$).
Les autres équations sont *statiques*.
Pour toutes, il peut y avoir besoin de spécifier des *conditions au bord* de l'ouvert Ω (penser à une peau de tambour attachée, ou à un matériau dont la température est fixée à une extrémité par un thermostat...).
Une solution d'une EDP donnée qui est continue, ainsi que toutes ses dérivées intervenant dans l'EDP, est dite *solution classique* (on verra d'autres types de solutions... il faut penser que les espaces de fonctions continues ne sont pas forcément adaptés, comme pour l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta_x u$, qu'on ne peut pas voir comme une EDO en dimension infinie sur $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, car le laplacien n'envoie pas E dans E).

Les questions qu'on va aborder sont celles de l'existence de solutions, de leur unicité, de leur dépendance par rapport aux données, et de leur comportement qualitatif (vitesse de propagation, propagation de la régularité, préservation de la positivité, asymptotiques en temps grand...).
On va commencer par s'intéresser aux cas les plus simples : les équations linéaires, à coefficients constants, sur tout $\mathbb{R}^d$.
Pour les équations d'évolution $\partial_t u + P(\partial_x)u = 0$, on fixera un intervalle I ouvert contenant 0, et on considèrera des opérateurs différentiels $P(\partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$ d'ordre m croissant...
Une terminologie classique provient de l'étude des équations scalaires associées à des opérateurs différentiels d'ordre 2, en deux variables ($(t,x) \in \mathbb{R}^2$, noté (x_1, x_2)), soit

$$a_{11}\partial_{x_1}^2 + a_{12}\partial_{x_1}\partial_{x_2} + a_{21}\partial_{x_2}\partial_{x_1} + a_{22}\partial_{x_2}^2 + b_1\partial_{x_1} + b_2\partial_{x_2} + c.$$

Selon le type de la conique associée au polynôme $a_{11}\xi_1^2 + (a_{12} + a_{21})\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + c$, on parle d'équation *hyperbolique*, *parabolique* ou *elliptique*.

2.2 Systèmes hyperboliques

2.2.1 Le cas d'une équation : transport

Le cas le plus simple est celui d'une seule équation, de la forme

$$\partial_t u + v_1 \partial_{x_1} u + \cdots + v_d \partial_{x_d} u = f,$$

où on se donne $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, et l'inconnue est $u : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Si $\underline{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est donnée, on a le problème de Cauchy associé,

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \partial_x u = f \quad \text{sur } I \times \mathbb{R}^d, \\ u_{|t=0} = \underline{u}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Proposition 2.2.1. *Soit $v \in \mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, $\underline{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$. Alors, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ à* (2.2)*. Elle est donnée par*

$$\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^d, \quad u(t, x) = \underline{u}(x - tv) + \int_0^t f(t', x + (t' - t)\, v)\, \mathrm{d}t'.$$

Remarques :

1) La solution ci-dessus est donnée par une formule de type "Duhamel", ou "variation de la constante", u étant superposition de la solution du problème libre ($f = 0$) avec donnée initiale $\underline{u}$ et de la solution du problème avec second membre f et donnée initiale nulle.
2) Concernant la solution u du problème libre, le graphe de $u(t, \cdot) = \underline{u}(\cdot - tv)$ est le translaté de tv de celui de de $\underline{u}$, d'où l'appellation de "transport".
3) **(Exo de TD ?)** Lorsque $v \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\underline{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, exprimer en fonction de v, α et $\underline{u}$ la solution $u \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ de

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \partial_x u + \alpha u = f \quad \text{sur } I \times \mathbb{R}^d, \\ u_{|t=0} = \underline{u}. \end{cases}$$

2.2.2 Équation des ondes

Elle s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta_x u = f \quad (t \in I, x \in \mathbb{R}^d), \tag{2.3}$$

pour un $c > 0$ (une célérité) et un $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ donnés.

En dimension 1 d'espace : la solution de d'Alembert.

Sous forme d'exercice(s) :
1. Une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{K})$ est solution de (2.3) si et seulement si il existe $F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{K})$ telles que pour tous $t, x \in \mathbb{R}$, $u(t,x) = F(x-ct)+G(x+ct)$ (lorsque le temps t varie, le graphe de $u(t,\cdot)$ est alors constitué une "bosse" se translatant à vitesse $|c|$ dans le sens des x croissants, et d'une autre se translatant à vitesse $|c|$ dans le sens des x décroissants).
(*indication* : changement de variable $(t,x) \mapsto (x-ct, x+ct)$).
2. Il y a une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \\ \partial_t u_{|t=0} = u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

(*indication* : les fonctions F et G précédentes s'expriment en fonction de u_0 et u_1).
3. De même, il y a une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ au problème de Cauchy associé à l'équation d'ondes avec second membre $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, et données initiales u_0, u_1 comme ci-dessus (l'expression de u en fonction de u_0, u_1 et f est un peu plus compliquée...).

En dimension d d'espace.

On se donne $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$, $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}(I\times\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$. Alors, si $u \in \mathcal{C}^2(I\times\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ est solution de (2.3) avec conditions initiales $u_{|t=0} = u_0$ et $\partial_t u_{|t=0} = u_1$, on a $U := (\partial_t u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_d} u)^{\mathrm{t}} \in \mathcal{C}^1(I\times\mathbb{R}^d,\mathbb{K}^{1+d})$ solution de

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_{x_j} U = F \quad \text{sur } I\times\mathbb{R}^d, \tag{2.4}$$

avec $A_j \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{K})$, $(A_j)_{ik} = c^2$ si $(i,k) = (1, j+1)$, 1 si $(i,k) = (j+1,1)$, et 0 sinon ; $F = (c^2 f, 0, \dots, 0)^{\mathrm{t}}$; de plus, U satisfait les conditions initiales

$$U_{|t=0} = (u_1, \partial_{x_1} u_0, \dots, \partial_{x_d} u_0)^{\mathrm{t}}.$$

On notera qu'après changement de variable de temps $t \mapsto ct$, qui ramène à $c = 1$, on a des matrices A_j symétriques.
Pour que la résolution du problème de Cauchy associé à (2.4) donne une solution de l'équation des ondes, il faut que la solution U ait la forme bien particulière $(\partial_t u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_d} u)$, en particulier à $t = 0$. En fait, si $U \in \mathcal{C}^1(I\times\mathbb{R}^d,\mathbb{K}^{1+d})$ est solution de (2.4) avec $U_{|t=0} = (u_1, \partial_{x_1} u_0, \dots, \partial_{x_d} u_0)^{\mathrm{t}}$, alors $u : I\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, définie par

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t U_1(t',x)\,\mathrm{d}t',$$

vérifie $u_{|t=0} = u_0$ et $\partial_t u_{|t=0} = u_1$, est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de (2.3). En effet,

$$\partial_t^2 u = \partial_t U_1 = -\left(\sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} U\right)_1 + c^2 f = -c^2 \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} U_{j+1} + c^2 f,$$

et pour tout $j \in \mathbb{N}_d$, $\partial_t U_{j+1} = \partial_{x_j} U_1$, si bien que

$$U_{j+1}(t,x) = U_{j+1}(0,x) + \int_0^t \partial_{x_j} U_1(t',x)\,\mathrm{d}t' = \partial_{x_j} u_0(x) + \int_0^t \partial_{x_j} U_1(t',x)\,\mathrm{d}t' = \partial_{x_j} u(t,x).$$

2.2.3 Cas des systèmes

On s'intéresse à des systèmes d'équations de la forme

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u = f,$$

d'inconnue $u = (u_1, \ldots, u_N)^{\mathrm{t}}$, avec f à valeurs dans $\mathbb{K}^M$ donnée, ainsi que les matrices $A_j \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{K})$: on a M équations et N inconnues.
En fait, on prendra $M = N$, pour éviter
- la *sous-détermination*, s'il y a plus d'inconnues que d'équations ; par exemple, avec une seule équation, pour deux inconnues :

$$\partial_t u_1 + a_{11}\partial_{x_1} u_1 + a_{21}\partial_{x_2} u_1 + a_{12}\partial_{x_1} u_2 + a_{22}\partial_{x_2} u_2 = f,$$

on n'aura pas d'unicité, car "pour tout u_2", on obtiendra un u_1 associé ;
- la *sur-détermination*, s'il y a moins d'inconnues que d'équations ; par exemple, avec deux équations, pour une seule inconnue :

$$\begin{cases} \partial_t u + 0 \times \partial_x u = f, \\ \partial_t u + 0 \times \partial_x u = g, \end{cases}$$

n'a pas de solution, dès que $f \neq g$.
On va donc étudier (le problème de Cauchy associé à) des systèmes de la forme

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u = f,$$

où $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}^N$ et $A_j \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ sont donnés. L'espace $\mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{K}^N)$ n'est pas adapté pour montrer l'existence de solutions.

Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz

Lorsque $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on note

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j \quad \text{et} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}.$$

Définition 2. *On note* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *l'*espace de Schwartz *des fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *à décroissance rapide, ainsi que toutes leurs dérivées,*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \quad x^\alpha \partial_x^\beta \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\}.$$

C'est un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, qu'on munit de la distance* $d_{\mathcal{S}}$*,*

$$d_{\mathcal{S}}(\varphi, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(\varphi - \psi)}{1 + p_n(\varphi - \psi)},$$

où p_n *est la norme sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *donnée par*

$$p_n(\varphi) = \sup\{\|x^\alpha \partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty}, |\alpha|, |\beta| \leq n\}.$$

Cette distance est invariante par translation, et $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d_{\mathcal{S}})$ *est complet (c'est en fait un "espace de Fréchet").*

Remarques :

1) On notera sans ambiguité $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}^N$.
2) On voit vite que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
3) L'espace $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d_{\mathcal{S}})$ est borné : pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $d_{\mathcal{S}}(\varphi, \psi) \leq 2$.
4) La topologie sur cet espace métrique est décrite par la convergence des suites, et on a
$$d_{\mathcal{S}}(\varphi_k, \varphi) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\, p_n(\varphi_k, \varphi) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 2.2.2. *La transformation de Fourier* $\mathcal{F}$*, définie par*

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x,$$

est une bijection linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *et un homéomorphisme, d'inverse donné par*

$$(\mathcal{F}^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-d}(\overline{\mathcal{F}}\psi)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi)\, e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Définition 3. *On définit sur* $\mathcal{C}(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ *la* transformation de Fourier partielle *(en espace)* $\mathcal{F}$ *par :*

$$\forall t \in I, \quad \widehat{u}(t) = \widehat{u(t)}.$$

Pour tous $k \in \mathbb{N}$ *et* $u \in \mathcal{C}^k(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$*, on a* $\widehat{u} \in \mathcal{C}^k(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$*, et si* $0 < \ell \leq k$*,* $\partial_t^\ell \widehat{u} = \widehat{\partial_t^\ell u}$*.*

Remarques :

1) L'espace $\mathcal{C}^k(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ est définie de la façon habituelle, $u : I \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ étant dérivable au temps t si le taux d'accroissement $\dfrac{1}{h}(u(t+h) - u(t))$ a une limite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ lorsque h tend vers 0 : la limite est alors notée $u'(t)$, ou $\partial_t u(t)$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{C}^k(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{C}^k(I \times \mathbb{R}^d)$.

Problème de Cauchy dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

On se donne $\underline{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}^N)$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}^N))$.
On a $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t u + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j \partial_{x_j} u = f, \\ u_{|t=0} = \underline{u}, \end{cases} \tag{2.5}$$

si et seulement si $\widehat{u}$ est solution (dans $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$) de

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u} + iA(\xi)\widehat{u} = \widehat{f}, \quad \text{où} \quad A(\xi) = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \xi_j A_j, \\ \widehat{u}_{|t=0} = \widehat{\underline{u}}, \end{cases}$$

qui ressemble à une EDO. L'espace de Schwartz n'étant pas un Banach, on ne peut pas appliquer nos résultats habituels directement, mais on peut le faire à $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé : $t \mapsto \widehat{u}(t, \xi)$ est alors solution d'une EDO (linéaire) paramétrée par ξ (avec $t \mapsto \widehat{f}(t, \xi) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$), si bien que

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{-itA(\xi)} \widehat{\underline{u}}(\xi) + \int_0^t e^{-i(t-t')A(\xi)} \widehat{f}(t', \xi) \mathrm{d}\xi.$$

Par application de la transformation de Fourier inverse, cela assure l'unicité de la solution $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ du problème de Cauchy (2.5). Pour avoir l'existence, il faut s'assurer que le second membre de la relation ci-dessus définit bien un élément de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$. En particulier, à t fixé, et même avec $f = 0$, on doit supposer que $A(\xi)$ n'a pas de valeurs propres non réelles, car du faide l'homogénéité

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad A(\alpha\xi) = \alpha A(\xi),$$

les valeurs propres de $A(\xi)$ sont exactement $|\xi|$ fois celles de $A(\xi/|\xi|)$, et une valeur propre non réelle introduirait une croissante (en ξ) exponentielle. Pour simplifier, et parce que cela correspond à beaucoup de cas “physiques”, on supposera plus...

Définition 4. *L'opérateur différentiel $L = \partial_t + \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_{x_j}$ est dit* hyperbolique symétrique *si les matrices $A_j \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ sont (toutes) symétriques (au sens réel ou complexe, selon que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : $A_j^\star = A_j$.*

Remarques :

1) De même que la version “système de l'équation des ondes vue plus haut, le système de Maxwell est hyperbolique symétrique. C'est aussi le cas du système obtenu par linéarisation des équations d'Euler autour d'un champ de vitesse constant.
2) Dans tout ce qui suit, on munira $\mathbb{K}^N$ de son produit scalaire canonique, et la norme associée sera notée $|\cdot|$. On notera $\|\cdot\|$ la norme matricielle (sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$) associée.

3) Lorsque L est hyperbolique symétrique, pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, la matrice $\exp(-itA(\xi))$ est unitaire (c'est-à-dire que son adjoint est son inverse ; elle est par conséquent de norme 1).

Lemme 2. *Si L est hyperbolique symétrique, alors*
(i) l'application $\varphi \mapsto \left(t \mapsto e^{-itA}\varphi\right)$ envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$;
(i) pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $g \mapsto \left(t \mapsto (\xi \mapsto \int_0^t e^{-i(t-t')A(\xi)} g(t', \xi)\, \mathrm{d}t')\right)$ envoie $\mathcal{C}^k(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ dans $\mathcal{C}^{k+1}(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

Théorème 6. *Soit $L = \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j}$ un opérateur hyperbolique symétrique. Alors, pour tous $\underline{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ au problème de Cauchy (2.5).*
De plus, cette solution (classique) vérifie l'inégalité (ou estimation) d'énergie

$$\forall t \in I, \quad \|u(t)\|_{L^2} \leq \|\underline{u}\|_{L^2} + \int_0^t \|f(t')\|_{L^2} \mathrm{d}t'.$$

Lorsque $f = 0$, on a la conservation d'énergie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t)\|_{L^2} = \|\underline{u}\|_{L^2}.$$

Remarques :

1) La preuve montre qu'on a la loi de conservation

$$\partial_t(|u|^2) + 2\mathrm{Re}\left(\bar{u} \cdot \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u\right) = 2\mathrm{Re}(\bar{u} \cdot f) \quad \text{sur } I \times \mathbb{R}^d.$$

Cette relation a la forme d'une loi de conservation parce que, grâce au fait que les matrices A_j sont symétriques,

$$2\mathrm{Re}\left(\bar{u} \cdot \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u\right) = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(\bar{u} \cdot A_j u) = \mathrm{div}\left((\bar{u} \cdot A_j u)_{1 \leq j \leq d}\right).$$

2) L'estimation d'énergie donne l'unicité, si on l'applique à la différence de deux solutions du (même) problème de Cauchy. La même méthode donne l'estimation d'énergie (et donc l'unicité) dans une classe de solutions (classiques) beaucoup plus grande, à savoir l'ensemble des $u \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}^d)$ telles que $u, \partial_t u, \nabla_x u \in \mathcal{C}(I, L^2(\mathbb{R}^d))$.
3) L'estimation d'énergie implique même la continuité de la solution par rapport aux données, mesurée en norme $\|\cdot\|_{L^2}$: si u_1 et u_2 sont les solutions (données par la théorème) associées respectivement à $(\underline{u}_1, f_1)$ et $(\underline{u}_2, f_2)$, alors

$$\forall t \in I, \quad \|(u_2 - u_1)(t)\|_{L^2} \leq \|\underline{u}_2 - \underline{u}_1\|_{L^2} + \int_0^t \|(f_2 - f_1)(t')\|_{L^2} \mathrm{d}t'.$$

4) Pour l'équation des ondes
$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = f,$$
avec les conditions initiales $u_{|t=0} = u_0$, $\partial_t u_{|t=0} = u_1$, on a
$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)\cos(c|\xi|t) + \widehat{u_1}(\xi)\frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|} + \int_0^t \widehat{f}(t',\xi)\frac{\sin(c|\xi|(t-t'))}{c|\xi|}\,\mathrm{d}t'.$$

Propagation à vitesse finie

Lorsque $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, on définit son rayon spectral $r(M)$ comme la limite lorsque n tend vers l'infini, pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$, de $\|M^n\|^{1/n}$. Il est inférieur ou égal à $\|M\|$, et est en fait égal à $\sup(\{\sqrt{\mu}, \mu \in \mathrm{Sp}(M^\star M)\})$. Quand M est symétrique, c'est aussi $\sup(\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\})$.

Théorème 7. *Soit $L = \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j}$ un opérateur hyperbolique symétrique,*
$c = \sup(\{r(A(\xi)), |\xi| \leq 1\})$, $T > 0$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$,
$\overline{C} = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \mid |x - \underline{x}| \leq R - ct, 0 \leq t \leq \inf(T, R/c)$,
$B_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (t,x) \in \overline{C}\}$.
Alors, pour tout $u \in \mathcal{C}(\overline{C})$,
$$\forall t \in [0,T], \quad \|u(t)\|_{L^2(B_t)} \leq \|u(0)\|_{L^2(B_0)} + \int_0^t \|Lu(t')\|_{L^2(B_{t'})}\mathrm{d}t'.$$

Corollaire 1 (unicité locale)**.** *Avec les notations précédentes, si $u \in \mathcal{C}(\overline{C})$ vérifie*
$$\begin{cases} Lu = 0 \ \ \textit{dans } \overline{C}, \\ u_{|t=0} = 0 \ \ \textit{dans } B_0, \end{cases}$$
alors $u = 0$ (sur $\overline{C}$ entier).

Remarque : On en déduit la propriété de propagation à vitesse finie des solutions u de $Lu = 0$ (dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$) : si $u_{|t=0}$ est à support dans la boule $B(\underline{x}, R)$, alors pour tout $t \geq$, $u(t)$ est à support dans $B(\underline{x}, R + ct)$.

Des espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$

On part de l'idée que la transformation de Fourier fait correspondre $\partial_{x_j}\varphi$ et $i\xi_j\widehat{\varphi}$. Alors, si $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\xi \mapsto \xi_j\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, en posant $\psi_j = \mathcal{F}^{-1}(i\xi_j\widehat{\varphi})$, on a pour tout $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, par Parseval :
$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi}\cdot\partial_{x_j}\chi = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{\varphi}}\cdot(i\xi_j\widehat{\chi}) = -\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi_j}\cdot\chi,$$
qui a la forme d'une intégration par parties.

Définition 5. *On dit que* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *admet une* dérivée faible *par rapport à* x_j *s'il existe* $\psi_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *telle que pour tout* $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot \partial_{x_j}\chi = -\int_{\mathbb{R}^d} \psi_j \cdot \chi.$$

Une telle fonction ψ_j *est unique. Si elle existe, elle est appelée la dérivée faible de* φ*, et on la note* $\partial_{x_j}\varphi$.

On a en fait la

Proposition 2.2.3. *Soit* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$*. On a équivalence entre les trois assertions :*
(i) $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *admet une dérivée faible par rapport à* x_j *;*
(ii) $\xi \mapsto \xi_j \widehat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *;*
(iii) il existe $C > 0$ *telle que pour tout* $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot \partial_{x_j}\chi \right| \leq C\|\chi\|_{L^2}.$$

Si φ *admet effectivement une dérivée faible* $\partial_{x_j}\varphi$*, alors* $\partial_{x_j}\varphi = \mathcal{F}^{-1}(i\xi_j\widehat{\varphi})$.

Remarques :
1) Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ avec sa dérivée partielle classique $\partial_{x_j}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors φ admet une dérivée faible par rapport à x_j, et $(\partial_{x_j}\varphi)^{\text{faible}} = (\partial_{x_j}\varphi)^{\text{classique}}$.
2) Si $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ admetttent des dérivées faibles $\partial_{x_j}\varphi$ et $\partial_{x_j}\psi$ pour un certain $j \in \mathbb{N}_d$, alors
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot \partial_{x_j}\psi = -\int_{\mathbb{R}^d} \psi \cdot \partial_{x_j}\varphi.$$

À présent, on généralise cette procédure à des “dérivées non entières”, en remarquant que $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ admet des dérivées faibles par rapport à $x_1, \ldots, x_d$ si et seulement si $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{1/2}\widehat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Définition 6. *Soit* $s \geq 0$*. On définit l'*espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ *par*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid (1 + |\cdot|^2)^{s/2}\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Muni du produit scalaire

$$(\varphi \mid \psi)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} \cdot \widehat{\psi}(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

c'est un espace de Hilbert.

(cela vient du fait que $H^s(\mathbb{R}^d)$ est isométrique à $L_s^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d, (1 + |\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi))$
Remarques :
1) Si $s_2 \geq s_1 \geq 0$, alors $H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continument dans $H^{s_1}(\mathbb{R}^d)$, ce qu'on écrira $H^{s_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^d)$.

2) Si $s \geq 1$ et $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}_d$, φ admet une dérivée faible, et $\partial_{x_j}\varphi \in H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$.
3) Étant donné $\rho \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 sur $]-1,1[$, on a $|\cdot|^\alpha \rho(|x|^2) \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ssi $\alpha > 1 - d/2$.

Proposition 2.2.4. *Si $k \in \mathbb{N}$ et $s > d/2 + k$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continument dans l'espace $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^k(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, bornées ainsi que leurs dérivées (muni de la norme usuelle).*

Une fonction appartenant à tous les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ (un exemple en dimension 1 : $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$). Également, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans tous les espaces de Sobolev, et même :

Proposition 2.2.5. *Pour tout $s \geq 0$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Problème de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^d)$

Théorème 8. *Soit $L = \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j}$ un opérateur hyperbolique symétrique. Pour tous $s \geq 1$, $\underline{u} \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d))$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(I, H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$ au problème de Cauchy $Lu = f$, $u_{|t=0} = \underline{u}$. Elle est donnée par :*

$$\forall t \in I, \quad u(t) = S(t)\underline{u} + \int_0^t S(t-t') f(t')\,\mathrm{d}t', \quad \text{où } S(t)\varphi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-itA}\widehat{\varphi}).$$

De plus, cette solution vérifie, lorsque $0 \leq s' \leq s$:

$$\forall t \in I, \quad \|u(t)\|_{H^{s'}} \leq \|\underline{u}\|_{H^{s'}} + \int_0^t \|f(t')\|_{H^{s'}}\,\mathrm{d}t'$$

(et si $f = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|u(t)\|_{H^{s'}} = \|\underline{u}\|_{H^{s'}}$).

Remarque : Pour $u \in \mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(I, H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$, satisfaire $Lu = f$ équivaut à $\partial_t \widehat{u} + iA\widehat{u} = \widehat{f}$ (relation dans $\mathcal{C}^1(I, L^2_{s-1}(\mathbb{R}^d))$, mais ce n'est pas une EDO...). On a alors un candidat solution au problème de Cauchy grâce au lemme suivant, qui dit que le propagateur $S(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-itA}\mathcal{F})$, déjà utilisé sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, se prolonge à $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 2.2.6. *Pour tout $s \geq 0$,*
(i) l'application $\varphi \mapsto (t \mapsto S(t)\varphi)$, où $S(t)\varphi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-itA}\widehat{\varphi})$, est bien définie, de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$; si $s \geq 1$, pour tout $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a $S(t)\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\partial_t(S(t)\varphi) = -\sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j}(S(t)\varphi)$;
(ii) l'application $\mathcal{I} : g \mapsto (t \mapsto \int_0^t S(t-t')g(t')\,\mathrm{d}t')$ est bien définie, de $\mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d))$ dans lui-même ; si $s \geq 1$, pour tout $g \in \mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d))$, on a $\mathcal{I}(g) \in \mathcal{C}^1(I, H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$, et $\forall t \in I$, $\partial_t \mathcal{I}(g) + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} \mathcal{I}(g) = g$.

Remarques :

1) La famille $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ forme un groupe à un paramètre d'isométries de $H^s(\mathbb{R}^d)$.
2) Le théorème montre que l'application (linéaire) $(\underline{u}, f) \mapsto u$ est continue, de $H^s(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d))$ dans $\mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d))$. Compte tenu de l'existence et de l'unicité des solutions, et de leur dépendance continue par rapport aux données, on dit que le problème de Cauchy est *bien posé* dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
3) Si $s > d/2 + 1$, la solution u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times \mathbb{R}^d$, et c'est une solution classique.
4) À l'inverse, l'application $(\underline{u}, f) \mapsto u$ (qui est uniformément continue) se prolonge de façon unique en une application continue de $H^s(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d))$ dans $\mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d))$, pour $s \geq 0$. C'est une manière "raisonnable" de définir une notion de solution généralisée (donnée en fait par la formule du théorème).
5) Le problème d'évolution est *réversible en temps* : avec $u(0) = \underline{u}$ donné, si $[0, T] \subset I$, on peut résoudre le problème de Cauchy sur $[0, T]$, et si on prend $u(T)$ comme donnée initiale (à $t = T$), la solution du problème de Cauchy associé existe sur $[0, T]$, et vaut $\underline{u}$ à $t = 0$.

On finit ce paragraphe avec des opérateurs hyperboliques symétriques plus généraux, de la forme $L = \partial_t + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j \partial_{x_j} + B$:

Théorème 9. *Soit $A_1, \ldots, A_d, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, avec les A_j symétriques (on dit alors que L ci-dessus est hyperbolique symétrique), $s \geq 1$, $\underline{u} \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d))$. Alors, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}(I, H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(I, H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$ au problème de Cauchy $Lu = f$, $u_{|t=0} = \underline{u}$, et il existe $C > 0$, ne dépendant que de B, telle que, lorsque $0 \leq s' \leq s$:*

$$\forall t \in I, \quad \|u(t)\|_{H^{s'}} \leq e^{Ct} \left(\|\underline{u}\|_{H^{s'}} + \int_0^t \|f(t')\|_{H^{s'}} \,\mathrm{d}t' \right).$$

2.3 Équations paraboliques

2.3.1 Généralités

On considère cette fois un opérateur différentiel $\partial_t + P(\partial_x)$, où P est un polynôme de degré 2 : il se décompose en termes homogènes $P = P_2 + P_1 + P_0$, avec $P_2 = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} X_i X_j$, $P_1 = \sum_{k=1}^d b_k X_k$, $P_0 = c$ dans $\mathbb{R}[X]$ (pour simplifier, on se cantonnera au cas scalaire et réel).
Ainsi, P_2 est une forme quadratique. Il existe une matrice A de taille $d \times d$, rélle et symétrique, telle que $P_2(\xi) = \xi \cdot A\xi$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. On peut la réduire en base orthonormée : il existe une matrice orthogonale $U \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ telle que $U^{\mathrm{t}} A U$ soit diagonale. On peut alors traiter comme précédemment le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + P(\partial_x) u = f, \\ u_{|t=0} = \underline{u}. \end{cases} \tag{2.6}$$

dans la classe de Schwartz. On va voir qu'il est avantageux de remplacer l'intervalle de temps I par $[0,T[$.
1. Si P_2 reste négatif (ou nul) sur $\mathbb{R}^d$, pour tous $\underline{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}([0,T[,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, il existe une unique soution $u \in \mathcal{C}^1([0,T[,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ au problème de Cauchy (2.6). On peut même écrire des formules explicites telles que, si $P_2 < 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$:

$$u(t,x) = e^{-ct}\left(\mathcal{F}^{-1}(\eta \mapsto e^{t\eta\cdot U^t AU\eta}) \star (\underline{u} \circ U)\right)(U^t(x-tb)).$$

2. S'il existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que $P_2(\xi) > 0$, alors il existe $\underline{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que le problème de Cauchy (2.6) (avec $f = 0$) n'ait pas de solution dans $\mathcal{C}^1([0,T[,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, quel que soit $T > 0$.

Définition 7. *L'opérateur $L = \partial_t + P(\partial_x)$ est dit* parabolique *si on a $P_2 < 0$ sur tout $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.*

Remarque : Avoir seulement $P_2 \leq 0$ correspond à un cas dégénéré. Pour la matrice symétrique A telle que $P_2(\xi) = \xi \cdot A\xi$, avoir $P_2 < 0$ sur tout $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ équivaut au fait que toutes les valeurs propres de A soit strictement négatives, et aussi à l'existence de $C > 0$ telle que : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \cdot A\xi \leq -C|\xi|^2$. Dans ce cas, les termes d'ordre inférieur dans l'opérateur (le vecteur b...) peuvent être non réels : la croissance qu'ils engendrent quand $|\xi|$ tend vers l'inifini est "compensée" par $P_2(\xi)$.

3. On se ramène donc au cas modèle de l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = f$ ($A = -\mathrm{Id}_d$). Lorsque $\underline{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}([0,T[,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, l'unique solution u au problème de Cauchy dans $\mathcal{C}^1([0,T[,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ est donnée pour $t > 0$ par

$$u(t,x) = (K(t) \star \underline{u})(x) + \int_0^t (K(t-t') \star f(t'))(x)\,\mathrm{d}t',$$

où

$$K(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2})(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}.$$

2.3.2 Équation de la chaleur

Pour l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \Delta u = f, \tag{2.7}$$

on s'intéressera au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T[\text{ ou } t \in]0,T[, \\ u_{|t=0} = \underline{u}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Lorsque I est un intervalle (réel) quelconque et $s \geq 2$, $u \in \mathcal{C}([0,T[,H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1([0,T[,H^{s-2}(\mathbb{R}^d))$ satisfait (2.7) (sur $I \times \mathbb{R}^d$, avec $f \in \mathcal{C}([0,T[,H^{s-2}(\mathbb{R}^d)))$ si et seulement si $\partial_t \widehat{u} + |\xi|^2 \widehat{u} = \widehat{f}$ (dans $\mathcal{C}([0,T[,L^2_{s-2}(\mathbb{R}^d)))$.

Proposition 2.3.1. *Soit* $s \geq 0$.
(i) L'application $\varphi \mapsto (t \mapsto T(t)\varphi)$, *où* $T(t)\varphi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2}\widehat{\varphi})$, *est bien définie sur* $H^s(\mathbb{R}^d)$, *à valeurs dans* $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \bigcap_{s' \geq 0} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star, H^{s'}(\mathbb{R}^d))$, *qui est inclus dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^d)$. *De plus, si* $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $t \mapsto T(t)\varphi$ *est solution du problème de Cauchy* (2.8) *avec* $f = 0$, $\underline{u} = \varphi$ *(sur* $\mathbb{R}_+^\star$, *et même* $\mathbb{R}_+$ *si* $s \geq 2$*), et on a, si* $0 \leq s' \leq s$:

$$\forall t \geq 0, \quad \|T(t)\varphi\|_{H^{s'}}^2 + 2\int_0^t \|\nabla T(t')\varphi\|_{H^{s'}}^2 \mathrm{d}t' = \|\varphi\|_{H^{s'}}^2.$$

(ii) L'application $\mathcal{J} : g \mapsto (t \mapsto \int_0^t T(t-t')g(t')\,\mathrm{d}t')$ *est bien définie sur* $\mathcal{C}([0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$, *à valeurs dans* $\mathcal{C}([0,T[, H^{s+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ *pour tout* $\alpha \in [0,2[$. *De plus, lorsque* $g \in \mathcal{C}([0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$,
(a) si $s \geq 2$, *on a aussi* $\mathcal{J}(g) \in \mathcal{C}^1([0,T[, H^{s-2}(\mathbb{R}^d))$;
(b) si $s > 0$, *on a* $\mathcal{J}(g) \in \mathcal{C}^1([0,T[, H^{s'}(\mathbb{R}^d))$, *pour* $0 \leq s' < s$;
(c) si $s \geq 0$ *et* $g \in \mathcal{C}^1([0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$, *on a* $\mathcal{J}(g) \in \mathcal{C}^1([0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$.
Dans ces trois cas, $\mathcal{J}(g)$ *est solution du problème de Cauchy* (2.8) *sur* $[0,T[$ *avec* $f = g$, $\underline{u} = 0$.

Théorème 10. *Soit* $s \geq 0$, $\underline{u} \in H^s(\mathbb{R}^d)$ *et* $f \in \mathcal{C}([0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$. *On suppose de plus* $f \in \mathcal{C}^1([0,T[, H^s(\mathbb{R}^d))$ *ou* $s > 0$. *Alors, il existe une unique solution* $u \in \mathcal{C}([0,T[, H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1([0,T[, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}(]0,T[, H^2(\mathbb{R}^d))$ *au problème de Cauchy* (2.8) *("sur* $]0,T[$*"). Elle est donnée par :*

$$\forall t \in [0,T[, \quad u(t) = T(t)\underline{u} + \int_0^t T(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t', \quad \text{où } T(t)\varphi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2}\widehat{\varphi}).$$

De plus, on a $u \in \mathcal{C}(]0,T[, H^{s+1}(\mathbb{R}^d))$, *et lorsque* $0 \leq s' \leq s$:

$$\forall t \in [0,T[, \quad \|u(t)\|_{H^{s'}} \leq \|\underline{u}\|_{H^{s'}} + \int_0^t \|f(t')\|_{H^{s'}}\,\mathrm{d}t'$$

et

$$\forall t \in [0,T[, \quad \|u(t)\|_{H^{s'}}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(t)\|_{H^{s'}}^2 \mathrm{d}t' \leq \|\underline{u}\|_{H^{s'}}^2 + 2\int_0^t |(f(t') \mid u(t'))_{H^{s'}}|\,\mathrm{d}t'.$$

Remarques :

1) La famille $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe à un paramètre (lorsque $0 \leq t' \leq t$, $T(t) = T(t-t') \circ T(t')$) de contractions (au sens large : applications linéaires de norme inférieure ou égale à 1) sur $H^s(\mathbb{R}^d)$, pour tout $s \geq 0$.
2) Lorsque $s \geq 2$, on a $u \in \mathcal{C}([0,T[, H^2(\mathbb{R}^d))$, et l'EDP est satisfaite sur tout $[0,T[$.
3) Comme pour les problèmes hyperboliques, on a un problème de Cauchy bien posé (existence et unicité de la solution, dépendance continue par rapport aux données) dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, pour tout $s > 0$.

   Également, si $s > d/2 + 2$, on a une solution classique.

   On peut noter (pour l'équation de la chaleur comme pour les systèmes hyperboliques) que pour des solutions assez régulières, les inégalités d'énergie sont des égalités ; mais pour les questions de continuité par rapport aux données, les inégalités nous suffisent.

Les solutions qu'on a construites (avec $s \geq 1$ dans le cas hyperbolique, et $s \geq 2$ pour l'équation de la chaleur) sont dites "solutions fortes", car pour tout temps, les termes de l'équation ont un sens dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (et donc presque partout), et on a des propriétés de continuité par rapport aux données dans cette classe.

On a aussi une notion "raisonnable" (car la seule possible pour avoir $(f, \underline{u}) \mapsto u$ continue) de solution généralisée pour $s = 0$, avec $u(t)$ donné par la formule du théorème ; la "solution" en question est dite solution faible du probl'eme de Cauchy.

2.3.3 Propriétés qualitatives pour l'équation libre $\partial_t u - \Delta u = 0$

On a déjà vu l'*effet régularisant* : si $\underline{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, pour tout $t > 0$, la solution de (2.8) (avec $f = 0$) vérifie $u(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
En particulier, le problème est *irréversible* : partant de $\underline{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ quelconque comme donnée à $t = T$, si on pouvait résoudre (le problème rétrograde en temps) sur $[0, T]$, on repartirait de $t = 0$ avec la donnée $u(0)$, et on trouverait $\underline{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Principe du maximum : grâce à $K(t, x) \geq 0$ ($\forall t > 0, x \in \mathbb{R}^d$), on a :
Si $\underline{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifie $m \leq \underline{u} \leq M$ (presque partout), pour certains $m \leq 0$ et $M \geq 0$, alors pour tout $t > 0$, $u(t) = K(t) \star \underline{u}$ vérifie $m \leq u(t) \leq M$.

Vitesse infinie de propagation : si $\underline{u}$ est à support compact, disons $\underline{u} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $\underline{u} \geq 0$ (et $\underline{u} \neq 0$), alors pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $(K(t) \star \underline{u})(t, x) > 0$.

On peut remarquer la *décroissance de l'énergie* $\|u(t)\|_{H^s}$ (sur $[0, \infty[$ si $\underline{u} \in H^s(\mathbb{R}^d)$; sur $]0, \infty[$ sinon). On le voit par l'identité

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{H^s}^2 \mathrm{d}t' = \|\underline{u}\|_{H^s}^2,$$

ou directement par la relation

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|\xi|^2}(1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\underline{u}}|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Par convergence dominée, on voit d'ailleurs que $\|u(t)\|_{H^s}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Cela est vrai pour tout $s \geq 0$ (même si on a seulement $\underline{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$), et avec $s > d/2$, cela implique que $u(t)$ converge uniformément vers 0. On a en fait (à nouveau, par convergence dominée) l'équivalent

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad u(t, x) \underset{t \to +\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \underline{u}(y)\, \mathrm{d}y.$$

2.4 Un mot sur le cas elliptique

La question est de savoir si on peut inverser l'opérateur $P(\partial_x)$. Par transformation de Fourier, cela correspond à peu près au fait que le symbole (matriciel) $P(i\xi)$ soit inversible, ou ne s'annule pas, dans le cas scalaire que nous considèrerons pour simplifier ; un cas modèle est celui de $-\Delta + 1$, où $P(i\xi) = |\xi|^2 + 1$.

Proposition 2.4.1. *Soit* $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$ *tel que :* $\exists c > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ |P(i\xi)| \geq c$. *Alors*
(i) $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \exists\, !u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ P(\partial_x)u = f$.
(ii) $\forall s \geq 0,\ \forall f \in H^s(\mathbb{R}^d), \exists\, !u \in H^s(\mathbb{R}^d),\ P(\partial_x)u = f$.
(iii) S'il existe $R, C > 0$ *et* $m \in \mathbb{N}$ *tels que pour* $|\xi| \geq R$*, on ait* $|P(i\xi)| \geq C|\xi|^m$*, alors pour tous* $s \geq 0$ *et* $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$*, la solution* u *de* $P(\partial_x)u = f$ *vérifie :* $u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque : En dimension $d = 1$, l'opérateur $\partial_x + 1$ satisfait les hypothèses ci-dessus. On a bien une unique solution à $\partial_x u + u = f$, qui correspond à une EDO avec condition (nulle) à l'infini.

Par contre, lorsque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\partial_x u = f$ a une solution $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ssi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 0$.

Chapitre 3

Équations elliptiques du second ordre sur des domaines bornés

3.1 Introduction, notations

On va étudier des problèmes avec conditions au bord (de Dirichlet) de la forme

$$\begin{cases} Lu = f \text{ sur } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ borné, f est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ (pour simplifier : cela pourrait être $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{R}^N$), l'inconnue u est une fonction de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, et L est un opérateur différentiel de la forme

$$Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu,$$

avec $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq d} : \Omega \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ $\big($si bien que $\operatorname{div}(A\nabla u) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_i}u)\big)$, $b : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $b : \Omega \to \mathbb{R}$.

Remarques :

1) Le prototype de ces opérateurs sera $L = -\Delta + c$, pour $A =$Id, $b = 0$, $c \in \mathbb{R}$.
2) Si les coefficients $a_{i,j}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, Lu se réécrit

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{j=1}^{d}\left(b_j - \sum_{i=1}^{d}\partial_{x_i}a_{ij}\right)\partial_{x_j}u + cu,$$

et réciproquement,

$$-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{j=1}^{d}\widetilde{b_j}\partial_{x_j}u + cu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu,$$

avec $b_j = \widetilde{b_j} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\partial_{x_i}a_{ij}$. Ce qui suit traite donc – dans ces cas de régularité – de toute équation de cette forme (et on pourrait supposer la symétrie $a_{ji} = a_{ij}$).

3) L'hypothèse "Ω borné" sert surtout à donner un sens clair aux conditions au bord $\partial\Omega$, alors compact (sinon, il faudrait prescrire des conditions à l'infini) – et, plus tard, cette hypothèse fournira une autre forme de compacité.
   La condition au bord $u_{|\partial\Omega} = 0$ est une "condition de Dirichlet" (homogène ; ce pourrait être $u_{|\partial\Omega} = g$) ; c'est une condition simple, qui a un sens dans un certain nombre de problème (par exemple, une température fixée au bord d'un matériau) ; une autre condition simple est celle "de Neumann" (homogène), $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = 0$ (qui s'interprète comme une absence de flux de la quantité u à travers $\partial\Omega$) ; il y en a beaucoup d'autres. . .

Dans ce qui suit, on supposera $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.

Définition 8. *On dira que l'opérateur L est* elliptique *s"'il existe $c_{\mathrm{e}} > 0$ telle que*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\xi_{x_i}\xi_{x_j} \geq c_{\mathrm{e}}|\xi|^2, \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

(Lorsque $a_{ji} = a_{ij}$, cela revient à dire que la matrice symétrique $A(x)$ a toutes ses valeurs propres supérieures ou égales à $c_{\mathrm{e}} > 0$.)

3.2 Solutions faibles

Quelques rappels du TD.

Définition 9. *(ici, Ω n'a pas besoin d'être borné)*

1. *On dit que $\varphi \in L^2(\Omega)$ admet une* dérivée faible *par rapport à x_j s'il existe $\psi_j \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout $\chi \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \varphi \cdot \partial_{x_j}\chi = -\int_\Omega \psi_j \cdot \chi.$$

   Une telle fonction ψ_j est unique. Si elle existe, elle est appelée la dérivée faible de φ, et on la note $\partial_{x_j}\varphi$. En fait, $\varphi \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée faible par rapport à x_j ssi il existe $C > 0$ telle que pour tout $\chi \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega \varphi \cdot \partial_{x_j}\chi\right| \leq C\|\chi\|_{L^2}.$$

2. *On définit de même (en itérant) les dérivées faibles $\partial_x^\alpha\varphi \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$.*
3. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $H^k(\Omega)$ l'*espace de Sobolev

$$H^k(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi \text{ admet des dérivées faibles } \partial_x^\alpha\varphi \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}.$$

   Muni du produit scalaire

$$(\varphi \mid \psi)_{H^k} = \sum_{|\alpha|\leq k} (\partial_x^\alpha\varphi \mid \partial_x^\alpha\psi)_{L^2(\Omega)},$$

   c'est un espace de Hilbert.

4. *On note $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$: c'est un sous-espace fermé de $H^k(\Omega)$, donc $(H_0^k(\Omega), \|\cdot\|_{H^k})$ est un espace de Hilbert.*

Remarques :

1) (exo) Quand $\Omega = \mathbb{R}^d$, $H^k(\Omega)$ est bien l'espace qu'on a défini par transformation de Fourier (avec une norme équivalente).
2) L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini pour prendre en compte la condition d'"annulation au bord" (on peut montrer que si $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors effectivement $u_{|\partial\Omega} = 0$). C'est l'ensemble des $\varphi \in H^1(\Omega)$ tels qu'il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^{\mathbb{N}}$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \varphi$ et $\nabla\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \nabla\varphi$.

Idée de la définition des solutions faibles.

On veut "répartir" les dérivées entre u et une fonction test v, pour en faire porter le moins possible sur u, afin que l'existence soit plus facile à montrer (ensuite, par des résultats de gain de régularité, on peut espérer montrer que u est en fait régulière, et solution classique). Si u est régulière et vérifie $Lu = f$, avec $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, par intégration par parties, on a (v étant nulle au bord)

$$\int_\Omega [(A\nabla u)\cdot\nabla v + (b\cdot\nabla u)v + cuv]\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x.$$

Cette relation a un sens lorsque $u \in H_0^1(\Omega)$, et on peut l'étendre par densité à tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Définition 10. *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est* solution faible *du problème* (3.1) *si*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega [(A\nabla u)\cdot\nabla v + (b\cdot\nabla u)v + cuv]\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x.$$

Remarque : Toute solution classique u de classe $\mathcal{C}^2$ (disons $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ avec Ω borné, pour assurer que u et ∇u sont de carré intégrable, et avec $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$) nulle au bord est solution faible. Réciproquement, si u est solution faible et de classe $\mathcal{C}^2$, on a $\int_\Omega (Lu - f)v = 0$ pour toute $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, donc $Lu = f$ sur Ω, et si Ω est de classe $\mathcal{C}^1$, toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ vérifie $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Existence de solutions faibles.

Elle repose sur le

Théorème 11 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert réel, b une forme bilinéaire continue et coercive sur H, ℓ une forme linéaire continue sur H.*
Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad b(u,v) = \ell(v).$$

Si de plus b est symétrique, alors u est l'unique minimum de $J : H \to \mathbb{R}$, donnée par $J(v) = \dfrac{1}{2}b(v,v) - \ell(v)$.

On a alors le

Théorème 12. *Soit un Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, et L un opérateur différentiel elliptique du second ordre à coefficients $L^\infty(\Omega)$. Alors, il existe $\underline{\lambda} \geq 0$ tel que pour tous $\lambda \geq \underline{\lambda}$ et $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ solution faible de*

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f \ \textit{sur}\ \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Remarques :

1) La forme bilinéaire apparaissant dans la formulation faible est symétrique ssi $a_{ji} = a_{ij}$ et $b = 0$.
2) Si $b = 0$ et $c \geq 0$ (p.p.), tout $\underline{\lambda} > 0$ convient, dans le théorème. Si $b = 0$ et $c \geq c_0$ pour un nombre $c_0 > 0$ (on peut penser à $L = -\Delta + c_0$), $\underline{\lambda} = 0$ convient.
3) Si Ω est borné (au moins dans une direction), l'inégalité vue en TD ($\exists C(\Omega) > 0, \forall u \in H^1_0(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$) assure que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est, sur $H^1_0(\Omega)$, une norme équivalente à $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Dans ce cas, avec $b = 0$ et $c \geq 0$, $\underline{\lambda} = 0$ convient, dans le théorème.
4) Comme souvent, existence et unicité sont liées. Cela est décrit par "l'alternative de Fredholm", qui mène à "soit pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$ à $Lu = f$, soit il existe $u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que $Lu = 0$".

   Par exemple, avec $\Omega =]0,1[$ et $L = -\partial_x^2$, pour $\lambda \geq 0$, on connaît les solutions $u \in H^1_0(]0,1[)$ de $-\partial_x^2 u - \lambda u = 0$: c'est exactement $u(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$, à condition que $\lambda = k^2\pi^2$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

   On appelle *spectre* de L les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $L - \lambda$ ne soit pas inversible (avec un inverse continu de L^2 dans L^2) ; pour l'exemple ci-dessus, le spectre de $-\partial_x^2$ est constitué de valeurs propres, toutes réelles et de multiplicité finie (mais en nombre infini).

3.3 Régularité (intérieure)

Théorème 13. *Soit un Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, L un opérateur différentiel elliptique du second ordre avec $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $b_j, c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, et $u \in H^1(\Omega)$ solution faible de $Lu = f$ dans Ω (pour des fonctions test $v \in H^1_0(\Omega)$). Alors, pour tout ouvert ω* compactement inclus *dans Ω (i.e. $\overline{\omega}$ compact, et inclus dans Ω, ce qu'on notera $\omega \subset\subset \Omega$), $u \in H^2(\omega)$ (on note alors $u \in H^2_{\text{loc}}(\omega)$), et il existe $C = C(\Omega, \omega, L) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^2(\omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Remarques :

1) Comme $u \in H^2(\omega)$, lorsque $v \in \mathcal{C}^\infty_c(\omega)$ est utilisé comme fonction test dans la formulation faible, on peut intégrer par parties pour obtenir $(Lu \mid v)_{L^2} = (f \mid v)_{L^2}$. On en déduit que $Lu = f$ presue partout.

2) En itérant l'argument, on obtient : pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $a_{ij} \in \mathcal{C}^{m+1}(\Omega)$, $b_j, c \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $f \in H^m(\Omega)$, et $u \in H^1(\Omega)$ solution faible de $Lu = f$ dans Ω, alors $u \in H^{m+2}_{\text{loc}}(\omega)$, et

$$\|u\|_{H^{m+2}(\omega)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

3) Ici, la condition au bord n'intervient pas. Des théorèmes de régularité "jusqu'au bord" un peu plus difficiles montrent que, si $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$, toute solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ de $Lu = f$ vérifie $u \in H^2(\Omega)$ (et $f \mapsto u$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$).

3.4 Décomposition spectrale des opérateurs elliptiques autoadjoints

Théorème 14. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$, L un opérateur différentiel du second ordre elliptique et symétrique ($a_{ji} = a_{ij}$, $b_j = 0$) avec $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$, et $c \geq 0$ p.p. Alors*
1. Le spectre de L est réel, constitué de valeurs propres de multiplicité finie $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}^\star\}$, avec $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ et $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Il existe une base orthonormée $(w_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres de L : $\forall k \in \mathbb{N}^\star, w_k \in H^1_0(\Omega)$ vérifie

$$\begin{cases} Lw_k = \lambda_k w_k \text{ sur } \Omega, \\ w_{k|_{\partial\Omega}} = 0. \end{cases}$$

On ne détaille pas la preuve. Ce résultat repose sur la décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints, vue en TD, et sur le fait que L^{-1}, bien défini de $L^2(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$, est un opérateur symétrique (positif) et compact, en tant qu'opérateur de $L^2(\Omega)$ dans lui-même, grâce au théorème de Rellich-Kondrachov qui suit.

3.5 Compacité

Avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$, L un opérateur différentiel du second ordre elliptique à coefficients $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(\Omega)$, disons avec $c \geq 0$ p.p., pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$ au problème de Dirichlet (3.1). Cela définit un opérateur (linéaire, continu) L^{-1} de $L^2(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$. En fait, vu comme application de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, L^{-1} est un opérateur (linéaire) *compact*, c'est-à-dire : l'image de tout borné est relativement compacte (*i.e.* d'adhérence compacte ; dans un espace métrique E, une partie $\mathcal{F}$ est relativement compacte ssi elle est *précompacte*, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F}$ soit incluse dans l'union des boules de centres les f_j, de rayon ε). Dans l'espace métrique $L^2(\Omega)$, la compacité de L^{-1} équivaut au fait que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

bornée dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire de $(L^{-1}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $L^2(\Omega)$.
Cela repose sur un cas particulier du théorème de Rellich-Kondrachov (écrit ici pour des dérivées faibles dans L^2, et valide pour des dérivées faibles dans L^p, $1 \leq p \leq \infty$, donnant alors une injection compacte dans certains espaces L^q) :

Théorème 15 (Rellich-Kondrachov)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Pour prouver ce résultat, on considère une famille $\mathcal{F}$ bornée dans $H^1(\Omega)$, et on montre qu'elle est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$.
Remarque : Par contre, l'injection de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ n'est pas compacte. Par exemple, si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ avec $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,1)$, et $f_n := f(\cdot - ne_1)$, avec e_1 le premier vecteur de la base canonique, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dont tous les termes sont à distance $2\|f\|_{L^2}$ les uns des autres) n'admet aucune sous-suite convergente.

Pour obtenir le théorème de Rellich-Kondrachov, on utilise le théorème d'Ascoli (si K est un espace métrique compact, et $\mathcal{G}$ est un borné de $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ uniformément équicontinu, alors $\mathcal{G}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(K)$) pour montrer le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov dans L^2 (il est valide dans L^p, lorsque $1 \leq p < \infty$) :

Théorème 16 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *Soit Ω un ouvert (non nécessairement borné, ni de classe $\mathcal{C}^1$) de $\mathbb{R}^d$, ω un ouvert compactement inclus dans Ω ($\omega \subset\subset \Omega$), et $\mathcal{H}$ un borné de $L^2(\Omega)$ vérifiant l'uniforme équicontinuité intégrale*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in]0, dist(\omega, \Omega^c)[, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \forall h \in \mathbb{R}^d, \quad (|h| < \delta \Rightarrow \|\tau_h f - f\|_{L^2(\omega)} < \varepsilon).$$

Alors $\mathcal{H}_{|\omega} = \{f_\omega \mid f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compact dans $L^2(\omega)$.

On en déduit le

Corollaire 3.5.1. *Soit Ω comme dans le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, ainsi que $\mathcal{H}$, vérifiant l'uniforme équicontinuité intégrale pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, ainsi que l'équiintégrabilité*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \omega \subset\subset \Omega, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \|f\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{\omega})} < \varepsilon.$$

Alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.