

À PROPOS DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR ET DE L'ANALYSE DE FOURIER

Marguerite Gisclon

Introduction

L'équation de la chaleur en une dimension d'espace est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

où $c > 0$ est une constante donnée, u est une fonction inconnue réelle de deux variables réelles x et t . Cette fonction $u = u(x, t)$ représente la température dans un conducteur de dimension un. La valeur de $u(x, t)$ dépend du temps $t \geq 0$ et de la position x . L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'équation parabolique : en effet, si on applique l'opérateur de la chaleur aux fonctions

$$u : (x, t) \mapsto \exp(\lambda t + \mu x)$$

on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = (\lambda - c\mu^2) \exp(\lambda t + \mu x) = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda = c\mu^2$ qui représente une parabole. En général, les équations aux dérivées partielles sont classées en trois catégories : elliptique, parabolique et hyperbolique. Par exemple, si on écrit une équation différentielle partielle linéaire du second ordre sous la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = 0,$$

(les coefficients peuvent être des fonctions de x et t mais pas de u), alors elle est classée comme suit

1. elliptique : $B^2 - 4AC < 0$; par exemple l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

2. hyperbolique : $B^2 - 4AC > 0$; par exemple l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

3. parabolique : $B^2 - 4AC = 0$.

Vers 1802-1804, c'est Joseph Fourier qui trouva l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides ; en 1807, il mit au point une méthode pour la résoudre : l'analyse de Fourier. Il utilisa sa technique mathématique pour élucider de nombreux exemples de propagation de la chaleur. Il remplaçait une fonction unique, mais difficile à décrire mathématiquement, par une série beaucoup plus maniable de fonctions sinus ou cosinus, dont la somme reconstituait la fonction initiale.

Cet article s'articule de la façon suivante

- explication physique de l'équation de la chaleur,
- historique sur l'analyse de Fourier,
- résolution des problèmes avec soit une condition initiale (c'est-à-dire la valeur de $u(x, t)$ en $t = 0$ est donnée) :

$$(PCI) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

soit une condition au bord

$$(PCB) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = f(t), & t > 0. \end{cases}$$

On appelle le problème (PCI) problème de Cauchy.

- applications des formules données par les résolutions précédentes.

1 Description physique

Considérons une barre de longueur illimitée. Pour décrire l'équation de la chaleur, supposons que le conducteur a une petite section d'aire S (voir la figure 1).

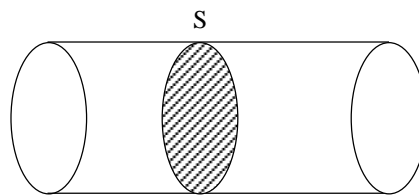


Figure 1: Barre de longueur illimitée de petite section d'aire

La quantité de chaleur à travers la section au point x est (en accord avec l'expérience) approximativement proportionnelle au gradient $\partial u / \partial x$ en x . La quantité

de chaleur par unité de temps et de surface à l'abscisse x est donnée par la loi de Fourier :

$$\frac{\delta Q}{S\Delta t} = -k \frac{\partial u}{\partial x},$$

où k est une constante strictement positive dépendant du matériau. Notons que la positivité de k est en accord avec le fait que la chaleur circule du chaud vers le froid. Supposons que u et $\partial u/\partial x$ ne changent pas rapidement, alors $k\partial u/\partial x$ est la quantité de chaleur par unité de temps et par unité d'espace circulant le long des x dans la direction négative.

Cherchons comment varie au cours du temps la température u aux différents points de la barre. Ecrivons le bilan sur la partie hachurée.

La quantité totale de chaleur rentrante au temps Δt est approximativement

$$\delta Q = -k \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \right] S \Delta t. \quad (1)$$

D'un autre côté, la même quantité totale de chaleur rentrante est approximativement égale à

$$\delta Q = k_1 S \Delta x (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)),$$

l'augmentation de température étant $u(x, t + \Delta t) - u(x, t)$. La constante strictement positive k_1 est la chaleur spécifique par unité de volume.

En général, la quantité spécifique c_g est donnée par unité de masse donc si le matériau est de densité ρ on a $k_1 = \rho c_g$.

Comme Δx est petit, on a ainsi :

$$\delta Q = k_1 S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t. \quad (2)$$

On écrit ensuite que les deux termes (1) et (2) sont égaux, on divise par $S \Delta t \Delta x$ et on fait tendre Δx vers zéro d'où l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{k_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2 Historique sur l'analyse de Fourier

On renvoie ici à [Bra94] dont on a extrait les étapes marquantes. Le baron Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre 1768-Paris 1830) s'intéressa à l'étude de la chaleur. En France, à partir de 1801, il concentra son activité sur les mathématiques et enseigna l'analyse à l'École Polytechnique. L'Académie des sciences lui décerna un prix en 1811 pour sa théorie mathématique des lois de propagation de la chaleur et sa vérification expérimentale. D'importantes objections en retardèrent la publication jusqu'en 1815.

Ce ne fut qu'en 1822 qu'elle parut sous une forme achevée dans son livre « théorie analytique de la chaleur ». La mathématicienne Sophie Germain (1776-1831) et l'ingénieur Claude Navier étendirent la théorie de Fourier à d'autres domaines que la transmission de chaleur. La question de la convergence de la série de Fourier réapparut à la fin du XIX siècle, lors de tentatives pour prédire les mouvements des marées. L'analyse de Fourier reste inapplicable à certaines fonctions inhabituelles par exemple celles qui possèdent un nombre infini de sauts infinis sur un intervalle fini.

De vastes domaines nouveaux des mathématiques ont été développés à partir de ces recherches pour savoir si la série de Fourier de telle ou telle fonction donnée est convergente. Un exemple en est la théorie des fonctions généralisées ou distributions à laquelle s'attachent les noms de George Temple et Laurent Schwartz.

Après environ deux siècles de développement, la théorie de l'analyse de Fourier est à présent solidement structurée et bien comprise.

3 Solutions des deux problèmes

3.1 Énoncés des résultats

Nous allons résoudre les problèmes (PCI) et (PCB) écrits dans l'introduction et donner des exemples d'applications pour chacun de ces problèmes.

3.1.1 Problème (PCI)

Le résultat d'existence et d'unicité du problème (PCI) est le suivant :

THÉORÈME 1. Soient c une constante strictement positive et f une fonction continue 2π -périodique sur \mathbf{R} .

Alors, il existe un unique $u(x, t)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$ satisfaisant

1. $u(x, t)$ est 2π -périodique en x , $\forall t > 0$; $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial u/\partial t$ existent comme fonctions continues sur $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$.
2. $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x, t) - f(x)| = 0$.

La fonction f détermine la température au temps $t = 0$.

La signification physique de ce résultat est que de la connaissance de la température à l'instant de départ ($t = 0$), nous en déduisons l'évolution de la température sur un anneau circulaire c'est-à-dire nous pouvons grâce au problème (PCI) nous intéresser à la température dans un conducteur circulaire de longueur 2π qui est équivalent au cas où nous avons une température $u(x, t)$ de période 2π en $x \in \mathbf{R}$ (voir la figure 2).

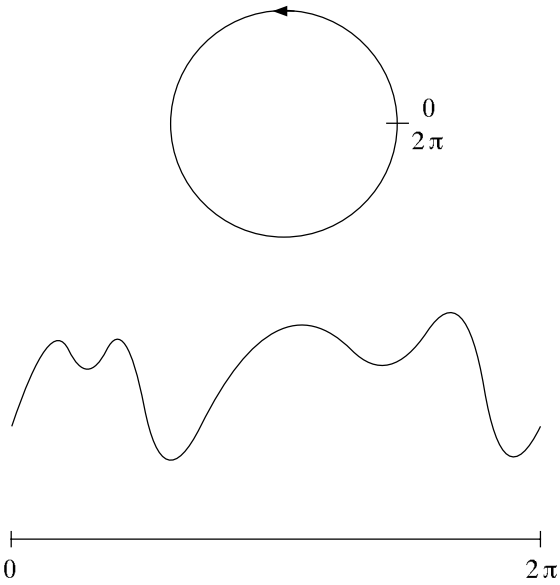


Figure 2: Problème (PCI)

3.1.2 Problème (PCB)

Le théorème concernant le problème (PCB) est le suivant :

THÉORÈME 2. Soient c une constante strictement positive et f une fonction continue 2π -périodique sur \mathbf{R}^+ .

Alors, il existe une unique $u(x, t)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^+$ satisfaisant

1. la température $u(x, t)$ à la profondeur $x > 0$ est 2π -périodique en temps (donc la fonction u garde la propriété de 2π périodicité en temps de la fonction f); $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial u / \partial t$ existent comme fonctions continues sur $\{(x, t); x \in \mathbf{R}^+, t \in \mathbf{R}^+\}$.
2. l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, \quad x > 0.$$

3. la fonction u converge uniformément par rapport à t vers f quand x tend vers zéro :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t > 0} |u(x, t) - f(t)| = 0,$$

Cette fonction f détermine la température en $x = 0$.

Dans le théorème 1, la fonction u est périodique en x mais pas en t . Nous allons maintenant donner un exemple d'application du problème (PCB) c'est-à-dire dans lequel le phénomène décrit peut être considéré comme périodique en temps.

Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 sont assez semblables. Pour celle du théorème 1, nous renvoyons à [Zaa89] et dans cet article nous nous restreignons à la rédaction de la démonstration du théorème 2 avec f de classe C^2 .

3.2 Preuve du théorème 2

Cette preuve utilise l'analyse de Fourier. Rappelons, sans démonstration, les résultats importants que nous allons utiliser.

Etant donnée une application f 2π -périodique, localement intégrable de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , on appelle coefficients de Fourier (exponentiels) de f les nombres complexes

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-ipt) dt, \quad p \in \mathbf{Z}$$

et série de Fourier de f la série trigonométrique

$$t \mapsto \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \exp(int).$$

THÉORÈME 3. 1. En tout point où f est dérivable, la série de Fourier de f converge.

2. Si f est de classe C^1 , la série de Fourier de f converge normalement et donc uniformément sur \mathbf{R} et sa somme est f .

3. Si f est de classe C^1 , pour tout p dans \mathbf{Z}^*

$$\hat{f}'(p) = ip \hat{f}(p).$$

4. Si f est de classe C^k , alors les suites $(n^k \hat{f}(n))_n$ et $(n^k \hat{f}(-n))_n$ tendent vers zéro quand n tend vers $+\infty$. La suite $(n^k \hat{f}(n))_n$ est de carré sommable.

DÉMONSTRATION. Le plan de la démonstration du théorème 2 est le suivant. Nous commençons par supposer qu'il existe une fonction $u(x, t)$ satisfaisant les conditions mentionnées dans le théorème pour $t > 0$,

$x > 0$. Nous explicitons ensuite $u(x, t)$ puis nous montrons que le $u(x, t)$ trouvé satisfait les conditions du théorème, ce qui établit aussi l'unicité.

Première étape

Notons

$$S_u(x, t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n(x) \exp(int)$$

la série de Fourier en temps de $u(x, t)$ où

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) \exp(-int) dt$$

et

$$S_f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \exp(int)$$

la série de Fourier de f où

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \exp(-iny) dy.$$

D'après la propriété 1. du théorème 2, la série de Fourier de $u(x, t)$ converge uniformément vers $u(x, t)$ pour tout x . D'après la propriété 3. du théorème 2, la fonction $u(x, t)$ converge vers $f(t)$ quand x tend vers zéro (la convergence est uniforme par rapport à t) donc $C_n(x)$ tend vers $\hat{f}(n)$ quand x tend vers zéro pour tout n .

En utilisant l'équation de la chaleur, une intégration par parties et le fait que u est 2π périodique en temps nous obtenons que $C_n(x)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} C_n''(x) &= \frac{in}{c} C_n(x) \\ &=: \lambda_n^2 C_n(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -\alpha_n x - i\alpha_n x, \quad n > 0, \\ &= -\alpha_n x + i\alpha_n x, \quad n \leq 0, \end{aligned}$$

et

$$\alpha_n = \sqrt{|n|/2c}.$$

Nous résolvons cette équation différentielle :

$$\begin{aligned} C_n(x) &= A_n(x_0) \exp(\lambda_n(x - x_0)) \\ &\quad + B_n(x_0) \exp(-\lambda_n(x - x_0)), \end{aligned}$$

pour tout $x \geq x_0 > 0$, où x_0 est fixé, avec

$$A_n(x_0) + B_n(x_0) = C_n(x_0).$$

Nous faisons le choix $A_n(x_0) = 0$, ceci correspond à l'hypothèse raisonnable que $u(x, t)$ est bornée

$$|u(x, t)| \leq M, \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0,$$

donc

$$C_n(x) = C_n(x_0) \exp(-\lambda_n(x - x_0)), \quad x \geq x_0 > 0.$$

Comme $C_n(x_0)$ tend vers $\hat{f}(n)$ quand x_0 tend vers zéro, nous trouvons

$$C_n(x) = \hat{f}(n) \exp(-\lambda_n x), \quad x > 0.$$

Deuxième étape

La formule explicite de $u(x, t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_n C_n(x) \exp(int) \\ &= \sum_n \hat{f}(n) \exp(-\alpha_n x) \exp(int \pm i\alpha_n x), \end{aligned}$$

avec un signe $-$ pour $n > 0$ et un signe $+$ pour $n \leq 0$.

Troisième étape

D'après cette formule, nous vérifions que $u(x, t)$ satisfait la propriété 1. du théorème 2 et l'équation de la chaleur c'est-à-dire la propriété 2. du théorème 2.

Il reste à démontrer la propriété 3. du théorème 2, c'est-à-dire que $u(x, t)$ converge uniformément vers $f(t)$ quand x tend vers zéro. Or

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(t) &= \sum_n \hat{f}(n) \exp(int) \\ &\quad [\exp(-\alpha_n x \pm i\alpha_n x) - 1] \\ &= \sum_n \hat{f}(n) \exp(int) \\ &\quad [\exp(-\alpha_n x \pm i\alpha_n x) - \exp(0)]. \end{aligned}$$

Soit $h(t) = \exp(-t\alpha_n x \pm it\alpha_n x)$ pour $t \in [0, 1]$, alors $h'(t) = -(\alpha_n x \pm i\alpha_n x) \exp(-t\alpha_n x \pm it\alpha_n x)$ et

$$\begin{aligned} |h'(t)| &\leq \alpha_n x \sqrt{2} \exp(-t\alpha_n x) \\ &\leq \alpha_n x \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(t)| &= |\sum_n \hat{f}(n) \exp(int) (h(1) - h(0))| \\ &\leq \sum_n |\hat{f}(n)| |h(1) - h(0)| \\ &\leq \sum_n |\hat{f}(n)| \sup_{t \in [0, 1]} |h'(t)| \\ &\leq \sum_n |\hat{f}(n)| \alpha_n x \sqrt{2} \\ &\leq (x/\sqrt{c}) \sum_n |\hat{f}(n)| \sqrt{|n|} \frac{|n|^{3/2}}{|n|^{3/2}}, \end{aligned}$$

soit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|u(x, t) - f(t)| \leq \frac{x}{\sqrt{c}} \left(\sum_n |n|^3 |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_n \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}.$$

Mais si on suppose f de classe \mathcal{C}^3 , alors $|n|^3 \hat{f}(n)$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire pour n assez grand $|\hat{f}(n)| \leq 1/|n|^3$. Si f est seulement de classe \mathcal{C}^2 , alors f'' appartient à L^2 et $\sum n^4 |\hat{f}(n)|^2$ est finie. Donc, les deux séries du terme de droite de la dernière inégalité convergent ce qui donne

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \text{constante } x$$

qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. ■

Nous avons donc des formules explicites pour les solutions des problèmes (PCI) et (PCB) :

- pour le problème (PCI) :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_n \hat{f}(n) \exp(-cn^2 t) \exp(inx), \\ &= \int_0^{2\pi} p_t(x - y) f(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

où

$$p_t(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \exp(inx) \exp(-cn^2 t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Ces formules sont obtenues avec la même méthode que précédemment (voir [Zaa89]). Remarquons que la solution est la convolée de f et de p_t qu'on appelle le noyau de la chaleur.

- Pour le problème (PCB) :

$$u(x, t) = \sum_n \hat{f}(n) \exp(-\alpha_n x) \exp(int \pm i\alpha_n x).$$

Remarque : dans les deux problèmes, la solution u est de classe \mathcal{C}^∞ pour x et t ce qui montre que l'équation de la chaleur a un effet fortement régularisant sur la donnée f .

Nous allons maintenant donner des applications de ces formules.

4 Application de la formule pour (PCI)

4.1 Principe du maximum pour $u(x, t)$

Avec la formule (3) de p_t , on a $\int_0^{2\pi} p_t(x) dx = 1$, d'où l'inégalité $|u(x, t)| \leq \|f\|_\infty, \forall x$, d'où

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \forall t > 0.$$

Ce type d'inégalité s'appelle principe du maximum. Il dit qu'il ne peut pas faire plus chaud qu'à l'instant initial $t = 0$.

4.2 Comportement asymptotique dans le cas d'une condition initiale

D'après la formule

$$u(x, t) = \hat{f}(0) + \sum_{n \neq 0} \hat{f}(n) \exp(-cn^2 t) \exp(inx), \quad (4)$$

la solution $u(x, t)$ tend vers $\hat{f}(0)$ quand t tend vers l'infini pour tout x (la convergence est même uniforme en x), ce qui nous donne une information sur le comportement de $u(x, t)$ quand t devient grand.

Ce qu'il est important de remarquer est que $\hat{f}(0)$ est la moyenne de f , en effet

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) dy$$

donc la chaleur se répartit uniformément sur le conducteur quand t est grand. De plus, cette répartition se fait exponentiellement vite.

4.3 Un cas de propagation

On renvoie encore à [Bra94]. L'évolution des températures aux divers points d'un anneau de fer a été l'un des premiers phénomènes analysés à l'aide de la technique de Fourier.

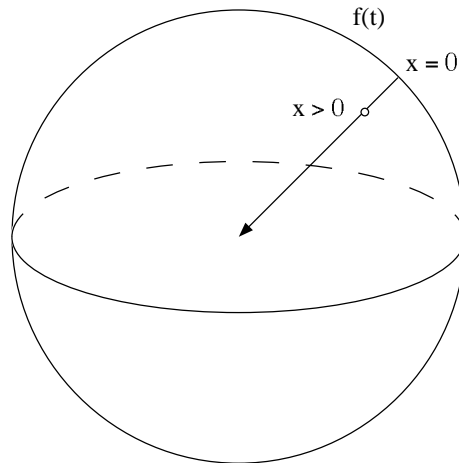


Figure 3: Température de la terre

Un cas de propagation particulièrement instructif et qui ne présente aucune difficulté de calcul est donc le suivant : on place une flamme sous une région d'un anneau. Lorsqu'une partie de l'anneau est chauffée au rouge, on le retire du feu et on l'enfouit dans un sable fin isolant. On mesure

alors la répartition de température tout autour de l'anneau et son évolution dans le temps. Juste après le chauffage, la température est irrégulièrement répartie : une moitié est uniformément chaude, l'autre uniformément froide et entre-elles, la température décroît brutalement. Pour l'analyse, on déroule l'anneau et on mesure la température en chaque point, pour obtenir une répartition de la température le long du pourtour de l'anneau. Fourier proposa la décomposition de la répartition initiale discontinue en une somme d'un grand nombre (éventuellement infini) de sinusoides, c'est-à-dire cette répartition est décomposée en plusieurs courbes sinusoidales :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \exp(inx).$$

En additionnant 16 de ces courbes, on obtient une bonne approximation de la température initiale.

À mesure que la chaleur se propage de la région chaude vers la région froide, les températures s'égalisent peu à peu. Bientôt, la distribution de la chaleur sur l'anneau est presque sinusoidale : le graphique représentant la valeur de la température en fonction de la position sur l'anneau a une forme en S, analogue aux fonctions sinus ou cosinus. Ensuite, la sinusoïde s'applatit graduellement jusqu'à ce que tous les points de l'anneau soient à la même température ; c'est bien le phénomène décrit au paragraphe 4.2

5 Etude de la construction d'une cave

Nous allons, grâce au problème (PCB), comprendre l'intérêt d'une cave quant à la bonne conservation de la nourriture. Nous pouvons déterminer la température de la terre à une certaine profondeur x à partir de la température à la surface $x = 0$ (voir la figure 3).

De la série de $u(x, t)$, nous voyons que le $n^{ième}$ terme $\hat{f}(n) \exp(int)$ dans la série de Fourier pour la température à la surface est amortie par un facteur $\exp(-\alpha_n x)$ et le déphasage est de $\alpha_n x$ car

$$u(x, t) = \sum_n \hat{f}(n) \exp(-\alpha_n x) \exp(int \pm i\alpha_n x).$$

Nous pouvons maintenant nous intéresser à la construction de la cave.

Supposons donc que la température à la surface est une fonction connue f du temps t ($t \geq 0$) continue périodique de période égale à un an.

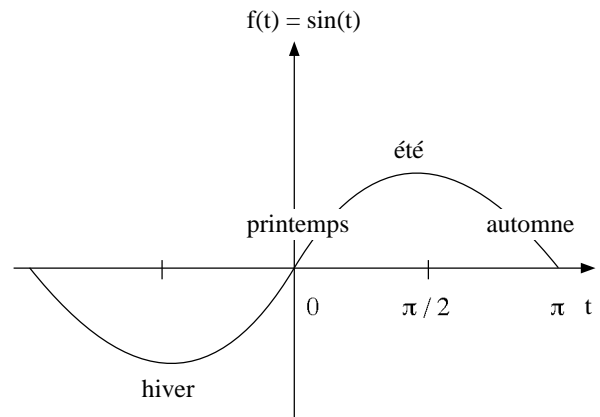


Figure 4: Température à la surface de la terre

Pour simplifier les formules, nous normalisons le temps tel que la durée de un an correspond à un intervalle de longueur 2π .

Supposons donc que la température à la surface de la terre sur une période d'un an est représentée par la figure 4 c'est-à-dire

$$f(t) = \sin(t),$$

alors

$$u(x, t) = \exp(-\alpha_1 x) \sin(t - \alpha_1 x)$$

où $\alpha_1 = 1/\sqrt{2c}$ (voir la figure 5).

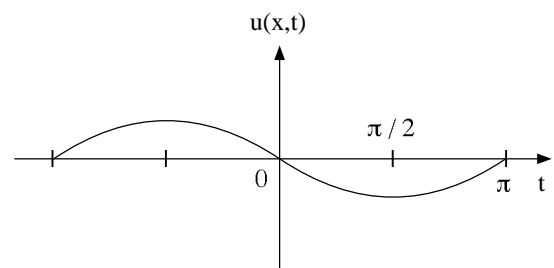


Figure 5: Température à une certaine profondeur

Maintenant soit x_0 tel que $\alpha_1 x_0 = \pi$. La température à la profondeur x_0 est amortie par un facteur $\exp(-\pi)$ (qui est approximativement égal à $1/25$) et la phase est π .

Comme $x_0 = \pi/\alpha_1 = \pi\sqrt{2c}$, la valeur de x_0 dépend du matériau, mais la moyenne constatée physiquement est à peu près de 4 mètres, ce qui montre pourquoi dans une cave creusée à cette profondeur on peut

garder de la nourriture : quand il fait très chaud dehors, la température est fraîche dans la cave, quand il fait très froid dehors, la température est plus douce dans la cave !

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons juste abordé l'équation de la chaleur. Mais, Weierstrass, par exemple, a aussi utilisé la solution de l'équation de la chaleur pour démontrer le théorème de Stone-Weierstrass c'est-à-dire la densité de l'ensemble des polynômes réels dans $\mathcal{C}([a, b])$ pour tout intervalle compact $[a, b]$ avec la topologie de la convergence uniforme.

On peut aussi travailler en plusieurs dimensions d'espace. Si $x \in \Omega$ où Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^n de frontière Γ « assez régulière », l'équation de la chaleur devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u = c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right), \quad t \in]0, T[,$$

où c est la constante de diffusion.

Une autre généralisation est l'équation de la chaleur non homogène. La fonction $l : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbf{R}$ est donnée. Il s'agit alors de résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + l, & x \in \Omega, \quad t \in]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, T[\text{ (conditions aux limites),} \\ u(., 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \text{ (condition initiale).} \end{cases}$$

Ces équations décrivent l'évolution au cours du temps t de la température u d'un milieu continu $\bar{\Omega}$ homogène et isotrope soumis à une source de chaleur l lorsque les constantes physiques sont prises égales à 1, la température étant fixée nulle au cours du temps sur la frontière Γ du milieu continu et la température initiale étant donnée égale à u_0 .

Il y a donc encore beaucoup à lire si on veut en savoir plus sur l'équation de la chaleur.

De même, l'analyse de Fourier intervient aussi bien sûr dans d'autres problèmes, par exemple pour l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

mais aussi pour les équations différentielles :

1. -linéaire

$$x'' + 2kx' + bx = f(t), \quad k, b > 0$$

représente un oscillateur linéaire avec pulsion périodique (si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue périodique de période $2\pi/\omega$),

2. -non linéaire

$$x'' + p(x, x')x' + q(x) = f(t)$$

avec p et q appropriés.

Décrivons de plus un effet marquant (voir [Arn74]). Un pendule (ou un tout autre système linéaire oscillatoire, par exemple un corps soutenu par un ressort ou un circuit électrique oscillant) soumis à l'action d'une force extérieure périodique est donc représenté par

$$x'' + w^2x = \cos(\nu t), \quad w^2 \neq \nu^2.$$

La solution générale de cette équation non homogène est de la forme

$$x(t) = \frac{1}{w^2 - \nu^2} \cos(\nu t) + c \cos(wt + \theta),$$

où c et θ sont des constantes arbitraires. Par conséquent, sous l'action d'une force extérieure, les oscillations du pendule sont composées d'une « oscillation forcée » $1/(w^2 - \nu^2) \cos(\nu t)$ de fréquence égale à celle de la force extérieure et d'une oscillation libre d'amplitude propre w . La dépendance de l'amplitude $1/(w^2 - \nu^2)$ de l'oscillation forcée par rapport à la fréquence de la force extérieure ν présente un caractère de résonance : plus la fréquence de la force extérieure ν est proche de la fréquence propre w , plus le système oscille fortement. Le phénomène de résonance que l'on observe lorsque la fréquence de la force extérieure coïncide avec la fréquence propre du système oscillatoire est d'une grande importance dans les applications. Ainsi, dans toute construction (édifice, avion, bateau,...) on doit veiller à ce que ses fréquences propres n'approchent pas de celles des forces extérieures auxquelles elle est susceptible d'être soumise. Autrement une force même faible, d'effet durable pourrait l'ébranler et la faire écrouler...

Bibliographie

- [Arn74] V. Arnold, Equations différentielles ordinaires, Editions Mir Moscou.
- [Bra94] R. Bracewell, Pour la science, dossier hors série, janvier 1994, Les mathématiciens.
- [Bre87] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson.
- [Had64] J. Hadamard, La théorie des équations aux dérivées partielles, Editions scientifiques.

- [Kor90] T. W. Körner, Fourier Analysis, Cambridge University Press.
- [RT88] P. A. Raviart, J. M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson.
- [Rei91] H. Reinhard, Equations aux dérivées partielles, Dunod.
- [Sch65] Laurent Schwartz, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann.
- [Wid75] D. V. Widder, The heat equation, Academic Press.
- [Zaa89] A. C. Zaanen, Continuity, Integration and Fourier theory, Springer Verlag.

◇ Marguerite Gisclon
Laboratoire de Mathématiques,
Université de Savoie,
Campus Scientifique,
73376-Le Bourget-du-Lac, Cédex
gisclon@univ-savoie.fr