Université Joseph Fourier **Année 2006-2007**
M2R Mathématiques **Didier Piau**

Processus markoviens

Table des matières

1 Introduction

1.1 Faits supposés connus

Une variable aléatoire X est définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$, par la condition que, pour tout B dans $\mathcal{E}$, $X^{-1}(B) = \{X \in B\}$ appartient à $\mathcal{F}$. La loi de X est notée indifféremment $\mathbb{P}_X$ ou $X(\mathbb{P})$ ou loi(X) ; c'est la mesure m définie sur $\mathcal{E}$ par $m(B) := \mathbb{P}(X \in B)$, pour tout B dans $\mathcal{E}$.

Il n'est pas toujours nécessaire de connaître tous les nombres $m(B)$ pour connaître m. Par exemple, si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on peut se contenter des $B =]-\infty, x]$. On considère donc la fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leqslant x)$. Un autre cas particulier est celui où E est discret et $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$. On se contente alors de connaître $p_x := \mathbb{P}(X = x)$ pour tout x dans E, puisque pour toute partie B de E,

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B} p_x.$$

Dans la suite, on s'intéresse à des familles de variables aléatoires. Rappelons qu'il ne suffit pas de connaître la loi de chaque variable aléatoire (les marginales) pour connaître la loi de la famille (la loi conjointe). L'exemple le plus simple : X et Y prennent les valeurs ± 1 et leur loi conjointe est définie par

$$\mathbb{P}(X = Y = +1) = \mathbb{P}(X = Y = -1) = x/2,$$

et

$$\mathbb{P}(X = +1, Y = -1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = +1) = (1 - x)/2,$$

pour une valeur de x entre 0 et 1. Alors, X et Y suivent la loi uniforme sur $\{\pm 1\}$ mais $\mathbb{P}(X = Y) = x$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 1. Si $x = 0$, $X = -Y$, si $x = 1$, $X = Y$, et si $x = \frac{1}{2}$, X et Y sont indépendantes.

Le cas simple (et connu) : les variables aléatoires sont indépendantes, c'est-à-dire que, pour tous B_k dans $\mathcal{E}_k$,

$$\mathbb{P}(X_k \in B_k,\, 1 \leqslant k \leqslant n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in B_k).$$

On dispose de théorèmes limites dans le cas indépendant qui affirment que la somme d'un grand nombre de petits aleas tend à se comporter comme une constante (déterministe). Ainsi, pour $E = \mathbb{R}$, la loi des grands nombres affirme qu'une suite i.i.d. de variables aléatoires intégrables est telle que sa moyenne empirique converge vers sa moyenne théorique au sens des convergences presque sûre et dans L^1. On peut ensuite raffiner par un théorème central limite, une loi du logarithme itéré, etc. On va démontrer ce genre de résultats dans le cas le plus simple qui ne soit pas celui d'une suite indépendante : les chaînes de Markov.

Notation Pour tout symbole ξ et tout ensemble d'indices I, on utilisera la notation $\xi_I := (\xi_i,\, i \in I)$. En particulier, $\xi_{i:j} := (\xi_k)_{i \leqslant k \leqslant j}$ pour tous entiers $i \leqslant j$.

1.2 Chaînes de Markov

Définition 1.1. *Processus $(X_n)_{n \geqslant 0}$ décrit par deux paramètres : une mesure initiale m qui donne X_0 et des noyaux de transition p_n qui permettent de passer de X_{n-1} à X_n. Dans le détail, pour tout $n \geqslant 0$, tout $x_{0:n}$ dans E^{n+1},*

$$\mathbb{P}_m(X_{0:n} = x_{0:n}) = m(x_0) \prod_{k=1}^{n} p_k(x_{k-1}, x_k).$$

Donc m et les $p(x, \cdot)$ sont des mesures de probabilité sur E.

Lemme 1.1. $p_n(x_{n-1}, x_n) = \mathbb{P}_m(X_n = x_n \,|\, X_{0:n-1} = x_{0:n-1})$.

1.3 Exemples

1.3.1 Suites indépendantes

Dans ce cas, m est la loi de X_0 et pour tout $n \geqslant 1$, $p_n(x, \cdot)$ ne dépend pas de x dans E et est la loi de X_n

La CNS pour qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqslant 0}$ soit une suite indépendante pour toute loi de départ est que $p_n(\cdot, y)$ soit constante, pour tout y dans E.

1.3.2 Sommes de variables aléatoires indépendantes

On pose $X_n := X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$ pour une suite indépendante $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ indépendante de X_0. Par exemple $Y_n = \pm 1$ pour une marche au hasard sur $\mathbb{Z}$; ou $Y_n = \pm e_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant d$ pour une marche au hasard sur $\mathbb{Z}^d$; ou Y_n à valeurs dans l'ensemble des générateurs d'un groupe de type fini ; etc. En tous cas, sauf cas particulier, les variables aléatoires $(X_n)_n$ ne sont pas indépendantes.

Légende : Pólya, promenade en congrès, parc, amoureux, rencontres répétées, récurrence et transience.

La CNS pour être dans ce cas est de pouvoir écrire p_n comme $p_n(x, y) = r_n(y - x)$. Alors r_n est la loi de Y_n.

1.3.3 Marche au hasard sur un graphe

Graphe non orienté, $w(e) \geqslant 0$ est le poids de l'arête e, on suppose que, pour tout sommet x, $w(x) := \sum_y w(x,y)$ est fini et strictement positif. On pose alors

$$p(x,y) := w(x,y)/w(x).$$

Par exemple, poids plus fort sur les arêtes qui rapprochent de l'origine. Sur un arbre régulier de racine o, $w(e) = x^n$ si e relie deux sommets à distance n et $n+1$ de o. (Remarque : même si le degré est impair, c'est un graphe de Cayley.) Si $x > 1$, on favorise l'éloignement, si $x < 1$, on favorise le fait de se rapprocher de o. Valeur critique : sur l'arbre de degré $d+1$, transient si $x > 1/d$ et récurrent si $x \leqslant 1/d$.

1.3.4 Processus de branchement

Bienaymé. Galton-Watson : extinction des noms de famille (de la noblesse britannique). Question posée (et résolue) dans le Times.

Construction Nombres de fils i.i.d. Si on ne regarde que la taille des générations,

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{n,k},$$

avec la convention $Z_{n+1} := 0$ si $Z_n := 0$. Il s'agit d'une chaîne de Markov (preuve) sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition $p(0,0) = 1$ et, pour tout $i \geqslant 1$,

$$p(i,j) := \mathbb{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_i = j),$$

pour une suite $(\xi_i)_{i\geqslant 1}$ i.i.d. de loi la loi commune des $\xi_{n,k}$.

Résolution du problème de Watson Extinction $D := \{Z_n \to 0\}$ donc $D = \{\exists n,\, Z_n = 0\}$ et il suffit de regarder le cas $Z_0 = 1$ puisque par indépendance $\mathbb{P}(D \,|\, Z_0 = k) = \mathbb{P}(D \,|\, Z_0 = 1)^k$.

Par ailleurs, la suite $q_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ est croissante puisque les ensembles $\{Z_n = 0\}$ forment une suite croissante, et $q_n \to q$. On ne peut pas calculer q_n pour tout n mais on peut calculer la limite $q = \mathbb{P}(D)$.

Fonctions génératrices. Diagramme, point fixe avec escalier, $q = f(q)$, dichotomie selon $m := \mathbb{E}(\xi)$, différence critique versus sous-critique : taille de l'arbre ou hauteur de l'arbre non intégrable versus exponentiellement intégrable.

Équation fonctionnelle associée Martingale, $mW = \sum_{k=1}^{\xi} W^{(k)}$ en loi, les deux récurrences (conditionnement par la première génération ou par l'avant-dernière), donc la transformée de Laplace de W vérifie

$$\lambda(s) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-sW}), \quad \lambda(s) = f(\lambda(s/m)), \ s \geqslant 0.$$

Solution non dégénérée si et seulement si $\xi \log \xi$ intégrable (dichotomie de Kesten-Stigum).

1.4 Exercices

1.4.1 Marche sur $\mathbb{Z}$

Cas symétrique, la série des $\mathbb{P}_0(X_n = 0)$ diverge.

Calcul de $g(s) := \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}_0(X_n = 0)s^n$. On trouve $g(s) = 1/\sqrt{1-s^2}$.

Temps de retour en 0 : $h(s) := \mathbb{E}_0(s^{T_0})$. Markov utilise $T_0(\mathbb{P}_1)$ et $T_0(\mathbb{P}_2)$ qui coïncide avec la loi de la somme de deux copies inépendantes de T_0 sous $\mathbb{P}_1$, donc $h(s) = 1 - \sqrt{1-s^2}$.

Vérification du bon signe dans $\pm$ par les premiers termes du développement ou la condition d'appartenir à l'intervalle $[0, 1]$.

Lien général entre g et h : chaîne de Markov, x un sommet quelconque,

$$g(s) := \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}_x(X_n = x)s^n, \quad h(s) := \mathbb{E}_x(s^{T_x}) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}_x(T_x = n)s^n,$$

pour $0 \leqslant s < 1$, avec $T_x := \inf\{n \geqslant 1, \ X_n = x\}$.

En décomposant la trajectoire entre ses retours en x et en utilisant sans le dire la propriété forte de Markov, on montre le

Théorème 1.2. $g(s) = 1/(1 - h(s))$.

1.4.2 Précisions

Lemme 1.2. *Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une chaîne de Markov de loi initiale m et de noyaux $(p_n)_{n \geqslant 1}$. Soit $(k_n)_{n \geqslant 0}$ une suite croissante $k_0 \geqslant 0$ et $k_{n+1} > k_n$. Soit $Y_n := X_{k_n}$. Alors $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale n et de noyaux $(q_n)_{n \geqslant 1}$ avec*

$$n := mp_1 \cdots p_{k_0}, \quad q_n := p_{k_{n-1}+1} \cdots p_{k_n}.$$

Notations

Soient p et p' des noyaux de transition, m une mesure de probabilité et u une fonction sur E. On note mp la mesure de probabilité, mu le nombre, pu la fonction et pp' le noyau définis par

$$mp(x) := \sum_y m(y)p(y,x), \; mu := \sum_x m(x)u(x),$$

et

$$pu(x) := \sum_y p(x,y)u(y), \; pp'(x,y) := \sum_z p(x,z)p'(z,y).$$

Tout fonctionne puisqu'il s'agit de calcul matriciel.

Par exemple, la loi de X_1 est mp_1, la loi de X_n est $mp_1 \cdots p_n$, le noyau qui permet de passer de la loi de X_i à celle de X_j avec $j > i$ est $p_{i+1} \cdots p_j$, donc en particulier,

$$\mathbb{E}_m(u(X_n)) = mp_1 \cdots p_n u, \quad \mathbb{E}_x(u(X_n)) = p_1 \cdots p_n u(x).$$

1.4.3 Modèle de mutations de Jukes-Cantor

Lettres A,C,G et T, $p(x,y) = a$ pour tous $x \neq y$, donc $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$. Calcul des puissances en passant par la matrice $J := (\frac{1}{4})$ dont tous les termes sont égaux et par l'idéal engendré par J dans lequel les règles de calcul sont $J^2 = J$ et qui coïncide donc avec l'espace vectoriel engendré par I et J. On obtient $p = (1-4a)I + 4aJ$ et

$$p^n = (1-4a)^n(I-J) + J.$$

On voit que $p^n \to J$ et que J correspond à une suite i.i.d. de loi uniforme sur l'alphabet. C'est le cas général si on remplace chaque ligne de J par π distribution stationnaire. Donc, si $X_0(\mathbb{P}) = \pi$, $X_n(\mathbb{P}) = \pi$ pour tout n et, pour toute loi initiale $X_0(\mathbb{P}) = m$, $X_n(\mathbb{P}) \longrightarrow \pi$ quand $n \to \infty$.

Plongement dans un semi-groupe continu Si $p(a) := (1-4a)I + 4aJ$, alors $p(a)p(b) = p(a * b)$ pour la loi de composition

$$1 - 4(a * b) := (1-4a)(1-4b).$$

Paramétrons par $1 - 4a = \mathrm{e}^{-t}$ avec $t \geqslant 0$. On se restreint donc aux valeurs $0 \leqslant a < \frac{1}{4}$ et on pose $\alpha(t) := \frac{1}{4}(1 - \mathrm{e}^{-t})$. Il vient $p(\alpha(t))p(\alpha(s)) = p(\alpha(t+s))$ donc $p \circ \alpha$ réalise un morphisme entre le semi-groupe $(\mathbb{R}^+, +)$ et l'ensemble des matrices $(p(a), 0 \leqslant a < \frac{1}{4})$ muni de la loi de composition $*$.

On dispose donc de toutes les puissances de ces matrices : si $a = \alpha(t_a)$ et $x \geqslant 0$, $p(a)^x = p(\alpha(t_a x))$ (bien sûr, on sait que $t_a := -\log(1-4a)$). De plus on est sûr d'obtenir une matrice de transition. Si on considère seulement les racines carrées, on obtient un noyau de transition entre X_n et une nouvelle variable aléatoire $X_{n+\frac{1}{2}}$. Plus généralement, il existe un processus de Markov $(\xi_t)_t$ indexée par $\mathbb{R}^+$, tel que $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ est distribué comme $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

La dynamique de ce nouveau processus est la suivante : pendant l'intervalle de temps $[t, t+\mathrm{d}t]$, pour chaque $y \neq x$,

$$\mathbb{P}(\xi_{t+\mathrm{d}t} = y \,|\, \xi_t = x) = t_a \mathrm{d}t/4 + o(\mathrm{d}t),$$

et donc

$$\mathbb{P}(\xi_{t+\mathrm{d}t} = x \,|\, \xi_t = x) = 1 - 3t_a \mathrm{d}t/4 + o(\mathrm{d}t).$$

Définition 1.3. *Processus de Markov en temps continu : la loi de la famille $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ indexée par $\mathbb{R}^+$ est décrite par une mesure initiale m et par un semi-groupe continu $(p_t)_{t\geqslant 0}$ de noyaux de transition. Donc $p_t p_s = p_{t+s}$ pour tous t et s (semi-groupe) et $p_t \longrightarrow I$ quand $t \to 0^+$ (continuité). On pose alors, pour toute suite croissante $(t_k)_k$ telle que $t_0 := 0$,*

$$\mathbb{P}_m(\xi_{t_k} = x_k,\, 1 \leqslant k \leqslant n) = m(x_0) \prod_{k=1}^{n} p_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k).$$

En d'autres termes le vecteur $(\xi_{t_k})_k$ est une chaîne de Markov inhomogène de loi initiale m et le noyau de transition entre $\xi_{t_{k-1}}$ et ξ_{t_k} est $p_{t_k - t_{k-1}}$.

De manière générale, un processus de Markov en temps continu est décrit par un générateur de la façon suivante. Pour tous x et y distincts, soit $a(x,y) \geqslant 0$. On suppose que pour tout x, $a(x) := \sum_y a(x,y)$ converge. On impose alors, pour tout $x \neq y$,

$$\mathbb{P}(\xi_{t+\mathrm{d}t} = y \,|\, \xi_t = x) = a(x,y)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t),$$

et donc, pour tout x,

$$\mathbb{P}(\xi_{t+\mathrm{d}t} = x \,|\, \xi_t = x) = 1 - a(x)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t).$$

Alors tout cela existe et le noyau p_t vaut

$$p_t := \exp(tA), \quad A_{xx} := -a(x),\; A(x,y) := a(x,y),\; x \neq y.$$

L'exponentielle est à prendre au sens des exponentielles de matrices donc au sens du développement en série entière, la matrice A s'appelle le générateur infinitésimal du processus $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ et A vérifie les conditions

$$\sum_y A_{xy} = 0, \quad A_{xy} \geqslant 0,\; x \neq y.$$

Dans le cas Jukes-Cantor, on obtient simplement $A = -t_a(I - J)$.

Exercice à chercher Soit p une matrice de transition de taille $N \times N$. Trouver des conditions nécessaires ou des obstructions ou des conditions suffisantes pour qu'il existe un générateur A tel que $p = \exp(A)$.

2 Construction

2.1 Rappels

Une chaîne de Markov en temps et espace discrets est un processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ décrit par un noyau $p : E\times E \to [0,1]$ et une condition initiale $m : E \to [0,1]$. La loi est entièrement spécifiée si on précise que, pour tout ensemble d'indices $0 < i_1 < \cdots < i_n$, l'espérance $\mathbb{E}_m\Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ vaut

$$\sum_{x_{0:n}} m(x_0)p^{i_1}(x_0,x_1)p^{i_2-i_1}(x_1,x_2)\cdots p^{i_n-i_{n-1}}(x_{n-1},x_n)\,\Phi(x_0,\ldots,x_n),$$

pour toute fonction Φ convenable, par exemple bornée, où on définit les puissances successives d'un noyau de transition p par $p^0(x,y) = \mathbf{1}(x = y)$ puis, pour tout $k \geqslant 0$,

$$p^{k+1}(x,z) := \sum_y p^k(x,y)p(y,z).$$

Un cas particulier donne la loi de X_n comme

$$\mathbb{P}_m(X_n = x) = \sum_y m(y)\,p^n(y,x).$$

On voit que $p(x,\cdot)$ et m sont en fait des mesures sur $(E, \mathcal{P}(E))$, en posant pour tout $B \subset E$,

$$m(B) := \sum_{x\in B} m(x), \quad p(x,B) := \sum_{y\in B} p(x,y).$$

Temps discret / espace continu : à présent, m est une mesure de probabilité sur $(E,\mathcal{E})$ et pour tout x dans E, $p(x,\cdot)$ est une mesure de probabilité sur $(E,\mathcal{E})$. On demande que $x \mapsto p(x,\cdot)$ soit mesurable pour la convergence étroite et on pose par exemple

$$\mathbb{E}_m\Phi(X_i,X_j) = \int m(\mathrm{d}x)\int p^i(x,\mathrm{d}y)\int p^{j-i}(y,\mathrm{d}z)\,\Phi(y,z),$$

pour toute fonction Φ convenable, par exemple bornée, et pour tout couple d'indices $i < j$, où on définit maintenant les puissances successives du noyau p par $p^0(x,\cdot) = \delta_x$ puis, pour tout $k \geqslant 0$,

$$p^{k+1}(x,\mathrm{d}z) := \int p^k(x,\mathrm{d}y)p(y,\mathrm{d}z),$$

ce qui est une forme abrégée du fait que, pour toute fonction test Φ,

$$\int \Phi(z)\, p^{k+1}(x, \mathrm{d}z) := \iint \Phi(z)\, p^k(x, \mathrm{d}y) p(y, \mathrm{d}z).$$

2.2 Construction universelle

De retour au temps discret et à l'espace discret, on va montrer que de tels processus existent effectivement.

La construction est canonique : on se place sur $\Omega := E^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu $\mathcal{F} := \mathcal{P}(E)^{\otimes\mathbb{N}}$, on munit chaque $\Omega_n := E^{n+1}$ de la tribu $\mathcal{P}(E^{n+1})$ et de la mesure p_n définie par

$$p_n(x_{0:n}) := m(x_0) \prod_{k=1}^{n} p(x_{k-1}, x_k), \quad x_{0:n} \in E^{n+1}.$$

Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu sur Ω définie par $\mathcal{F}_n := \mathcal{P}(E^{n+1}) \otimes \{\emptyset, E\}^{\otimes\mathbb{N}}$ et P_n la mesure sur $\mathcal{F}_n$ définie par

$$P_n(A \times E^{\otimes\mathbb{N}}) := p_n(A), \qquad A \in \mathcal{P}(E^{n+1}).$$

Les mesures $(P_n)_{n\geqslant 0}$ forment un système projectif de mesures sur $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $P_i(A) = P_j(A)$ pour tous indices $i < j$ et tout A dans $\mathcal{F}_i$. D'après le théorème d'extension de Carathéodory, il existe une mesure P sur la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_n$, qui coïncide avec P_n sur $\mathcal{F}_n$, pour tout n. Comme cette tribu engendrée est $\mathcal{F}$, on a terminé.

2.3 Encore des exemples

2.3.1 Marches au hasard sur les graphes

2.3.2 Chaînes de Markov à grande mémoire

Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé. Supposons que la loi de X_n, pour $n \geqslant k$, dépend de $X_{n-k:n-1}$. La distribution de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est donc spécifiée par une mesure initiale m sur E^k et un noyau de transition p sur $E^k \times E$, tels que pour tout $n \geqslant k-1$ et tout $x_{0:n} \in E^{n+1}$

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) := m(x_{0:k-1})\, p(x_{0:k-1}, x_k)\, p(x_{1:k}, x_{k+1}) \cdots p(x_{n-k:n-1}, x_n).$$

Le cas $k = 0$ correspond à une suite i.i.d. Le cas $k = 1$ correspond aux chaînes de Markov au sens usuel. Le cas général ne se différencie guère du cas classique, à part par des notations plus lourdes : en effet, si $k \geqslant 1$, notons Y_n le k-uplet $Y_n := X_{n:n+k-1}$. Alors, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov d'ordre k si et seulement si $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov au sens usuel. Les transitions q de la chaîne de Markov Y sont dégénérées puisque, pour tous $y := x_{1:k}$ et $y' := x'_{1:k}$,

$$q(y, y') = p(x_k, x'_k)\, \mathbf{1}(x_{2:k} = x'_{1:k-1}).$$

2.3.3 Chaîne d'Ehrenfest

Expérience de pensée (*Gedankenexperiment*) proposée par les physiciens Paul et Tatiana Ehrenfest au début du siècle dernier dans le but de concilier les descriptions macroscopique (non réversible) et microscopique (réversible) des lois du mouvement. Exemple : pneu de vélo dont on ouvre la valve pour le gonfler !

Réversibilité (microscopique) : l'état d'un gaz est décrit par l'ensemble s des positions et des vitesses de ses particules. Avec les lois du choc et celles du mouvement, on dispose d'une transformation (déterministe) $s \mapsto t(s)$ telle que $t(s)$ est l'état du système après une minute si l'état initial est s. Soit $i(s)$ la configuration qui remplace les vitesses par leurs opposés et qui conserve les positions. Il se trouve que $t(i(t(s))) = s$ pour tout s. On ne peut pas deviner si le film est projeté correctement ou à l'envers.

Expérience des Ehrenfest : compartiments A et B, N particules en tout, on choisit une particule au hasard (uniformément parmi les N possibles) et on la change de compartiment. État : nombre de particules dans A. Transitions $p(k, k-1) = k/N$ et $p(k, k+1) = (N-k)/N$.

Description de la dynamique quand $N = 20$ et quand $N = 10^{23}$ (nombre d'Avogadro). Temps de gonflage $T_N \approx 2^N$.

2.3.4 Modèles de Markov cachés (HMM)

Origine des modèles : reconnaissance de la parole dans les années 60 (Baum, Petrie, Katz, etc.), puis cadre théorique redécouvert dans les années 80 et 90 pour modéliser les séquences génomiques.

Description sixties $Y_n := G(X_n)$ avec $(X_n)_n$ une chaîne de Markov. Si G est injective, $(Y_n)_n$ est aussi une chaîne de Markov, ce n'est pas intéressant. Si G non injective, $(Y_n)_n$ n'est pas a priori une chaîne de Markov.

Exemple États $\{1, 2, 3, 4\}$, transitions $p(1, 2) = 1$, $p(2, 3) = x$, $p(2, 4) = 1 - x$, $p(3, 2) = \frac{1}{2}$, $p(3, 4) = \frac{1}{2}$, $p(4, 3) = \frac{1}{2}$ et $p(4, 1) = \frac{1}{2}$. On regroupe les états en $a := \{1, 2\}$ et $b := \{3, 4\}$. Si on sort de b, on va toujours vers 1 si on est en 4 et on va toujours vers 2 si on est en 3. Si on est en a, on en sort si on est en 2 et on y reste une fois avant d'en sortir si on est en 1. Donc on sait que la suite $Y_nY_{n+1} = aa$ signifie que $X_{n+1} = 2$, $Y_{n+2} = b$ et X_{n+2} suit la distribution $x\delta_3 + (1-x)\delta_4$. Si on reste dans b, on fait des allers-retours entre 3 et 4 donc, pour tout $i \geqslant 1$, le dernier état de aab^{2i} correspond à 3 ou 4 selon la distribution $x\delta_4 + (1-x)\delta_3$ et le dernier état de aab^{2i+1} correspond à 3 ou 4 selon la distribution $x\delta_3 + (1-x)\delta_4$. Par conséquent, le dernier état de $aab^{2i}a$ suit la loi $x\delta_1 + (1-x)\delta_2$ et le dernier état de $aab^{2i+1}a$ suit la loi $x\delta_2 + (1-x)\delta_1$. Au temps suivant, on vaut de nouveau a si et seulement si on est en 1. On a montré que, pour tout $i \geqslant 1$ et tout $j \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(Y_{2i+j+4} = a \,|\, Y_{j+1:2i+j+3} = aab^{2i}a) = x,$$

et

$$\mathbb{P}(Y_{2i+j+4} = a \,|\, Y_{j:2i+j+3} = aab^{2i+1}a) = 1 - x.$$

Si $x \neq \frac{1}{2}$, $(Y_n)_n$ n'est une chaîne de Markov pour aucun ordre.

Exercice Si $x = \frac{1}{2}$, montrer que $(Y_n)_n$ est markovien d'ordre 2 avec les transitions $q(aa, b) = 1$ et $q(xy, z) = \frac{1}{2}$ pour tout mot de 2 lettres $xy \neq aa$ et toute lettre z.

Description eighties Couple de processus, appelés le processus des états $(X_n)_n$ et le processus des observations $(Z_n)_n$, $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov de loi (m, p) et conditionnellement à $(X_n)_n$, $(Z_n)_n$ est un processus indépendant et la loi de Z_n ne dépend que de X_n. Soit $r(x, \cdot)$ la loi de Z_n sachant que $X_n = x$. Alors

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n},\, Z_{0:n} = z_{0:n}) = m(x_0)\, r(x_0, z_0) \prod_{k=1}^{n} p(x_{k-1}, x_k)\, r(x_k, z_k).$$

Paramètres : les mesures m et $p(x, \cdot)$ pour x dans $\mathcal{X}$ sont des lois sur l'espace $\mathcal{X}$ des états, les mesures $r(x, \cdot)$ pour x dans $\mathcal{X}$ sont des lois sur l'espace $\mathcal{Z}$ des observations.

En général, $(Z_n)_n$ n'est pas markovien puisque

$$\mathbb{P}(Z_{0:n} = z_{0:n}) = \sum_{x_{0:n}} m(x_0)\, r(x_0, z_0) \prod_{k=1}^{n} p(x_{k-1}, x_k)\, r(x_k, z_k),$$

ne se factorise pas comme

$$M(z_0) \prod_{k=1}^{n} Q(z_{k-1}, z_k),$$

pour une mesure M et un noyau de transition Q sur l'espace $\mathcal{Z}$.

Conditionnellement à $(X_n)_n$, $(Z_n)_n$ est un processus indépendant inhomogène et la loi conditionnelle de Z_n ne dépend que de X_n et vaut $r(X_n, \cdot)$.

Exercice Donner la loi de la suite $(X_n)_n$ des états conditionnellement à la suite $(Z_n)_n$ des observations. On reconnaît une structure assez simple.

Relation entre les deux descriptions Si on part du couple (X, Z), alors il existe une chaîne de Markov W et une fonction Φ telles que Z suit la loi de $\Phi(W)$. Solution : $W := (X, Z)$ à valeurs dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ et Φ la projection sur la coordonnée de $\mathcal{Z}$. Dans l'autre sens, on garde la même chaîne de Markov X et on pose $Z := Y$. Alors les observations suivent les lois $r(x, \cdot) := \delta_{G(x)}$.

Remarque : mathématiquement, les deux présentations sont équivalentes, mais pas algorithmiquement puisque W vit dans un gros espace.

2.3.5 Durées de séjour non markoviennes

Si X est une chaîne de Markov issue de $X_0 = x$ et si $p(x, x) = 1$, on reste en x pour toujours. Si $p(x, x) \neq 1$, le premier temps de sortie de x défini comme $T := \inf\{n \geqslant 1\,;\, X_n \neq x\}$ suit une loi géométrique de paramètre $p(x, x)$. En particulier $\mathbb{E}(T) = 1/(1 - p(x, x))$ suffit à déterminer complètement la loi de T. On peut vouloir s'affranchir de cette contrainte en se donnant une famille de lois $(s_x)_x$ sur $\mathbb{N}^*$, un noyau p tel que $p(x, x) = 0$ pour tout x et une loi initiale m. Alors, pour toute suite $(x_j)_j$ d'états tels que $x_j \neq x_{j+1}$ pour tout $j \geqslant 1$ et toute suite d'instants $(i_j)_j$ tels que $i_0 = 0$ et $i_j < i_{j+1}$ pour tout $j \geqslant 0$, on considère l'évènement A suivant : $X_n = x_1$ pour tout $0 \leqslant n < i_1$, puis $X_n = x_2$ pour tout $i_1 \leqslant n < i_2$, etc., et enfin $X_n = x_k$ pour tout $i_{k-1} \leqslant n < i_k$. Alors

$$\mathbb{P}(A) = m(x_1) \times \prod_{j=1}^{k-1} s_{x_j}(i_j - i_{j-1})\, p(x_j, x_{j+1}) \times s_{x_k}([i_k - i_{k-1}, +\infty[).$$

Le dernier terme correspond à une censure puisqu'on ne sait pas encore quand le processus quittera x_k. La dynamique correspond à des transitions d'état en état selon le noyau p et au fait qu'une fois arrivé en un état x, on y reste pendant un temps aléatoire distribué selon s_x.

Ce processus ne peut pas être markovien dès qu'il existe un état x tel que s_x n'est pas une loi géométrique. On se ramène tout de même au cas markovien, en élargissant encore une fois l'espace d'états. En effet, notons T_n le temps depuis lequel on est arrivé en l'état actuel au temps n, donc

$$T_n := \max\{k \geqslant 1,\, X_n = X_{n-1} = \cdots = X_{n-k+1}\}.$$

Alors (X_n, T_n) est une chaîne de Markov sur $E \times \mathbb{N}^*$ dont les seules transitions non nulles sont, pour tout sommet x et tout $k \geqslant 1$,

$$q((x, k); (x, k + 1)) := \frac{s_x([k + 1, +\infty[)}{s_x([k, +\infty[)},$$

et

$$q((x,k);(y,0)) := \frac{s_x(k)\,p(x,y)}{s_x([k,+\infty[)}, \qquad x \neq y.$$

Exercice Soit S_n le temps qui reste à passer en l'état actuel, donc on pose pour tout $k \geqslant 0$,

$$\{S_n \geqslant k\} := \{X_n = \cdots = X_{n+k}\}.$$

Montrer que (X_n, S_n) est une chaîne de Markov sur $E \times \mathbb{N}$ et calculer sa matrice de transition.

Exercice Une autre façon de retrouver une chaîne de Markov, mais en perdant de l'information, est de considérer le processus $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ défini comme suit. Soit $\tau_0 := 0$ et $Z_0 := X_0$ puis, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\tau_{k+1} := \inf\{i \geqslant \tau_k\,;\, X_i \neq X_{\tau_k}\}, \quad Z_{k+1} := X_{\tau_{k+1}}.$$

1) Montrer que Z est une chaîne de Markov sur E et calculer sa matrice de transition.
2) Expliquer comment on peut construire un processus qui suit la loi de X à partir de Z et de la connaissance des lois $(s_x)_x$.

2.3.6 Réalisation d'une chaîne de Markov

Soit U et $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d., par exemple de loi uniforme sur $[0,1]$, Φ une fonction mesurable et Z une variable aléatoire indépendante de la suite $(U_n)_n$. Alors le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ défini par

$$X_0 := Z, \quad X_{n+1} := \Phi(X_n, U_{n+1}),\ n \geqslant 0,$$

est une chaîne de Markov de loi initiale $m := \text{loi}(Z)$ et de noyau de transition p défini par

$$p(x,y) := \mathbb{P}(\Phi(x,U)) = y).$$

Réciproquement, toute chaîne de Markov peut être réalisée ainsi.

Proposition 2.1. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov de loi (m,p) et $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Il existe des fonctions Φ et Ψ telles que le processus $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ défini récursivement par*

$$Y_0 := \Psi(U_0), \quad Y_{n+1} := \Phi(Y_n, U_{n+1}),\ n \geqslant 0,$$

suit la loi de $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

La preuve est constructive. Comme E est fini ou dénombrable, on ordonne les états, donc on écrit $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Pour toute mesure de probabilité μ sur E, notons $K(\mu) : [0,1] \to E$ la fonction définie par $K(\mu)(1) := x_1$ et, pour tout $k \geqslant 1$ au plus égal au cardinal de E,

$$K(\mu)(u) := x_k \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{k-1} \mu(x_i) \leqslant u < \sum_{i=1}^{k} \mu(x_i).$$

On pose alors

$$\Psi := K(m), \qquad \Phi(x, \cdot) := K(p(x, \cdot)).$$

Remarque 2.2. *On peut remplacer la loi uniforme par toute loi suffisant à simuler les lois m et $p(x, \cdot)$.*

3 Outils de base

3.1 Propriété simple de Markov

Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ un processus quelconque et soit $n \geqslant 0$. Le futur à l'instant n est le processus $X_n^+ := (X_{n+k})_{k \geqslant 0}$, le passé à l'instant n est le processus $X_n^- := (X_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, la tribu du passé à l'instant n est

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_n^-) = \sigma(X_k,\, 0 \leqslant k \leqslant n),$$

et la tribu du futur à l'instant n est

$$\mathcal{F}_n^+ := \sigma(X_n^+) = \sigma(X_{n+k},\, k \geqslant 0).$$

Proposition 3.1 (Propriété simple de Markov). *Toute chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie la propriété simple de Markov, à savoir que*

$$\mathrm{loi}(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathrm{loi}(X_n^+ \,|\, X_n) \quad \textit{p.s.}$$

Une formulation équivalente est que le futur et le passé de la chaîne de Markov sont indépendants conditionnellement à son présent, c'est-à-dire

$$\mathrm{loi}((X_n^+, X_n^- \,|\, X_n) = \mathrm{loi}(X_n^+ \,|\, X_n) \otimes \mathrm{loi}(X_n^- \,|\, X_n) \quad \text{p.s.}$$

Sous cette forme plus symétrique, on peut se douter que le processus renversé en temps d'une chaîne de Markov vérifie des propriétés intéressantes. À voir plus tard.

Concrètement, la propriété simple de Markov affirme donc que pour tout A dans $\mathcal{F}_n$ et tout B dans $\mathcal{F}_n^+$,

$$\mathbb{P}(A \cap B \,|\, X_n) = \mathbb{P}(A \,|\, X_n)\, \mathbb{P}(B \,|\, X_n) \quad \text{p.s.}$$

3.2 Temps d'arrêt

On veut pouvoir faire la même chose que ci-dessus pour des temps aléatoires.

Définition 3.2. *Soit $(G_n)_{n\geqslant 0}$ une filtration, c'est-à-dire une suite croissante de tribus $G_n \subset \mathcal{F}$. Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ est un temps d'arrêt pour $(G_n)_{n\geqslant 0}$ si $\{T=n\}$ appartient à G_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

Conséquences : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\{T\leqslant n\}$ appartient à G_n. De plus, l'évènement $\{T=+\infty\}$ appartient à la tribu engendrée par la réunion croissante des tribus G_n.

Désormais, on suppose que $G_n=\mathcal{F}_n$. Donnons quelques exemples.
- $T=14$ p.s. est un temps d'arrêt.
- Tout temps d'atteinte est un temps d'arrêt : $T=\inf\{n\,;\,X_n\in B_n\}$; $T=\inf\{n\,;\,Y_n\in B_n\}$ pour n'importe quelle suite $(Y_n)_n$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, Y_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.
- $T=\inf\{n\,;\,X_n=X_{n-1}\}$ est un temps d'arrêt.
- $T=\inf\{n\,;\,X_n=X_{n+1}\}$ n'est pas un temps d'arrêt (en général).
- $T=\sup\{n\,;\,X_n\in B_n\}$ n'est pas un temps d'arrêt (en général).
- Si T est un temps d'arrêt, $T+1$ aussi mais pas $T-1$ (en général).
- Si S et T sont des temps d'arrêt, $\inf(S,T)$ et $\sup(S,T)$ aussi.

Tribu du passé d'un temps d'arrêt

$$\mathcal{F}_T := \{B\in\mathcal{F}\,;\,\forall n\in\mathbb{N},\, B\cap\{T=n\}\in\mathcal{F}_n\}.$$

Proposition 3.3. *Si $T=n$ p.s., alors $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_n$. Si S et T sont des temps d'arrêt et $S\leqslant T$ p.s., alors $\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$.*

Remarque : toutes les tribus sont complétées par tous les négligeables de $\mathcal{F}$.

Exercice Si T est un temps d'arrêt p.s. fini, alors X_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.

On complète désormais E par un cimetière $\partial\notin E$, donc on remplace E par $E\cup\{\partial\}$ muni de la tribu engendrée par $\mathcal{F}$ et par $\{\partial\}$.

3.3 Propriété forte de Markov

Définition 3.4. *On demande que pour tout temps d'arrêt T p.s. fini,*

$$\mathrm{loi}((X_{T+k})_{k\geqslant 0}\,|\,\mathcal{F}_T)=\mathrm{loi}((X_{T+k})_{k\geqslant 0}\,|\,X_T)\quad p.s.$$

Théorème 3.5. *Toute chaîne de Markov homogène, c'est-à-dire dont le noyau de transition ne dépend pas du temps, vérifie la propriété forte de Markov.*

Preuve : Soit A dans $\mathcal{F}_T$. Alors, pour toute fonction test Φ,

$$\mathbb{E}(\Phi(X_T^+) : A) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{E}(\Phi(X_n^+) : A \cap \{T = n\}),$$

car T est p.s. fini. Soit $n \geqslant 0$ fixé. En conditionnant tout par $\mathcal{F}_n$ dans le terme numéro n de la série, en utilisant la propriété de Markov simple et le fait que $A \cap \{T = n\}$ appartient à $\mathcal{F}_n$ puisque A appartient à $\mathcal{F}_T$, on voit que ce terme vaut

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\Phi(X_n^+) \,|\, \mathcal{F}_n) : A \cap \{T = n\}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Phi(X_n^+) \,|\, X_n) : A \cap \{T = n\}).$$

Par définition, $\mathbb{E}(\Phi(X_n^+) \,|\, X_n)$ est une fonction de X_n et par homogénéité de la chaîne, cette fonction Ψ ne dépend pas de n. Il vient

$$\mathbb{E}(\Phi(X_T^+) : A) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{E}(\Psi(X_n) : A \cap \{T = n\}) = \mathbb{E}(\Psi(X_T) : A).$$

On a montré que

$$\mathbb{E}(\Phi(X_T^+) \,|\, \mathcal{F}_T) = \Psi(X_T) \quad \text{p.s.}$$

Comme $\Psi(X_T)$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable, ceci démontre le résultat.

3.4 On a oublié Joe Doob !

On rappelle que $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ si et seulement si, pour tout $n \geqslant 0$, M_n est intégrable et $\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = M_n$ presque sûrement.

Théorème 3.6 (Doob). *Soit $(M_n)_{n \geqslant 0}$ une martingale.*

1) Pour tout temps d'arrêt T borné, $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

2) Pour tout temps d'arrêt T presque sûrement fini, si $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est uniformément intégrable, alors $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

3) Si $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est uniformément intégrable, il existe une variable aléatoire M telle que $M_n = \mathbb{E}(M \,|\, \mathcal{F}_n)$ presque sûrement et telle que $M_n \longrightarrow M$ presque sûrement et dans L^1.

Preuve : 1) On décompose selon les valeurs de T entre 0 et N fini.
2) $T \wedge n$ est un temps d'arrêt borné donc 1) donne

$$\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(M_T) + \mathbb{E}(M_n - M_T : T > n).$$

Soit u positif. D'après l'hypothèse d'uniforme intégrabilité, il existe v tel que $\mathbb{E}(|M_n| : A) \leqslant u$ pour tout n et tout A tel que $\mathbb{P}(A) \leqslant v$. Comme T est presque sûrement fini, $\mathbb{P}(A) \leqslant v$ si on pose $A := \{T > n\}$, pour tout n assez grand, donc $|\mathbb{E}(M_n - M_T : T > n)|$ vaut

$$\left|\mathbb{E}(M_n : A) - \sum_{k>n} \mathbb{E}(M_k : T = k)\right| \leqslant u + \sum_{k>n} \mathbb{E}(|M_k| : T = k).$$

Soit $\ell > n$. D'après la propriété de surmartingale de la suite $(|M_n|)_n$,

$$\sum_{n<k<\ell} \mathbb{E}(|M_k| : T = k) \leqslant \sum_{n<k<\ell} \mathbb{E}(|M_\ell| : T = k) \leqslant \mathbb{E}(|M_\ell| : A) \leqslant u,$$

donc quand $\ell \to \infty$, on obtient $|\mathbb{E}(M_n - M_T : T > n)| \leqslant 2u$, cqfd.
3) Admis. On compte les montées et les descentes.

[Référence : David Williams, Probability with martingales, pages 106-109.]

Exemple 3.7. Marche symétrique ou asymétrique sur un segment de $\mathbb{Z}$, probabilités de sortie. Marche sur $\mathbb{N}$, temps d'atteinte de 1, donc $(X_n)_n$ n'est pas uniformément intégrable. □

4 Classification

4.1 Topologie de l'ensemble des états

Soit $X := (X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov de paramètres (m, p) sur l'espace d'états E.

Définition 4.1 (Communication). *Sommet y accessible depuis x. Sommet x inessentiel (il existe y accessible depuis x tel que x n'est pas accessible depuis y. Sommets x et y qui communiquent. Classe fermée si $p(x, C) = 1$ pour tout x dans C. Chaîne irréductible si une seule classe de communication.*

Exemple 4.2. Structure générale : plusieurs cercles discrets avec des cheveux d'accès. □

L'ensemble des sommets essentiels est une classe fermée.

Théorème 4.3 (Période). *Si X est irréductible, il existe un unique entier $d \geqslant 1$ et une unique partition de E en classe C_i pour i dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ telle que $p(x, C_{i+1}) = 1$ pour tout x dans C_i, et telle que d est maximale. L'entier d s'appelle la période de X.*

Le théorème 4.3 est conséquence des faits suivants : soit $d(x)$ le pgcd de l'ensemble $D(x)$ des n tels que $p^n(x, x) \neq 0$. On appelle $d(x)$ la période de x. La période est une propriété de la classe de communication : si $x \leftrightarrow y$, alors

$d(x) = d(y)$. Preuve : On écrit que $D(x) \subset D(y) + k(x, y)$ pour un certain entier $k(x, y)$.

Si la période de X irréductible est d, pour tous x et y, il existe k et n_0 tels que $p^{k+dn}(x, y) \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_0$. Cas particulier : X irréductible et apériodique, alors $p^n(x, y) \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_{xy}$.

Exemple 4.4. Marche simple sur $\mathbb{Z}^d$; marche sur des boucles de longueurs ℓ_i reliées en o : alors d est le pgcd des ℓ_i ; et on voit que si la marche est apériodique, l'entier n_{xy} introduit ci-dessus peut être beaucoup plus grand que la longueur des chemins de x vers y et de y vers x. $\square$

4.2 Stationnarité

Mesure stationnaire : $\mu p = \mu$. Si la loi initiale est stationnaire, alors la loi de X_n ne dépend pas de n.

Exemple 4.5. Chaîne à deux états : faire le calcul. Ehrenfest : faire le calcul. Cas avec une mesure stationnaire (infinie) et sans distribution stationnaire : marche standard sur $\mathbb{Z}$. Cas avec plusieurs mesures stationnaires (infinies) : marche biaisée sur $\mathbb{Z}$. Alors la mesure uniforme et la mesure $m(x) := a^x$ pour $a \neq 1$ bien choisi sont stationnaires et la mesure infimum des deux a un sens, voir plus loin. $\square$

4.3 Renversement du temps

Théorème 4.6. *Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de paramètres $(m, (p_n)_n)$ et $N \geqslant 0$ un entier fixé. Pour tout $0 \leqslant n \leqslant N$, on note $Y_n := X_{N-n}$. Alors $(Y_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une chaîne de Markov de paramètres $(m', (p'_n)_{0 \leqslant n \leqslant N})$, avec $m' := mp^N$ et, pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$,*

$$p'_n(x, y) := (mp^{N-n})(y)\, p_{N-n+1}(y, x)\, (mp^{N-n+1})(x)^{-1}.$$

Corollaire 4.1. *Si X est homogène et stationnaire (m, p), pour tout $N \geqslant 0$, $(Y_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une chaîne de Markov homogène et stationnaire (m, p') avec*

$$p'(x, y) := m(y)\, p(y, x)\, m(x)^{-1}.$$

Il s'agit d'un système projectif de distributions donc on peut définir $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en considérant une copie $(X_{-n})_{n \geqslant 0}$ de Y issue de $Y_0 := X_0$.

Preuves : on calcule.

Exercice 4.7. Si on renverse une chaîne de Markov homogène dont la distribution initiale n'est pas stationnaire, le résultat n'est pas homogène. Faire le calcul si X est la chaîne de Markov de matrice de transition symétrique

sur deux états et si la mesure initiale est δ_0.
Montrer tout de même que si $N \to \infty$, alors pour tout K fixé, $(Y_n)_{0 \leqslant n \leqslant K}$ converge en loi vers la chaîne de Markov de départ (homogène) en régime stationnaire. □

Proposition 4.8. *Soit p un noyau de transition. Si μ est une distribution et q un second noyau de transition tels que $\mu(x)q(x,y) = \mu(y)p(y,x)$ pour tous x et y, alors μ est stationnaire pour p.*

Preuve : on calcule.

Définition 4.9 (Cas réversible). *Il existe une distribution π telle que, pour tous x et y, $\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$.*

Alors, la chaîne de Markov (π, p) est stationnaire et sa chaîne renversée en temps suit la même loi (π, p).

Attention : on demande une distribution stationnaire, pas seulement une mesure stationnaire. Exemple : marche sur $\mathbb{Z}$.

Exemple 4.10. S'il existe x et y tels que $p(x,y) \neq 0$ et $p(y,x) = 0$, on n'est pas dans le cas réversible (on peut distinguer les observations de la chaîne dans les sens croissant et décroissant du temps). □

Exemple 4.11. Ehrenfest est réversible. □

…et pourtant le comportement à partir de la distribution initiale δ_0 ne ressemble pas au comportement en temps retourné. Donc, attention à la distribution initiale.

4.4 Régénération

On va utiliser la propriété forte de Markov.

Définition 4.12. *Deux temps de passage à distinguer : le temps d'atteinte H_A et le temps de retour T_A, définis par*

$$H_A := \inf\{n \geqslant 0,\, X_n \in A\}, \quad T_A := \inf\{n \geqslant 1,\, X_n \in A\}.$$

Temps locaux : $N_A(n) := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}(X_k \in A)$ et $N_A := \sum_{k \geqslant 1} \mathbf{1}(X_k \in A)$. Si $A = \{x\}$, on écrit N_x. Attention : on ne compte pas X_0.

4.4.1 Dichotomie

Loi et espérance de N_x sous $\mathbb{P}_x$ et sous $\mathbb{P}_y$ pour $y \neq x$. Par conséquent, pour chaque x, dichotomie entre les cas (R) et (T).

(R) T_x est $\mathbb{P}_x$ presque sûrement fini et N_x est $\mathbb{P}_x$ presque sûrement infini.
(T) T_x est infini avec une probabilité strictement positive par rapport à $\mathbb{P}_x$ et N_x est $\mathbb{P}_x$ presque sûrement intégrable, et en particulier fini.

Chaque état x vérifie (R) ou (T). Deux états qui communiquent sont tous les deux du même type : récurrent (R) ou transient (T).

4.4.2 Cycles récurrents

Théorème 4.13 (Cycles de régénération). *Soit x un état récurrent, $\tau_0 := 0$ et, pour tout $k \geqslant 0$,*

$$\tau_{k+1} := \inf\{n \geqslant \tau_k + 1\,;\, X_n = x\}.$$

Les instants τ_k, $k \geqslant 1$, sont les visites successives de x. Le cycle de régénération numéro k de la chaîne entre deux visites de x est

$$\gamma_k := (X_{\tau_k+n})_{0 \leqslant n \leqslant \tau_{k+1}-\tau_k}.$$

Alors, la suite $(\gamma_k)_{k \geqslant 0}$ est i.i.d.

Si la mesure initiale est quelconque, $(\gamma_k)_{k \geqslant 1}$ est indépendante et $(\gamma_k)_{k \geqslant 0}$ est i.i.d. mais γ_0 peut ne pas avoir la même loi.

4.4.3 Cycles de régénération dans le cas transient

Une extension plus subtile concerne le cas où la chaîne de Markov démarre de x et où x est transient. Alors τ_k est infini à partir d'un certain rang et on peut décomposer les trajectoires de X comme suit. Soit $N \geqslant 0$ le nombre d'entiers $k \geqslant 1$ tels que τ_k est fini, donc

$$N := \sup\{k \geqslant 0,\, \tau_k < +\infty\}.$$

- La loi de N est géométrique de paramètre $\mathbb{P}_x(T_x = +\infty)$.
- La suite $(\gamma_k)_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ est i.i.d.
- Chaque cycle γ_k avec $0 \leqslant k \leqslant N-1$ est indépendant de N et suit la loi de $(X_n)_{0 \leqslant n \leqslant T_x}$ sous la loi $\mathbb{P}_x$ conditionnée par $T_x < +\infty$.
- La portion $(X_{\tau_N+k})_{k \geqslant 0}$ est indépendante de N et de la suite $(\gamma_k)_{0 \leqslant N-1}$, et suit la loi de $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sous la loi $\mathbb{P}_x$ conditionnée par $T_x = +\infty$.

4.5 Exercices

Exercice 4.14. Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène (m, p) irréductible et x dans E.
1) Calculer la loi de $(X_n)_{0 \leqslant n \leqslant T_x}$ conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$.

2) On suppose que $\mathbb{P}_m(T_x = +\infty) \neq 0$. Calculer la loi de $(X_n)_{n\geqslant 0}$ conditionnellement à $\{T_x = +\infty\}$.
Dans les deux cas, on montrera que le nouveau processus est une chaîne de Markov (m', p') et pour préciser les valeurs de m' et p', on introduira la probabilité $\mathbb{P}_m(C)$ et la fonction h_C définie par $h_C(y) := \mathbb{P}_y(C)$, pour $C = \{T_x < +\infty\}$ ou $C = \{T_x = +\infty\}$. $\square$

Exercice 4.15. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène (m, p) irréductible et récurrente et $A \subset E$. Soit $H_0^A := H_A$ puis, pour tout $k \geqslant 0$,

$$H_{k+1}^A := \inf\{n > H_k^A,\ X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}.$$

Montrer que $(X_{H_k^A})_{k\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans A et préciser ses paramètres. $\square$

Exercice 4.16. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène et irréductible de transition p, et soit $A \subset E$.
1) Pour tout x, soit $h(x) := \mathbb{P}_x(H_A < +\infty)$. Montrer que h est solution du système suivant : si x appartient à A, $h(x) = 1$; si x n'appartient pas à A,

$$h(x) = \sum_y p(x, y)h(y).$$

2) Expliquer comment adapter ce résultat au calcul de la fonction h définie par $h(x) := \mathbb{P}_x(H_A < H_B)$, pour deux parties A et B de E disjointes.
3) Pour tout x, soit $t(x) := \mathbb{E}_x(H_A)$. Montrer que t est solution du système suivant : si x appartient à A, $t(x) = 0$; si x n'appartient pas à A,

$$t(x) = 1 + \sum_y p(x, y)t(y).$$

$\square$

Exercice 4.17. Construire les trajectoires d'une chaîne de Markov de transition p sans état absorbant à l'aide des trajectoires de la chaîne de Markov de transitions

$$p'(x, y) := \mathbf{1}(x \neq y)\, p(x, y)/(1 - p(x, x)), \quad y \neq x,$$

et d'une suite indépendante de temps aléatoires de lois géométriques bien choisies. En déduire que p et p' ont le même type. $\square$

Exercice 4.18. [Séjours successifs en x et hors de x] Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène, irréductible, de transition p, et récurrente. On définit (par récurrence !) les suites $(T_n^x)_{n\geqslant 0}$ et $(S_n^x)_{n\geqslant 0}$ en posant $S_0^x := 0$ puis, pour tout $n \geqslant 0$,

$$T_n^x := \inf\{k \geqslant S_n^x \,;\, X_k = x\}, \quad S_{n+1}^x := \inf\{k \geqslant T_n^x \,;\, X_k \neq x\}.$$

Donc $X_k = x$ si et seulement s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $T_n^x \leqslant k \leqslant S_{n+1}^x - 1$ et $X_k \neq x$ si et seulement s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $S_n^x \leqslant k \leqslant T_n^x - 1$.
Pour tout $n \geqslant 1$, la durée du séjour numéro n en x est $D_n^x := S_n^x - T_{n-1}^x$, le lieu de sortie numéro n de x est $Y_n^x := X_{S_n^x}$ et la durée de l'excursion numéro n hors de x est $F_n^x := T_n^x - S_n^x$.
1) Montrer que la suite de variables aléatoires $(D_n^x, F_n^x, Y_n^x)_{n\geqslant 1}$ est i.i.d. et que, pour tout $n \geqslant 1$, D_n^x est indépendante de (F_n^x, Y_n^x). Montrer que la loi de D_n^x est géométrique et préciser la valeur de son paramètre.
2) Calculer la loi de chaque Y_n^x.
3) Montrer par un exemple qu'en général, les variables aléatoires F_n^x et Y_n^x ne sont pas indépendantes. Pour tout $y \neq x$, préciser la loi de F_n^x conditionnellement à $Y_n^x = y$. □

TD 4.19. Énoncer une CNS pour qu'une fonction d'une chaîne de Markov soit une chaîne de Markov pour toute distribution initiale. □

TD 4.20. Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé et, pour tout $n \geqslant 0$, $Y_n := X_{n:n+k}$. Montrer que si X est une chaîne de Markov, Y aussi et préciser ses paramètres ; que si X est irréductible, Y aussi (on précisera l'espace d'états de Y) ; dans le cas irréductible, comparer les périodes de X et de Y ; si π est une distribution stationnaire pour X, exhiber une distribution stationnaire ϱ pour Y ; enfin, comparer les types de X et de Y. □

TD 4.21. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendante de $(U_n)_n$. Si $X_n \geqslant 1$, on pose $X_{n+1} := 0$. Si $X_n = 0$ et qu'il s'agit de la visite en 0 numéro k, on pose $X_{n+1} := U_k$. Montrer que X est une chaîne de Markov irréductible et préciser sa matrice de transition. Montrer qu'il existe une unique distribution stationnaire π si et seulement si U_1 est intégrable et dans ce cas, préciser π. □

5 Comportement asymptotique

On rappelle qu'une distribution stationnaire est une mesure de probabilité π telle que $\pi p = \pi$.

Lemme 5.1. *Si p est irréductible et μ une mesure stationnaire, soit $\mu = 0$, soit $\mu(x) = +\infty$ pour tout x, soit μ est propre, c'est-à-dire que $\mu(x)$ est strictement positif et fini pour tout état x.*

Preuve : Les propriétés $\mu(x) = 0$ et $\mu(x) = +\infty$ se propagent aux voisins, cqfd.

Désormais on ne considère que des mesures stationnaires propres.

5.1 Résultats

Théorème 5.1. *Si p est irréductible et apériodique et si π est une distribution stationnaire, alors $p^n(x,y) \longrightarrow \pi(y)$ quand $n \to \infty$.*

Preuve : Première étape : s'il existe une distribution stationnaire π et si $\pi(x) \neq 0$, alors x est récurrent. (Calculer la somme sur y des $\pi(y)\mathbb{E}_y(N_x)$ et utiliser $\mathbb{E}_y(N_x) = f_{yx}/(1 - f_{xx})$, pour en conclure que $f_{xx} = 1$).
Deuxième étape : on considère la chaîne double (X, X') avec X' de loi initiale π. On vérifie que (X, X') est irréductible (il faut utiliser l'apériodicité). La loi $\pi \otimes \pi$ est stationnaire donc d'après la première étape, la chaîne double est récurrente donc le premier passage T par la diagonale est presque sûrement fini. Sur $\{T \leqslant n\}$, X_n et X'_n ont la même (sous-)distribution. Finalement, la distance en variation totale entre mp^n et π est majorée par $\mathbb{P}(T \geqslant n+1)$, cqfd.

Définition 5.2. *La chaîne de Markov est récurrente positive s'il existe une distribution stationnaire. Si la chaîne est récurrente mais pas récurrente positive, elle est récurrente nulle.*

En chemin, on a montré le résultat suivant.

Proposition 5.3. *Soit X une chaîne de Markov irréductible, apériodique et récurrente positive, de distribution stationnaire π. Alors, pour toute distribution initiale, la loi de X_n converge vers π pour la distance en variation totale.*

Rappel : la distance en variation totale entre deux mesures μ et ν vaut

$$d_{TV}(\mu, \nu) := \frac{1}{2} \sum_x |\mu(x) - \nu(x)|.$$

C'est le minimum des $\mathbb{P}(X \neq Y)$, pour X de loi μ et Y de loi ν.

Lemme 5.2. *Si p est irréductible, il ne peut pas exister plusieurs distributions stationnaires.*

Preuve : Apériodique : OK. Périodique : regarder $p' := \frac{1}{2}(I + p)$.

Théorème 5.4 (Loi des grands nombres). *Soit p irréductible et récurrente positive, de distribution stationnaire π. Soit φ une fonction positive ou intégrable par rapport à π. Alors, pour toute distribution initiale m,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k) \longrightarrow \pi(\varphi), \quad \mathbb{P}_m \text{ presque sûrement et dans } L^1.$$

Par exemple, pour tout x, $N_x(n)/n \longrightarrow \pi(x)$ $\mathbb{P}_m$ presque sûrement.

Corollaire 5.1. *Soit p irréductible et récurrente positive, de distribution stationnaire π. Pour tout x, $\pi(x) = 1/\mathbb{E}_x(T_x)$.*

Nous décomposons la preuve du théorème 5.4 en plusieurs étapes.

Étape 1 On pose $N_y^x := \sum_{n=1}^{T_x} \mathbf{1}(X_n = y)$ et $n_x(y) := \mathbb{E}_x(N_y^x)$.

Lemme 5.3. *Pour tout p irréductible et tout x récurrent, n_x est une mesure stationnaire, $n_x(x) = 1$, $n_x(y)$ est positif et fini pour tout y, et $|n_x| = \mathbb{E}_x(T_x)$.*

Preuve du lemme : Masse totale : OK. Stationnarité : on utilise le fait que n_x^y vaut aussi

$$n_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbf{1}(X_n = y)\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \geqslant n+1).$$

Si $z \neq x$,

$$\sum_y \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \geqslant n+1)p(y,z) = \mathbb{P}_x(X_{n+1} = z, T_x \geqslant n+2),$$

donc en sommant sur $n \geqslant 0$, on retrouve la somme définissant $n_x(z)$, première version. Pour $z = x$,

$$\sum_y \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \geqslant n+1)p(y,x) = \mathbb{P}_x(T_x = n+1),$$

donc en sommant sur $n \geqslant 0$ et en utilisant le fait que $T_x \geqslant 1$, on trouve $\mathbb{P}_x(T_x < +\infty)$, soit $1 = n_x(x)$, cqfd pour le lemme.

Une conséquence directe du lemme.

Corollaire 5.2. *Si $\mathbb{E}_x(T_x)$ est fini pour un sommet x, il existe une distribution stationnaire. Par exemple, si E est fini.*

Preuve du corollaire pour le cas E fini : soit x fixé ; pour tout y, on peut revenir en x, donc il existe un entier k fini et un réel $u > 0$ tels que, pour tout y, $\mathbb{P}_y(T_x \leqslant k) \geqslant u$. En conditionnant par les valeurs de la chaîne aux temps multiples de k, il vient $\mathbb{P}_x(T_x \geqslant ik) \leqslant (1-u)^i$ pour tout i entier, donc $\mathbb{E}_x(T_x)$ est fini, cqfd.

Étape 2

Lemme 5.4. *Pour toute chaîne de Markov et tout sommet x, $N_x(n)/n$ converge presque sûrement et dans L^1 vers $1/\mathbb{E}_x(T_x)$.*

Preuve du lemme : Si x est transient, on sait que $N_x(n) \leqslant N_x$ et N_x est fini presque sûrement et intégrable, donc $N_x(n)/n \longrightarrow 0$ presque sûrement et dans L^1. Par ailleurs, T_x est infini avec $\mathbb{P}_x$ probabilité non nulle donc son espérance est infinie, cqfd. Si à présent x est récurrent, on utilise la décomposition en cycles et la loi des grands nombres pour la durée des cycles, qui est de moyenne $\mathbb{E}_x(T_x)$, ce qui donne la convergence presque sûre. Puis domination $N_x(n)/n \leqslant 1$, cqfd.

Étape 3 Pour tout x, $\pi(x) = 1/\mathbb{E}_x(T_x)$.

Preuve : on sait que $p^n(y,x) \to \pi(x)$. Par Cesáro, $\mathbb{E}_y(N_x(n))/n \to \pi(x)$. D'après le lemme 5.4, la limite est aussi $1/\mathbb{E}_x(T_x)$, cqfd.

Étape 4 : la LGN

Preuve : Décomposition en cycles, on récupère le dernier cycle non complet en majorant sa contribution par

$$D_k := \sum_{n=T_k^x+1}^{T_{k+1}^x} |\varphi(X_n)|.$$

Alors les variables aléatoires D_k sont i.i.d. et intégrables donc il suffit d'utiliser le lemme suivant pour conclure la preuve du théorème 5.4.

Lemme 5.5. *Soit* $(D_k)_{k\geqslant 1}$ *une suite i.i.d. de variables aléatoires positives intégrables.*
Alors $\max\{D_k\,;\, k \leqslant n\}/n \longrightarrow 0$ *presque sûrement et dans* L^1.

Preuve : omise.

Extension : $Y_n := X_{n:n+k}$; si X est récurrente positive, Y aussi. Donc LGN pour des fonctionnelles de Y.

On sait aussi traiter les chaînes récurrentes nulles.

Théorème 5.5. *Soit p une chaîne de Markov irréductible et récurrente. Soit x un état et φ une fonction positive ou intégrable par rapport à la mesure n_x. Alors, pour toute distribution initiale m,*

$$\frac{1}{N_x(n)} \sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k) \longrightarrow n_x(\varphi), \quad \mathbb{P}_m \text{ presque sûrement.}$$

On rappelle que si la chaîne est récurrente nulle, $N_x(n)/n \to 0$ et, ce qui est équivalent, $n_x(1)$ est infini.

Une conséquence :

Proposition 5.6. *Sous les hypothèses du théorème 5.5, si φ et ψ sont intégrables par rapport à la mesure n_x et si ψ est strictement positive, alors pour* *toute distribution initiale m,*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k)}{\sum_{k=1}^{n} \psi(X_k)} \longrightarrow \frac{n_x(\varphi)}{n_x(\psi)}, \quad \mathbb{P}_m \text{ presque sûrement.}$$

En chemin, on a montré une autre caractérisation des deux types de récurrence.

Corollaire 5.3. *Une chaîne de Markov irréductible est récurrente si et seulement si T_x est $\mathbb{P}_x$ presque sûrement finie pour un état x ou pour tous les états x. Une chaîne de Markov irréductible est récurrente positive si et seulement si $\mathbb{E}_x(T_x)$ est finie pour un état x ou pour tous les états x.*

Profitons-en pour énoncer une récapitulation.

Proposition 5.7. *Si p est irréductible et récurrente, toutes ses éventuelles mesures stationnaires (propres) sont proportionnelles les unes aux autres. En particulier, elles sont toutes de masse finie ou toutes de masse infinie. En particulier, l'existence d'une mesure stationnaire (propre) de masse infinie exclut la récurrence positive.*

Preuve : Soit m une mesure stationnaire pour p et soit x un sommet. Pour tout sommet y,

$$m(y) = (mp)(y) = m(x)p(x, y) + \sum_{z \neq y} m(z)p(z, y).$$

Remplacer chaque $m(z)$ dans la somme de droite par son expression en tant que membre de gauche de la relation ci-dessus permet d'itérer. Après k itérations, on obtient la relation

$$m(y) = m(x)\mathbb{E}_x(N_k) + \mathbb{P}_m(A_k),$$

où N_k désigne le nombre de visites de y du temps 1 au temps k compris sans passer par x du temps 1 au temps $k - 1$ compris et A_k désigne le fait de visiter y au temps k sans être passé par x du temps 0 au temps $k - 1$ compris. Le dernier terme est positif ou nul donc quand k tend vers l'infini, on obtient $m(y) \geqslant m(x)n_x(y)$ pour tout y, donc les mesures m et n_x sont comparables : $m \geqslant m(x)n_x$.

Comme n_x est stationnaire dès que p est récurrente, on en déduit que pour tout k,

$$m(x) = (mp^k)(x) \geqslant m(x)(n_x p^k)(x) = m(x)n_x(x) = m(x),$$

où la dernière égalité vient du fait que $n_x(x) = 1$, donc utilise également de façon cruciale la récurrence. Donc l'inégalité intermédiaire est une égalité : en particulier, pour tout y tel que $p^k(y, x) \neq 0$, il faut que $m(y) = m(x)n_x(y)$. En faisant varier l'entier k, on récupère tous les sommets y grâce à l'irréductibilité, donc on a montré que $m = m(x)n_x$, cqfd.

5.2 Exercices

Exercice 5.8. Montrer que, dans un jeu de pile ou face équilibré, le temps moyen d'attente de la première apparition du motif w est 6 pour le motif $w = ++$ et 4 pour le motif $w = +-$. Expliquer comment concilier ceci avec le fait que la mesure stationnaire π de la chaîne de Markov qui modélise cette expérience est uniforme, donc $\pi(++) = \pi(+-) = \frac{1}{4}$. □

Exercice 5.9. On considère une chaîne de vie et de mort irréductible sur $\mathbb{N}$. On pose $p(n, n+1) = p_n$, $p(n, n) = r_n$ et $p(n, n-1) = q_n$, et on suppose que $q_n/p_n = 1 + c/n^a + o(1/n^a)$ pour deux constantes finies c et a. Déterminer si la chaîne est transiente, récurrente nulle ou récurrente positive. Si récurrence positive, calculer la distribution stationnaire. □

Exercice 5.10. Même question pour la chaîne telle que $p(n, n+1) = p_n$ et $p(n, 0) = 1 - p_n$ pour tout $n \geqslant 0$. □

Exercice 5.11 (Aldous et Fill). Soit X une chaîne de Markov récurrente positive.
1) Soit x un état et S un temps d'arrêt tel que, sous $\mathbb{P}_x$, presque sûrement, $S \geqslant 1$, S est fini et $X_S = x$. Montrer que, pour tout état y,

$$\pi(y)\,\mathbb{E}_x(S) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}(X_{k=y})\right).$$

2) Soient x et y deux états et S le premier temps de passage par x après avoir visité y. Montrer que

$$\pi(x)\,\mathbb{P}_x(T_y < T_x)\,(\mathbb{E}_x(T_y) + \mathbb{E}_y(T_x)) = 1.$$

□

Exercice 5.12. On dispose $A_0(x)$ particules en x, chacune se déplace selon la chaîne de Markov p, soit $A_n(x)$ le nombre de particules en x au temps n. Si $(A_0(x))_x$ est une famille de variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres $(a_0(x))_x$, décrire la loi de $(A_n(x))_x$ pour $n \geqslant 1$. En déduire une distribution stationnaire du système global. □

Exercice 5.13. Soit X une chaîne de Markov récurrente positive de distribution stationnaire π, et R le temps du premier retour au point de départ :

$R := \inf\{n \geqslant 1,\, X_n = X_0\}$. Calculer $\mathbb{E}_\pi(R)$ et en déduire que $\mathbb{E}_\pi(R)$ est fini si et seulement si E est fini. Expliquer la contradiction apparente avec la récurrence positive quand E est infini. $\square$

Exercice 5.14. Soit X une chaîne de Markov non irréductible possédant au moins une classe de communication R récurrente positive. Soit π l'unique distribution stationnaire de X restreinte à R. On suppose que X restreinte à R est apériodique. Montrer que pour tout x dans E et tout y dans R,

$$p^n(x,y) \longrightarrow \pi(y)\,\mathbb{P}_x(T_R < +\infty).$$

Donner un exemple simple de cette situation.

Solution : soit $A_z = \{T_R < +\infty,\, X_{T_R} = z\}$. Pour chaque z dans R, conditionnellement à A_z, la portion de trajectoire de la chaîne après T_R se comporte comme la chaîne issue de z et vivant dans R, qui est irréductible et apériodique, donc pour chaque z dans R, $p^n(x,y|A_z) \to \pi(y)$. Puis on déconditionne, ce qui donne le facteur $\sum_z \mathbb{P}_x(A_z) = \mathbb{P}_x(T_R < +\infty)$. $\square$

6 Critères pour le type

On décrit des critères utiles pour déterminer si une chaîne de Markov est récurrente positive, récurrente nulle, ou transiente.

6.1 Fonctions de Lyapounov

Théorème 6.1 (Critère de Foster). *Soit p irréductible. Supposons qu'il existe une fonction $h : E \to \mathbb{R}^+$, une partie $A \subset E$ finie et un nombre réel $u > 0$ tels que ph est fini sur A et $ph \leqslant h - u$ sur $E \setminus A$. Alors p est récurrente positive.*

Preuve : Soit T_A le temps de retour dans A et $Y_n := h(X_n)\mathbf{1}(T_A > n)$. Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $X_{0:n}$. Pour tout x hors de A,

$$\mathbb{E}_x(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) \leqslant Y_n - u\mathbf{1}(T_A > n), \text{ presque sûrement.}$$

En intégrant et en remarquant que $Y_{n+1} \geqslant 0$ et que $Y_0 = h(x)$ sous $\mathbb{P}_x$, il vient

$$h(x) \geqslant u \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_x(T_A > k).$$

Le terme de droite converge vers $\mathbb{E}_x(T_A)$ donc $\mathbb{E}_x(T_A) \leqslant h(x)/u$ et $\mathbb{E}_x(T_A)$ est fini pour tout x hors de A. Pour x dans A,

$$\mathbb{E}_x(T_A) = 1 + \sum_{y \notin A} p(x,y)\mathbb{E}_y(T_A) \leqslant 1 + \sum_{y \notin A} p(x,y)h(y)/u \leqslant 1 + (ph)(x)/u,$$

donc $\mathbb{E}_x(T_A)$ est fini pour tout x dans A. Le lemme ci-dessous permet de conclure.

Lemme 6.1. *Soit X irréductible et $A \subset E$ fini. Si $\mathbb{E}_x(T_A)$ est fini pour tout x dans A, alors X est récurrente positive.*

Preuve : à faire.

Corollaire 6.1 (Pakes). *Soit X une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout x, $\mathbb{E}_x(X_1)$ est finie et*

$$\limsup_{x \to +\infty} \mathbb{E}_x(X_1) - x < 0.$$

Alors X est récurrente positive.

Preuve : Foster avec $h(x) := x$ et $A := [0, N]$ pour N assez grand.

6.2 Martingales

Théorème 6.2 (Critère de transience). *Soit p irréductible. Alors p est transiente si et seulement s'il existe un état x et une fonction bornée h non partout nulle, tels que, pour tout $y \neq x$,*

$$h(y) = \sum_{z \neq x} p(y, z) h(z).$$

Preuve : à faire.

Théorème 6.3 (Critère de récurrence). *Soit p irréductible. Supposons qu'il existe $h : E \to \mathbb{R}$ et $A \subset E$ fini tels que pour tout t, l'ensemble $\{h \leqslant t\}$ est fini et pour tout x hors de A, $ph \leqslant h$. Alors p est récurrente. (Et c'est une CNS.)*

Preuve : à faire.

Théorème 6.4 (Critère de transience). *Soit p irréductible. Supposons qu'il existe $h : E \to \mathbb{R}$ bornée, $B \subset E$ et x dans B tels que $ph \leqslant h$ sur B et $h(x) < h(y)$ pour tout y hors de B. Alors p est transiente.*

Preuve : à faire.

7 Problèmes de Dirichlet

Soit X une chaîne de Markov sur E, de noyau de transition p.

Soit $A \subset B \subset E$ et $H := H_B$ (on rappelle que dans ce cours la lettre H est réservée aux premières visites à partir du temps 0 alors que T correspond aux premières visites à partir du temps 1).

Pour tout x dans E, soit $h(x) := \mathbb{P}_x(X_H \in A)$. Considérons le système (linéaire) (D) suivant, d'inconnue u :

$$u = pu \text{ sur } E \setminus B, \qquad u = \mathbf{1}_A \text{ sur } B.$$

Alors h est une solution de (D). Si on atteint B presque sûrement, h est la seule solution du système (D). Dans le cas général, on considère $e(x) := \mathbb{P}_x(H = +\infty)$. Alors $e = pe$ sur $E \setminus B$ et $e = 0$ sur B. Ainsi, pour tout réel t, $f := h + te$ est une solution du système (D).

Théorème 7.1. *La fonction h est la solution positive minimale de (D). En d'autres termes, si $u \geqslant 0$ est une solution de (D), alors $u \geqslant h$.*

Preuve : h est une solution et $h = \lim p^n \mathbf{1}_A$; si u est une solution, $u \geqslant \mathbf{1}_A$ donc $p^n u \geqslant p^n \mathbf{1}_A$. Comme $u = p^n u$ sur $E \setminus B$, $u \geqslant h$ sur $E \setminus B$, cqfd.

Exemple 7.2. Pour la marche avec biais sur $\mathbb{Z}$ avec $p < \frac{1}{2}$ et $q := 1 - p$, $h(x) := \mathbb{P}_x(H_0 < +\infty)$ vaut $(p/q)^x$ ou 1 selon le côté de 0 considéré.

On remarque que $h(0) \neq ph(0)$ et que l'espace des solutions de $u = pu$ sur $\mathbb{Z}$ tout entier admet pour base $\{u_0, u_1\}$ avec $u_0(x) := 1$ pour tout x et $u_1(x) := (p/q)^x$ pour tout x. Ainsi $h = \min(u_0, u_1)$. □

Plus généralement, on dispose de la caractérisation suivante.

Théorème 7.3 (Principe du maximum). *Soit $F \subset E$, $G := E \setminus F$, $H := H_G$ le premier temps de sortie de F, f une fonction définie sur F et g une fonction définie sur $G := E \setminus F$ deux fonctions positives, et (S) le système d'équations suivant :*

$$u \geqslant 0, \quad u = pu + f \text{ sur } F, \quad u = g \text{ sur } G.$$

On définit une fonction $h : E \to [0, +\infty]$ par la formule

$$h(x) := \mathbb{E}_x \left(g(X_H) \, \mathbf{1}(H < +\infty) + \sum_{k \geqslant 0} f(X_k) \, \mathbf{1}(k < H) \right).$$

1) Si u est une solution de (S), alors $u \geqslant h$ sur E.

2) Si $u \geqslant 0$ sur E tout entier, $u \geqslant pu + f$ sur F et $u \geqslant g$ sur G, alors $u \geqslant h$ sur E tout entier.

3) Si $H < +\infty$ $\mathbb{P}_x$ presque sûrement pour tout x dans E, alors le système (S) admet au plus une solution bornée, qui ne peut être que h.

Remarque : si E est fini, toutes les fonctions ci-dessus sont bien définies et h est finie partout.

Preuve du théorème : 1) Condition sur G évidente. Pour la condition sur F, on conditionne par X_1.

2) On va construire une suite croissante (h_n) de fonctions $h_n \leqslant u$ telle que $h_n \to h$. Posons

$$h_n(x) := \mathbb{E}_x \left(g(X_H)\, \mathbf{1}(H < n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)\, \mathbf{1}(k < H) \right).$$

Alors $h_0 = 0$, et pour $n \geqslant 1$, $h_n = g$ sur sur G et $h_n = f + ph_{n-1}$. Il reste à remarquer que $u \geqslant h_n$ implique $pu + f \geqslant ph_n + f = h_{n+1}$ pour avoir terminé.

3) Soit u une solution positive bornée. Posons pour tout $n \geqslant 0$,

$$M_n := u(X_n) + \sum_{k=0}^{n-1} (u - pu)(X_k).$$

Alors $M_0 = u(x)$ sous $\mathbb{P}_x$ et après calculs $(M_n)_n$ est une martingale pour la filtration engendrée par la chaîne de Markov. En appliquant Doob aux temps 0 et $\min(H, n)$,

$$u(x) = \mathbb{E}_x(u(X_{\min(H,n)}) + \mathbb{E}_x \left(\sum_{k=0}^{\min(H,n)-1} (u - pu)(X_k) \right).$$

Par convergence monotone et puisque $u - pu = f$ là où on en a besoin, la dernière espérance converge vers

$$\mathbb{E}_x \left(\sum_{k=0}^{H-1} f(X_k) \right).$$

Puisque $H < +\infty$ $\mathbb{P}_x$ presque sûrement, $X_{\min(H,n)} = X_H$ pour n assez grand donc $u(X_{\min(H,n)}) \to g(X_H)$ presque sûrement. Comme u est bornée, $\mathbb{E}_x(u(X_{\min(H,n)}) \to \mathbb{E}_x(g(X_H)$ par convergence dominée, cqfd.

Corollaire 7.1. *Si la chaîne est récurrente, la condition de la partie 3 est vérifiée. En particulier, pour toute fonction $g : G \to \mathbb{R}$ bornée, il existe exactement une solution du système $u = pu$ sur F et $u = g$ sur G, qui vaut*

$$u(x) = \mathbb{E}_x(g(X_H)), \quad x \in E.$$

Exemple de non-unicité en cas de transience : marche au plus proche voisin sur $\mathbb{N}$ avec probabilité $p > \frac{1}{2}$ vers la droite et $1-p$ vers la gauche, et $G = \{0\}$. Alors $u_1 = 1$ et $u_2(x) = \mathbb{P}_x(H_0 < +\infty)$ sont deux solutions de $u = pu$ sur $\mathbb{N}^*$ et $u(0) = 1$.

8 Chaînes de Markov réversibles

8.1 Réversibilité

On rappelle qu'on veut qu'il existe une mesure m telle que, pour tous sommets x et y,

$$m(x)\, p(x,y) = m(y)\, p(y,x).$$

Proposition 8.1. *La chaîne est réversible si et seulement s'il existe des poids $(C(x,y))_{x,y}$ symétriques $C(x,y) = C(y,x)$ tels que, pour tout x,*

$$C(x) := \sum_y C(x,y)$$

est fini et non nul et, pour tous x et y,

$$p(x,y) = C(x,y)/C(x).$$

La chaîne est réversible si et seulement si la condition de cycle est satisfaite : pour tout chemin $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ tel que $x_0 = x_n$,

$$\prod_{k=1}^{n} p(x_{k-1}, x_k) = \prod_{k=1}^{n} p(x_k, x_{k-1}).$$

Preuve : récurrence sur les boules autour d'un sommet fixé.

Corollaire 8.1. *Toute chaîne de Markov sur un arbre éventuellement augmenté de boucles est réversible.*

Preuve : pas de cycle injectif non trivial sur un arbre.

Proposition 8.2. *Soit p irréductible et définie par $p(x,y) := C(x,y)/C(x)$ et soit $|C|$ la somme des $C(x)$ sur tous les états x. La chaîne est récurrente positive si et seulement si $|C|$ est finie. Donc ce cas, l'unique distribution stationnaire π est définie par $\pi(x) := C(x)/|C|$.*

Attention : l'existence d'une distribution stationnaire n'implique pas la réversibilité.

L'appellation de réversibilité provient du résultat suivant.

Proposition 8.3. *Si la chaîne de Markov est réversible et si m est une mesure finie, pour la distribution initiale $m/|m|$, $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ et $(X_{N-n})_{0\leqslant n\leqslant N}$ suivent la même loi pour tout $N \geqslant 0$.*

Exemple 8.4. Pour la marche simple, $C(x,y) = 1$ si (x,y) est une arête et $C(x,y) = 0$ sinon, donc $C(x)$ est le degré de x et $|C|$ vaut deux fois le nombre d'arêtes. Par conséquent, π est proportionnelle au degré, et

$$\mathbb{E}_x(T_x) = 2\#(\text{arêtes})/\deg(x).$$

Par exemple, si le degré de x vaut 1 et si l'espace d'états est un arbre, $\mathbb{E}_x(T_x)$ ne dépend que du nombre total de sommets et pas de sa géométrie. $\square$

8.2 Graphes finis

Désormais on fixe un ensemble fini G et des conductances $(C(x,y))_{x,y}$. On suppose donc que $C(x,y) \geqslant 0$, $C(x,y) = C(y,x)$ et que, pour tout x, $C(x)$ est strictement positif et fini.

8.2.1 Énergies

Définition 8.5. *1) Potentiel électrique entre les bornes A : $A \subset G$ fixé et $pv(x) = v(x)$ pour tout x dans $G \setminus A$. Si $A = \{a, z\}$ et si de plus $v(a) = 1$, $v(z) = 0$, v est le potentiel unité de a vers z.*

2) Flot entre les bornes A : fonction j sur $G \times G$ avec $j(x,y) = 0$ si (x,y) n'est pas une arête, $j(x,y) = -j(y,x)$, et $j(x) = 0$ pour tout x dans $G \setminus A$, avec

$$j(x) := \sum_y j(x,y).$$

Si $A = \{a, z\}$, on a alors $j(a) = -j(z)$ et on appelle $|j| := |j(a)|$ le débit du flot.

3) Énergie d'un flot :

$$\mathcal{E}(j) := \frac{1}{2} \sum_{x,y} C(x,y)^{-1} j(x,y)^2.$$

4) Intensité électrique : $i(x,y) := C(x,y)\,(v(x) - v(y))$.

Proposition 8.6. *La fonction d'arête i est un flot.*

Théorème 8.7 (Loi de Thomson). *Le flot i minimise l'énergie : pour tout flot j entre a et z tel que $j(a) = i(a)$, $\mathcal{E}(i) \leqslant \mathcal{E}(j)$.*

Preuve : on écrit $j = i + k$ donc $\mathcal{E}(i) = \mathcal{E}(j) + \mathcal{E}(k)$+un terme rectangle qui s'avère être nul, cqfd.

Définition 8.8. *La conductance efficace C_e vaut $C_e\,(v(a) - v(z)) := i(a)$. La résistance efficace R_e vaut $R_e := 1/C_e$.*

On en déduit que $\mathcal{E}(i) = i(a) \cdot (v(a) - v(z)) = R_e \cdot i(a)^2$.

Forme duale : soit u une fonction sur G et

$$\mathcal{E}^*(u) := \frac{1}{2} \sum_{x,y} C(x,y)\,(u(x) - u(y))^2.$$

Proposition 8.9. *Le potentiel v minimise l'énergie : pour toute fonction u sur G telle que $u(a) - u(z) = v(a) - v(z)$, $\mathcal{E}^*(v) \leqslant \mathcal{E}^*(u)$.*
De plus, $\mathcal{E}(i) = \mathcal{E}^*(v)$.

Preuve : pour l'inégalité, voir la preuve de la loi de Thomson. Pour la dualité, (i, v) vérifie la loi d'Ohm sur chaque arête, cqfd.

Théorème 8.10 (Loi de Rayleigh). *Si on augmente une ou plusieurs conductances $C(x, y)$, on augmente la conductance effective c_e.*

Preuve : Soit $C \leqslant C'$ et v et v' les potentiels associés pour les conditions au bord $v(a) = v'(a) = 1$ et $v(z) = v'(z) = 0$. Alors $\mathcal{E}^*_C \leqslant \mathcal{E}^*_{C'}$ donc

$$C_e = \mathcal{E}^*_C(v) \leqslant \mathcal{E}^*_C(v') \leqslant \mathcal{E}^*_{C'}(v') = C'_e.$$

□

8.3 Marches au hasard sur des réseaux

Soit (G, C) un réseau électrique. On considère la chaîne de Markov homogène sur l'ensemble d'états G avec transitions $p(x, y) := C(x, y)/C(x)$.

Soit v et i le potentiel et l'intensité entre les bornes a et z tels que $v(a) = 1$ et $v(z) = 0$.

Proposition 8.11. *Pour tout sommet x, $v(x) = \mathbb{P}_x(H_a < H_z)$.*
Pour tout sommet x, $\mathbb{E}_a(N^z_x) = C(x)\, v(x)$.
Soit $N^z(x, y)$ le nombre de traversées de (x, y) moins le nombre de traversées de (y, x) avant H_z. Pour toute arête (x, y),

$$i(x, y) = i(a)\, \mathbb{E}_a(N^z(x, y)).$$

Enfin, $C_e = C(a)\, \mathbb{P}_a(H_z < H_a)$.

Exercice 8.12. Loi de réciprocité : $C(a)\, \mathbb{E}_a(N^z_b) = C(b)\, \mathbb{E}_b(N^z_a)$.

Une conséquence : si (a, b) et (α, β) sont des arêtes,

$$C(a, b)\, \mathbb{E}_a(N^z_{\alpha,\beta}) = C(\alpha, \beta)\, \mathbb{E}_\alpha(N^z_{a,b}).$$

Inégalité triangulaire : soit $C_e(a, z)$ la conductance efficace entre a et z, et $R_e(a, z) := 1/C_e(a, z)$. Alors R_e est une distance.

Et même,

$$R_e(x, y) + R_e(y, z) - R_e(x, z) = C(x)^{-1}\, \mathbb{E}_z(N^y_x) + C(z)^{-1}\, \mathbb{E}_x(N^y_z).$$

En appliquant une question précédente, les deux termes du membre de droite sont égaux donc

$$R_e(x, y) + R_e(y, z) - R_e(x, z) = 2C(x)^{-1}\, \mathbb{E}_z(N^y_x) = 2C(z)^{-1}\, \mathbb{E}_x(N^y_z).$$

□

8.4 Graphes infinis

Désormais, G peut être infini et c est un système de conductances sur G.

Soit $(G_n)_n$ une suite croissante de parties de G de réunion G. On munit chaque G_n des arêtes de G reliant des sommets de G_n et des conductances associées. On fixe a dans G_0 et on note z_n l'ensemble des sommets de G_n voisins d'un sommet de $G \setminus G_n$. Soit c_n la conductance effective de G_n entre a et z_n.

On peut penser au cas où G_n est la boule de rayon n et de centre a. Alors z_n est la réunion des sommets de la sphère de rayon n.

Proposition 8.13. *La suite $(c_n)_n$ est décroissante. Sa limite c_e ne dépend pas de la suite $(G_n)_n$ mais seulement du choix de a. Le fait que $c_e = 0$ ou $c_e > 0$ ne dépend pas de a.*

De plus, $c_e = c(a)\,\mathbb{P}_a(H_a = +\infty)$ donc $c_e = 0$ si et seulement si la chaîne de Markov de transitions p associée aux conductances c est récurrente et $c_e > 0$ si et seulement si elle est transiente.

Preuve : pour une autre suite (G'_n), on utilise le fait que pour tout n, G_n est fini donc $G_n \subset G'_k$ pour tout k assez grand donc $c(G_n) \geqslant c(G'_k)$ et la limite ne dépend de la suite (G_n). Enfin, pour une suite (G_n) donnée, l'intersection des événements $\{H_a > H_{G \setminus G_n}\}$ vaut $\{H_a > +\infty\}$ (à vérifier), cqfd.

On appelle c_e la conductance effective de G entre a et l'infini. Par passage à la limite, la loi de Rayleigh est encore valide.

Corollaire 8.2. *Si $c \leqslant c'$ et si c donne une chaîne de Markov transiente, c' aussi. Si $c \leqslant c'$ et si c' donne une chaîne de Markov récurrente, c aussi.*

Notre version définitive de la caractérisation de la récurrence/transience est la suivante.

Théorème 8.14 (Royden 1959, T. Lyons 1983). *Un réseau est transient si et seulement s'il existe un flot d'énergie finie entre un sommet et l'infini.*

Preuve : Soit j un tel flot entre le sommet o et l'infini et soit j_n la restriction de j à la boule G_n de rayon n autour de o. Alors j_n est u flot entre o et le bord de G_n et $\mathcal{E}(j_n) \leqslant \mathcal{E}(j)$. Comme $\mathcal{E}(j_n) \geqslant |j(o)|^2/C(G_n)$ donc $C(G_n) \geqslant |j(o)|^2/\mathcal{E}(j)$ est borné uniformément en n donc la limite de la suite $C(G_n)$ est strictement positive et le réseau est transient.

Réciproquement, si le réseau est transient, soit i_n le flot unité entre o et le bord de G_n. Notons j_n le prolongement de i_n à G tout entier par la valeur 0. Chaque j_n n'est pas un flot mais la suite $(j_n)_n$ est bornée dans l'espace des fonctions d'arêtes muni de la norme de type L^2 induite par $\mathcal{E}$, donc une des sous-suites converge vers une limite j. Comme les restrictions des fonctions

j_n à une boule G_k fixée sont des fonctions d'arêtes sur G_k pour n assez grand (simplement $n \geqslant k$), j est une fonction d'arêtes par convergence simple d'une suite extraite de $(j_n(e))_n$ vers $j(e)$, pour chaque arête e. Donc j est un flot et, par Fatou, $\mathcal{E}(j) \leqslant \liminf \mathcal{E}(j_n)$ donc l'énergie de j est finie, fin de la preuve.

On a utilisé le résultat de compacité suivant.

Lemme 8.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions d'arêtes convergeant simplement vers f : pour toute arête e, $f_n(e) \to f(e)$. Alors f est une fonction d'arêtes, $f_n(x) \to f(x)$ pour tout sommet x et $\mathcal{E}(f) \leqslant \liminf \mathcal{E}(f_n)$.*

Rappel : pour tout flot de débit 1 et tout potentiel d'amplitude 1,

$$1/\mathcal{E}(j) \leqslant C_e \leqslant \mathcal{E}^*(u),$$

et les deux côtés sont des égalités pour le potentiel v et l'intensité i.

8.5 Exemples

Exemple 8.15. Réseau $\mathbb{Z}^2$ privé d'une arête. Facile avec Rayleigh, impossible par des calculs explicites. □

Quelques exemples classiques.

Exemple 8.16. Sur $\mathbb{Z}$, $c_n = 1/(2n)$ donc récurrent. □

Exemple 8.17. Sur $\mathbb{Z}$ avec dérive : facile, même pour des dérives dépendant de x : on retrouve la condition portant sur la somme des $\displaystyle\prod_{y \leqslant x} \frac{p_y}{q_y}$.

□

Exemple 8.18. Étoile : transient si et seulement si une branche est transiente. □

TD 8.19. Parallèle avec un processus de Bessel de dimension d donc processus de naissance et mort avec

$$p(x, x \pm 1) = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{\nu}{x}), \qquad \nu := \frac{1}{2}(d-1).$$

Correspond aux conductances $c(x, x+1) \approx x^{d-1}$ donc transience si et seulement si $d > 2$. □

Exemple 8.20. Marche au hasard sur $\mathbb{Z}$ en environnement aléatoire : soit $L := \mathbb{E}(\log(p_x/q_x))$. Si $L \neq 0$, transience.

Sur $\mathbb{N}$: si $L < 0$, $\mathbb{P}$(récurrence) $= 1$ et si $L > 0$, $\mathbb{P}$(transience) $= 1$. □

Remarque 8.21. [Suite de l'exemple] Si $L = 0$, c'est plus difficile mais on peut montrer que $\mathbb{P}(\text{récurrence}) = 1$.

Facile par contre : $\mathbb{P}(\text{récurrence}) = 0$ ou 1. $\square$

Exemple 8.22. Injections de graphes. Systèmes de conductances équivalentes. Short/cut : supprimer une arête diminue c_e ; identifier deux sommets augmente c_e. Application : on remplace chaque carré de $\mathbb{Z}^2$ par un seul sommet, donc récurrence. Calculs série, parallèle et même triangle/étoile ou pont de Wheatstone si on est savant. Par contre : connecter deux sommets au même potentiel ne change rien (voir le cube). $\square$

Quelques techniques plus élaborées

TD 8.23. Cas $\mathbb{Z}^3$ à la Grimmett et Kesten $\square$

Exemple 8.24. [Quasi-isométries etc.] Graphe agrégé $[G]_k$: on relie x et y si leur distance dans G est au plus k. Si les degrés dans G, sont bornés, G et $[G]_k$ sont du même type pour les conductances 1.

Si G est transient, $[G]_k$ aussi car c'est un sur-graphe. Dans l'autre sens—

Graphes quasi-isométriques : voir TD.

Graphes civilisés : il existe une injection f de G dans $\mathbb{R}^d$ telle que la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ est bornée inférieurement pour tous x et y et bornée supérieurement pour toute arête (x, y). Alors G s'injecte dans un agrégé de $\mathbb{Z}^d$ donc G est récurrent si $d \leqslant 2$. $\square$

Exemple 8.25. Graphe hexagonal. Graphe triangulaire. Graphe du pavage de Penrose (aucun automorphisme). $\square$

Proposition 8.26. *Si la somme $|c|$ des $c(x)$ sur les états x converge, la chaîne de Markov est récurrente positive et, pour tout x, $\mathbb{E}_x(T_x) = |c|/c(x)$.*

Remarque 8.27. Le lemme de Kac indique que si θ laisse invariante une mesure μ et si n_A est le temps de retour dans une partie A de mesure non nulle,

$$n_A(\omega) := \inf\{n \geqslant 1,\, \theta^n(\omega) \in A\},$$

alors n_A est presque sûrement fini, intégrable et

$$\int_A n_A(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) = 1.$$

Dessin des tours de Kakutani. Cela signifie exactement que $\mathbb{E}_x(T_x) = 1/\mu(x)$. $\square$

Si $|c|$ diverge, on dispose d'une mesure invariante de masse infinie, donc la chaîne de Markov n'est pas récurrente positive.

Exemple 8.28. Arbre quasi sphérique : CNS pour transience. Si croissance au moins exponentielle, alors transience. □

Exercice 8.29. Chaînes de naissance et mort : $m(x) = m(0) \prod_{y=1}^{x} \frac{p_{y-1}}{q_y}$ mesure stationnaire. □

Exercice 8.30. Montrons que la marche simple sur $\mathbb{Z}^3$ est transiente en construisant un sous-graphe A qui soit un arbre transient.

Dans toute la suite, on omet les parties entières des coordonnées des points de $\mathbb{Z}^d$. Soit $a > 1$ un nombre réel dont la valeur sera fixée ultérieurement. Pour tout $k \geqslant 0$, soit F_k l'ensemble des sommets $(x, y, (2a)^k)$ avec $|x| \leqslant (2a)^k$ et $|y| \leqslant (2a)^k$. Les points $P_k(i,j) := (ia^k, ja^k, (2a)^k)$ sont dans F_k pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant a^k$ et $1 \leqslant j \leqslant a^k$ donc on dispose de 4^k points sur F_k. Ces points seront des sommets de A. Considérons le segment $S_k(i,j)$ dans $\mathbb{R}^3$ d'extrêmités $P_k(i,j)$ et $P_{k+1}(2i,2j)$. Comme $P_{k+1}(2i,2j) - P_k(i,j)$ est colinéaire au vecteur (i,j,a^k), on voit que deux segments $S_k(i,j)$ distincts sont disjoints et qu'ils sont les plus proches en leurs débuts. La distance entre deux d'entre eux est donc au moins la distance minimale entre des points $P_k(i,j)$ distincts, soit $a^k \gg 1$. On peut donc approcher $S_k(i,j)$ par un chemin $C_k(i,j)$ dans $\mathbb{Z}^3$ dont le nombre d'arêtes est de l'ordre de la distance entre $P_k(i,j)$ et $P_{k+1}(2i,2j)$, donc de l'ordre d'un multiple de $(2a)^k$, de telle sorte que les différents chemins $C_k(i,j)$ sont disjoints. On relie ensuite chaque $P_{k+1}(2i,2j)$ aux trois points

$$P_{k+1}(2i+1,2j), \quad P_{k+1}(2i,2j+1), \quad P_{k+1}(2i+1,2j+1),$$

par des chemins $D_k(i,j)$ dans $\mathbb{Z}^3$ dont la longueur est de l'ordre d'un multiple de a^k. La réunion des chemins $C_k(i,j)$ et $D_k(i,j)$ forme un arbre de structure quaternaire tel que la longueur des branches de la génération k est de l'ordre d'un multiple de $(2a)^k$.

On peut donc comparer A avec l'arbre quaternaire tel que les conductances de la génération k valent $1/(2a)^k$. La résistance équivalente de celui-ci vaut la somme des $(2a)^k/4^k$, donc est finie pour tout $a < 2$, ce qui est licite puisque la seule autre condition portant sur a est $a > 1$. Donc A est transient et son sur-graphe $\mathbb{Z}^3$ aussi.

[Source : adapté de Grimmett, Kesten et Zhang.] □

Remarque 8.31. (Doyle) Il existe des graphes transients sans sous-arbre transient. □

Remarque 8.32. Cette technique permet de montrer que l'amas infini de percolation en régime sur-critique est transient. □

8.6 Le cas du graphe $\mathbb{Z}^d$

Marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ par les transformées de Fourier. Il vient

$$n_o(o) = \int_{T^d} \frac{\mathrm{d}t}{1 - c(t)}, \quad c(t) := \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(2\pi t_k),$$

avec $T^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Le seul point litigieux est $t = 0$, auprès duquel on observe que $1 - c(t) = \|t\|^2 + o(\|t\|^2$, donc l'intégrale du membre de droite converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t_1^2 + \cdots + t_d^2}$ converge.

En passant en coordonnées sphériques, on obtient l'intégrale $\displaystyle\int_0 \frac{r^{d-1}\mathrm{d}r}{r^2}$, qui converge pour $d > 2$ et diverge pour $d \leqslant 2$.

Donc $(\mathbb{Z}^d, 1)$ est récurrent (nul) pour $d = 1$ et $d = 2$ et transient pour $d \geqslant 3$.

Extension : Bessel.

9 Techniques de comparaison

9.1 Conductances variables

Théorème 9.1. *Soit G un graphe muni de conductances c et c'.*
Si $c(e) \leqslant c'(e)$ pour toute arête e, alors $c_e(G) \leqslant c'_e(G)$.

Corollaire 9.1. *Soit G un graphe muni de conductances c et c'. S'il existe des constantes strictement positives a et b telles que $ac'(e) \leqslant c(e) \leqslant bc'(e)$ pour toute arête e, alors (G, c) et (G, c') ont le même type.*

Lemme 9.1. *Pour toute suite de parties $(G_n)_n$ croissante dont la réunion vaut G tout entier, $c_e(G_n)$ converge en décroissant vers la même limite $c_e(G)$.*

Preuve : la limite vaut toujours $c(o)\mathbb{P}_o(T_o = +\infty)$, cqfd.

On peut donc considérer la limite selon n'importe quelle suite.

Si G est transient, tout sur-graphe est transient aussi.

9.2 Graphes contraints

On veut comparer des graphes à $\mathbb{N}$.

Définition 9.2. *Un graphe G est contraint si les degrés de ses sommets sont uniformément bornés et s'il existe des parties G_n de G vérifiant les propriétés suivantes : chaque G_n est fini, la réunion des G_n vaut G, G_{n+1} contient G_n et les sommets voisins de G_n, et enfin la série $\displaystyle\sum_n (\mathrm{card}\partial G_n)^{-1}$ diverge.*

Définition 9.3. *Un graphe G est contraint au sens fort si les degrés de ses sommets sont uniformément bornés et s'il existe un entier fini k tel que, pour toute partie H finie de G, il existe une partie K de G telle que $H \subset K$ et* $\mathrm{card}\partial K \leqslant k$.

Tout graphe contraint au sens fort est contraint.

Lemme 9.2. *Pour tout graphe G et tous sommets a et z,*

$$C_e(a,z) \leqslant \min(\deg(a), \deg(z)).$$

Preuve du lemme : on commute entre eux tous les sommets sauf a, reste $\deg(a)$ arêtes en parallèle entre a et le sommet connecté.

Théorème 9.4. *Si G est contraint, $(G,1)$ est récurrent.*

Preuve : on rassemble en un seul sommet g_n chaque ∂G_n, le graphe connecté L est linéaire ; en effet, il n'y a aucune arête entre g_n et g_{n+k} pour $k \geqslant 2$ car $\partial G_n \subset G_{n+1}$. Par le lemme, la conductance équivalente c_n entre g_n et g_{n+1} vaut au plus le degré de ∂G_n donc $c_n \leqslant d\mathrm{card}\partial G_n$, où d est le degré maximal d'un sommet de G.

Finalement la série des $1/c_n$ diverge donc $c_e(L) = 0$ et $c_e(G) = 0$ car $c_e(G) \leqslant c_e(L)$, fin de la preuve.

Exemple fondamental : $\mathbb{Z}^2$, on connecte les carrés $|x| + |y| = n$ pour $n \geqslant 0$, alors c_n est de l'ordre de n donc $\mathbb{Z}^2$ est récurent.

La généralisation est naturelle et nous omettons sa preuve.

Théorème 9.5 (Nash-Williams 1959). *Soit G la réunion disjointe des G_n. On suppose que : si (x,y) est une arête pour des sommets x de G_n et y de G_k, alors $|n-k| \leqslant 1$; pour tout n, la somme $\sum_{x \in G_n} C(x)$ converge. Soit $E_n := G_n \times G_{n+1}$.*

Alors, si la série $\sum_n \left(\sum_{e \in E_n} C(e) \right)^{-1}$ diverge, (G,C) est récurrent.

La première condition assure la structure linéaire et la deuxième que chaque G_n est récurrent positif.

Remarque : en général, (G,C) n'est pas récurrent positif.

Exemple 9.6. On greffe un arbre binaire A_n sur chaque sommet n de $\mathbb{Z}$ et on considère $G_n := A_n$, la marche est transiente. $\square$

9.3 Ensembles de coupure

On améliore encore Nash-Williams.

Définition 9.7. *Une partie K de $G \times G$ est une coupure entre le sommet a et l'infini si tout chemin infini injectif issu de a rencontre K.*

Exemple 9.8. Dans tout graphe (localement fini), pour tout $n \geqslant 0$, l'ensemble des (x, y) tels que $d(o, x) = n$ et $d(o, y) = n+1$ est une coupure entre o et l'infini. □

Théorème 9.9 (Lyons 1990). *S'il existe une suite (K_n) de coupures disjointes telle que la série $\displaystyle\sum_n \left(\sum_{e \in K_n} C(e)\right)^{-1}$ diverge, (G, C) est récurrent.*

Preuve : soit j un flot sur G issu de o. Pour toute coupure K, la somme algébrique des $j(e)$ sur une sous-coupure maximale fournit $j(o)$ donc

$$|j(o)| \leqslant \sum_{e \in K} |j(e)|.$$

Par Cauchy-Schwarz, le carré du membre de droite est majoré par $C(K)$ fois l'énergie de j restreinte à K. En sommant sur des coupures disjointes,

$$|j(o)|^2 \sum_n C(K_n)^{-1} \leqslant \sum_n \sum_{e \in K_n} j(e)^2/C(e) \leqslant \mathcal{E}(j).$$

Donc, si la série du membre de gauche diverge, tout flot d'énergie finie entre a et l'infini est de débit nul, cqfd.

Il est souvent difficile de calculer exactement un flot d'où l'utilité de la caractérisation suivante, que nous admettrons.

Théorème 9.10 (Royden amélioré). *Le graphe (G, C) est transient si et seulement s'il existe un quasi-flot non nul d'énergie finie entre un sommet et l'infini.*

Quasi-flot : fonction d'arêtes telle que $\displaystyle\sum_{x \in G} |j(x)|$ converge et $\displaystyle\sum_{x \in G} j(x) \neq 0$.

9.4 Invariance par quasi-isométries

9.4.1 Énoncé

Le but de cette section est de donner une démonstration électrique et élémentaire du fait intuitivement évident que deux graphes qui se ressemblent géométriquement ont le même type. L'énoncé précis est le suivant.

Théorème 9.11 (Kanai (1986)). *Soient G et G' deux graphes à géométrie finie quasi-isométriques. Si G' est récurrent, G est récurrent. Par conséquent, le type des graphes à géométrie finie est invariant par quasi-isométrie.*

Une preuve de ce résultat utilisant les capacités a été donnée par Kanai en 1986. Une autre preuve, utilisant la notion de flot est due à Markvorsen, McGuinness et Thomassen en 1992. Notre méthode de démonstration consiste à évaluer grossièrement des résistances équivalentes. On peut se reporter au cours d'Ancona pour la démonstration de Kanai et à l'article d'exposition de Woess qui donne les références à Kanai et à Markvorsen et al.

9.4.2 Outils

Quasi-isométries Rappelons quelques conventions. Un graphe est à géométrie finie si les degrés de ses sommets sont uniformément bornés. La distance naturelle $d_G(x, y)$ entre deux sommets x et y d'un graphe G est la longueur du plus court chemin qui les relie.

Définition 9.12. *Une application f entre deux espaces métriques (E, d) et (E', d') est une quasi-isométrie s'il existe des constantes $a > 0$, $b \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$ telles que les propriétés ci-dessous soient vérifiées :*

(i) Pour tous x et y dans E, $d(x, y)/a - b \leqslant d'(f(x), f(y)) \leqslant a\, d(x, y) + b$.

(ii) Pour tout x' dans E', $d'(x', f(E)) \leqslant c$.

Deux graphes G et G' sont quasi-isométriques s'il existe une quasi-isométrie de G vers G', munis de leurs distances de graphes.

Pour justifier cette définition, il faut montrer que G est quasi-isométrique à G' si et seulement si G' est quasi-isométrique à G (le fait que la relation de quasi isométrie soit réflexive et transitive est facile). Pour s'en convaincre, on peut construire de façon élémentaire une quasi-isométrie g de G' vers G à partir d'une quasi-isométrie f de G vers G' de la façon suivante : on choisit comme image $g(x')$ d'un sommet x' dans G' un sommet quelconque x de G tel que $d'(f(x), x') = d'(f(G), x')$. Les distances sur un graphe sont des entiers donc $d'(f(G), x')$ est bien réalisée par un sommet $f(x)$. Pour définir complètement $g(x')$, on peut par exemple numéroter tous les sommets de G (qui est par hypothèse dénombrable) et choisir le sommet de plus petit numéro parmi ceux dont l'image réalise $d'(f(G), x')$. On évite ainsi de recourir à l'axiome du choix.

Remarque 9.13. Considérons un groupe de type fini. Les graphes de Cayley de ce groupe associés à deux systèmes différents de générateurs sont quasi-isométriques (avec $b = c = 0$) par l'application identité, pour une constante a choisie comme suit : tout élément de γ, resp. γ', doit s'écrire comme un mot de longueur inférieure à a en les éléments de γ', resp. γ. On peut donc parler de la récurrence ou de la transience du groupe lui-même. $\square$

Graphe agrégé La preuve utilise la notion de graphe agrégé. Si G est un graphe, le graphe agrégé $[G]_N$ de niveau $n \geqslant 1$ comprend les mêmes sommets que G et relie deux sommets de G si et seulement si leur distance dans G est au plus n. La distance dans $[G]_n$ est comprise entre la distance dans G et la distance dans G divisée par n, donc G et $[G]_n$ sont quasi-isométriques.

Remarque 9.14. La notion de graphe agrégé permet également de montrer que l'hypothèse de géométrie finie est indispensable. Un contrexemple simple est fourni par un graphe récurrent dont un des n-agrégés est transient : G comprend une copie de $\mathbb{N}$ et on relie chaque sommet x à 2^x sommets supplémentaires. Alors G est récurrent mais $[G]_3$ contient une copie de l'arbre binaire donc $[G]_3$ est transient. $\square$

Commençons par démontrer un cas particulier important du théorème.

Lemme 9.3. *Soit G un graphe à géométrie finie et $n \geqslant 1$ un entier. Les graphes G et $[G]_n$ ont le même type.*

Preuve : $[G]_n$ est un sur-graphe de G donc si G est transient, $[G]_n$ aussi. Supposons désormais que G est récurrent, et considérons le noyau

$$p' := (I + p + \cdots + p^n)/n.$$

La marche X' selon p' est adaptée à $[G]_n$ mais n'est pas la marche simple sur $[G]_n$. On peut réaliser X' à partir d'une trajectoire $(X_n)_{n\geqslant 0}$, comme suit. Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$. On pose alors $X'_0 := X_0$ puis

$$X'_k := X_{V_k}, \quad V_k := U_1 + \cdots + U_k.$$

Si X' est transient, X' finit par sortir de la boule de rayon n autour de X_0 pour toujours. Alors X devient incapable de repasser par X_0, ce qui est absurde. Donc X' est récurrent.

Il reste à comparer p' et la marche simple sur $[G]_n$. On commence par supprimer les arêtes (x, x) utilisées par p', sans changer son type. Ensuite, p^k utilise exactement les arêtes de $[G]_k$, chacune avec une probabilité au plus 1 et au moins $1/D^k$, où D désigne le degré maximal des sommets de G, donc p' utilise exactement les arêtes de $[G]_n$, chacune avec une probabilité au plus 1 et au moins $1/(nD^n)$. Par ailleurs, p est associée aux conductances c donc $cp = p$ donc $cp' = p'$ et p' est associée à des conductances c' telles que $c'(x) = c(x)$ (mais $c'(x, y)$ et $c(x, y)$ ne sont pas toujours égales). Comme

$c(x)$ est le degré de x dans G, $1 \leqslant c(x) \leqslant D$. Si (x, y) est une arête de $[G]_n$, il vient $c'(x, y) = c(x)\, p'(x, y)$ donc

$$1/(nD^n) \leqslant c(x)/(nD^n) \leqslant c'(x, y) \leqslant c(x) \leqslant D.$$

En particulier, X' est récurrent donc $c'_e = 0$ et c'_e est supérieure à la conductance effective de $[G]_n$ divisée par nD^n, donc $[G]_n$ est récurrent, cqfd.

9.4.3 Démonstration du théorème

Soit f une quasi-isométrie de G vers G' et supposons que G' est récurrent. On va plonger G dans un sur-graphe récurrent de G'.

Première étape On peut se ramener au cas où f est injective.

En effet, pour une quasi-isométrie $f : G \to G'$ quelconque, le cardinal de l'image réciproque $f^{-1}(x')$ d'un sommet x' de G' est borné par une constante : si deux sommets de G ont la même image par f, ils sont à une distance inférieure ou égale à (ab). Le nombre de voisins d'un sommet de G est borné uniformément par une constante d finie donc le cardinal de $f^{-1}(x')$ est inférieur au cardinal d'une boule de rayon (ab) dans l'arbre régulier d-aire, donc à une constante que nous appelons N.

Soit G_1 le graphe $G' \times \{1, 2, \ldots, N\}$. Les arêtes de G_1 relient les sommets (x', i) et $(x', i+1)$ pour x' dans G' et $1 \leqslant i < N$ ainsi que les sommets (x', i) et (y', j) pour $x' \neq y'$ si (x', y') est une arête de G'. Remplaçons f par f_1 qui envoie x dans G sur un élément de la pile $f(x) \times \{1, 2, \ldots, N\}$ de sorte que f_1 soit injective. Alors f_1 est une quasi-isométrie puisque la distance dans G_1 de $f_1(x)$ à $f_1(y)$ coïncide quand $f(x) \neq f(y)$ avec la distance dans G' de $f(x)$ à $f(y)$ et est majorée par 2 quand $f(x) = f(y)$ (on peut relier $f_1(x)$ à $f_1(y)$ par n'importe quel sommet de la pile d'un voisin de $f(x) = f(y)$ dans G'). Il reste à montrer que G_1 est récurrent.

Munissons chaque arête des graphes considérés d'une résistance électrique unité. Soit o un sommet de G'. Notons par $R'(n)$ la résistance effective du circuit électrique constitué par les arêtes de G' reliant des sommets situés à une distance inférieure à n du sommet o. Soient $R_1(n)$ et $R_c(n)$ les résistances définies de la même façon à partir des graphes G_1 et G_c où G_c s'obtient à partir de G_1 en connectant tous les sommets (x', i) avec $1 \leqslant i \leqslant N$ d'une même pile pour les remplacer par un seul sommet que nous notons encore x', puis en supprimant les arêtes reliant un sommet à lui-même. Alors les arêtes de G_c sont les arêtes de G' mais dotées de la résistance $1/N^2$ au lieu de 1 donc $R_c(n) = R'(n)/N^2$.

D'autre part, connecter des sommets diminue la résistance effective donc $R_1(n) \geqslant R_c(n)$. La récurrence de G' signifie que la résistance effective de G', qui est la limite de la suite $R'(n)$ quand n tend vers l'infini, est infinie. La suite $R_1(n)$ admet aussi une limite infinie donc G_1 est récurrent.

Deuxième étape On peut se ramener au cas où $(f(x), f(y))$ est une arête de G' dès que (x, y) est une arête de G.

Si x et y sont les extrémités d'une arête de G, leurs images $f(x)$ et $f(y)$ sont au plus à distance $(a+b)$ dans G', donc $f_1(x)$ et $f_1(y)$ sont au plus à distance $k = (a+b) \vee 2$. Remplaçons G_1 par son graphe k-agrégé $G_2 = [G_1]_k$: les sommets de G_2 sont les sommets de G_1 mais deux sommets distincts de G_2 sont reliés par une arête dès que leur distance dans G_1 est inférieure à k. La récurrence de G_1 implique la récurrence de G_2.

Troisième étape Tout sous-graphe d'un graphe récurrent est récurrent.

Soit $G \subset G'$ et soit o un sommet de G. Notons à nouveau par $R(n)$, resp. $R'(n)$, la résistance effective du circuit électrique constitué par les arêtes de G, resp. G', reliant des sommets situés à une distance inférieure à n du sommet o. On passe de G à G' exclusivement en ajoutant des arêtes donc $R(n) \geqslant R'(n)$. La récurrence de G' signifie que la résistance effective de G', qui est la limite de la suite $R'(n)$ quand n tend vers l'infini, est infinie. La suite $R(n)$ admet aussi une limite infinie, donc G est récurrent.

Conclusion On applique successivement la première et la deuxième étape à G'. On obtient un graphe G_2 récurrent dont G est un sous-graphe. La troisième étape montre que G est récurrent ce qui conclut la démonstration du théorème.

9.5 Filets

Supposons que $F : G \to \mathbb{R}^d$ est telle que $|F(x) - F(y)| \leqslant c_1$ pour toute arête (x, y) de G, que $|F(x) - F(y)| \geqslant c_2$ pour tout couple (x, y) de $G \times G$ et que tout point de $\mathbb{R}^d$ est à distance au plus c_3 de $F(G)$. Alors $(G, 1)$ et $(\mathbb{Z}^d, 1)$ ont le même type.

Généralisation : comparaisons variétés/filets.

Application de l'invariance par quasi-isométries : sur les groupes de type fini, la récurrence/transience ne dépend pas de la présentation du groupe.

10 Transience et inégalités fonctionnelles

Soit (G, C) un graphe connexe muni de conductances et soit p le noyau de transition de la chaîne de Markov associée, donc $p(x, y) := C(x, y)/C(x)$.

On appelle sommets de G les éléments de G, arêtes de G les couples (x, y) dans $G \times G$ tels que $C(x, y) \neq 0$, fonction de sommets toute fonction définie sur G, et fonction d'arêtes toute fonction v définie sur $G \times G$ telle que $v(x, y) = -v(y, x)$ pour tous sommets x et y et telle que $v(x, y) = 0$ dès que $C(x, y) = 0$.

Soit ℓ_0 l'espace des fonctions de sommets de support fini et ℓ_2 l'espace des fonctions de sommets de norme finie pour la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle u_1, u_2 \rangle := \sum_x C(x)\, u_1(x)\, u_2(x).$$

Pour toutes fonctions d'arêtes v_1 et v_2, on note

$$[v_1, v_2] := \frac{1}{2} \sum_{x,y} C(x, y)\, v_1(x, y)\, v_2(x, y).$$

On note parfois $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ et $\|v\| := \sqrt{[v, v]}$.

Toute fonction de sommets u engendre une fonction d'arêtes Du et une fonction de sommets Δu, définies par

$$Du(x, y) := u(y) - u(x), \quad \Delta u(x) := \sum_y p(x, y)\, u(y) - u(x).$$

En particulier,

$$[Du_1, Du_2] = -\langle u_1, \Delta u_2 \rangle.$$

10.1 Capacités

Tout ceci permet d'énoncer une caractérisation basée sur des inégalités fonctionnelles.

Théorème 10.1 (Varopoulos 1985). *Le marche sur le graphe (G, C) est transiente si et seulement si une des deux conditions suivantes est satisfaite.*

1) Pour tout sommet x, il existe une constante a_x finie telle que, pour toute fonction u dans ℓ_0, $|u(x)| \leqslant a_x \|Du\|$.

2) Il existe un sommet x et une constante a_x finie tels que, pour toute fonction u dans ℓ_0, $|u(x)| \leqslant a_x \|Du\|$.

Démonstration : Si transience, la fonction de Green $G(x, y) := \mathbb{E}_x(N_y)$ est solution de $\Delta G(\cdot, x) = -\mathbf{1}_x$ et $a_x := \sqrt{G(x, x)/C(x)}$ convient.

Dans l'autre sens, on veut montrer que G est finie donc on introduit

$$G_n(y, x) := \sum_{k \leqslant n} p^k(y, x),$$

et la fonction $g_n := G_n(\cdot, x)$ est une fonction u de ℓ_0 solution de l'équation $\Delta u = -\mathbf{1}_x + p^{n+1}(\cdot, x)$. On montre alors que $g_n(x) \leqslant a_x^2 C(x)$. □

10.2 Constante de Cheeger

Pour $A \subset G$, le bord intérieur $\partial_0 A$ est l'ensemble des sommets x dans A dont un des voisins est hors de A. Le bord de A est l'ensemble ∂A des arêtes (x, y) avec x dans A et y hors de A.

Définition 10.2. *La constante de Cheeger (simple) $I(G)$ de G est l'infimum sur les parties finies connexes A de G des nombres $J(A)$ avec*

$$J(A) := \mathrm{card}(\partial_0 A)/\mathrm{card}(A).$$

Par exemple, $I(\mathbb{Z}^d) = 0$.

Proposition 10.3. *Sur l'arbre régulier A_d, $I(A_d) = (d-1)/d$.*

Démonstration : Sur toutes les boules B, on calcule $J(B) > (d-1)/d$. Puis, pour toute partie finie connexe A, on ajoute à la partie A tous les i frères $x \notin A$ d'un sommet $y \in A$. Donc on remplace $\mathrm{card}(A)$ par $\mathrm{card}(A) + i$ et $\mathrm{card}(\partial_0 A)$ par $\mathrm{card}(\partial_0 A) + i - 1$.

En utilisant le fait que

$$a/b \leqslant (d-1)/d, i \leqslant d-1 \implies (a+i-1)/(b+i) \leqslant (d-1)/d,$$

on voit que si $J(A) \leqslant (d-1)/d$ pour une partie A donnée, $J(B) \leqslant (d-1)/d$ pour la partie complétée B qui est une boule. Absurde. $\square$

Remarque 10.4. Si $I(G) \neq 0$, la croissance de G est uniformément exponentielle : comme $\partial_0 B_{n+1} \subset B_{n+1} \setminus B_n$, $\mathrm{card}(B_n) \geqslant (1 - I(G))^{-n}$ pour tout $n \geqslant 0$. $\square$

Définition 10.5 (Trou spectral). *On note L l'infimum des $[Du, Du]$ sur les fonctions u dans ℓ_0 telles que $\langle u, u\rangle = 1$.*

Donc on veut écrire $[Du, Du] \geqslant L\,\langle u, u\rangle$ uniformément en u dans ℓ_0.

Interprétation : L'opérateur $-\Delta$ est symétrique sur ℓ_2 et

$$\langle u, (-\Delta u)\rangle = [Du, Du],$$

donc L est la plus petite valeur propre si on remplace ℓ_0 par ℓ_2 (ça marche) et si on comprend L comme le bas de l'adhérence du spectre.

Remarque 10.6. Attention : 0 n'est pas valeur propre car la fonction 1 n'est pas dans ℓ_0 ni dans ℓ_2. $\square$

Conditions usuelles : pour tout sommet x, $C(x) \leqslant c_1$ avec c_1 fini et, pour toute arête e, si $C(e) \neq 0$, alors $C(e) \geqslant c_2$ avec $c_2 > 0$.

En particulier tous les degrés sont entre 1 et c_1/c_2 et, pour toute arête (x, y),

$$c_2 \leqslant C(x, y) \leqslant C(x) \leqslant c_1.$$

Exemple typique : marche au hasard simple et degrés bornés par d ; alors $c_2 = 1$ et $c_1 = d$.

Définition 10.7 (Constante de Cheeger adaptée). *Pour toute partie A finie de G,*

$$C(A) := \sum_{x \in A} C(x), \quad C(\partial A) := \sum_{e \in \partial A} C(e).$$

La constante de Cheeger de G adaptée à C est

$$I_C(G) := \inf\{C(\partial A)/C(A)\,;\, A \subset G,\, 0 < C(A) < +\infty\}.$$

Théorème 10.8 (Dodziuk 1984).
1) Sous les conditions usuelles, $(c_2/c_1)I \leqslant I_C \leqslant (c_1/c_2)I$.

2) On a toujours $\frac{1}{2}I_C^2 \leqslant L \leqslant I_C$.

Corollaire 10.1. *On a équivalence entre les conditions $L > 0$ et $I_C > 0$.*

Démonstration du théorème 10.8 : Quand $u = \mathbf{1}_A$ pour une partie A de G telle que $C(A)$ est finie, $\langle u, u\rangle = C(A)$ et $[Du, Du] = C(\partial A)$ donc I_C minimise la même fonctionnelle que L mais sur un ensemble de fonctions plus petit, ce qui montre que $I_C \geqslant L$.

Pour l'autre inégalité, on recopie un argument de Cheeger datant des années 1970. Pour toute fonction u dans ℓ_0, considérons

$$F := \sum_{x,y} C(x, y)|u^2(x) - u^2(y)|.$$

Par Cauchy-Schwarz, $F^2 \leqslant F'F''$ avec

$$F' := \sum_{x,y} C(x, y)(u(x) + u(y))^2 \leqslant 2 \sum_{x,y} C(x, y)(u^2(x) + u^2(y)) = 4\langle u, u\rangle,$$

et

$$F'' := \sum_{x,y} C(x, y)(u(x) - u(y))^2 = 2[Du, Du],$$

donc $F^2 \leqslant 8\langle u, u\rangle\, [Du, Du]$.

Par ailleurs, notons $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ les valeurs prises par la fonction u^2 et

$$G_i := \{x \in G\,;\, u^2(x) \geqslant a_i\}.$$

On peut se débarasser des valeurs absolues dans F en sommant deux fois sur les couples (x,y) tels que $u^2(x) > u^2(y)$. Puis, pour tout couple (x,y) de cette sorte, on sait qu'il existe $i < j$ tels que $u^2(x) = a_j$ et $u^2(y) = a_i$ donc

$$u^2(x) - u^2(y) = b_{i+1} + \cdots + b_j, \quad b_n := a_n - a_{n-1}.$$

Il vient

$$F = 2\sum_i b_i \sum_{(x,y)} C(x,y),$$

où chaque somme sur (x,y) regroupe tous les couples qui font intervenir b_i, donc tels que $u^2(y) < a_i \leqslant u^2(x)$. Il s'agit exactement des couples de ∂G_i et la somme numéro i vaut donc $C(\partial G_i)$. Par conséquent,

$$F = 2\sum_i b_i C(\partial G_i) \geqslant 2I_C \sum_i b_i C(G_i) = 2I_C \sum_x C(x) \sum_i b_i,$$

où chaque somme sur i dans la dernière expression regroupe tous les indices tels que $a_i \leqslant u^2(x)$, et vaut donc $u^2(x)$. Finalement,

$$F \geqslant 2I_C \sum_x C(x) u^2(x) = 2I_C \langle u, u\rangle,$$

donc $2[Du, Du] \geqslant I_C^2 \langle u, u\rangle$ pour toute fonction u dans ℓ_0, ce qui démontre que $L \geqslant \frac{1}{2} I_C^2$. □

Exemple 10.9. Si le graphe est un arbre dont les portions linéaires sont bornées, on le compare avec un arbre binaire et les calculs sont faciles. □

10.3 Rayon spectral

Rappelons qu'on considère une chaîne de Markov irréductible.

Définition 10.10. *Le rayon spectral est* $r := \limsup p_n(x,y)^{1/n}$.

Lemme 10.1. *r ne dépend pas de x et y.*

Démonstration : $p_{n+i+j}(x,y) \geqslant p_i(x,t) p_n(t,z) p_j(z,y)$. □

Remarque : transience = convergence de la série des $p_n(x,y)$; rayon $r < 1$ = convergence géométrique de la série donc une transience forte.

Proposition 10.11 (Estimations en temps fini). *Dans le cas réversible, pour tout $n \geqslant 0$ et tous sommets x et y,*

$$p_n(x,y) \leqslant r^n \sqrt{C(y)/C(x)}.$$

Démonstration : Sous-multiplicativité encore. Si $x = y$, pour tout n fixé, $p_{nk}(x,x) \geqslant p_n(x,x)^k$ donc $p_n(x,x)^{1/n} \leqslant r$. Pour $x \neq y$,

$$r^{2n} \geqslant p_{2n}(x,x) \geqslant p_n(x,y)p_n(y,x),$$

et il reste à remarquer que $p_n(y,x) = p_n(x,y)C(x)/C(y)$. □

Croissance supérieure : $c(G) := \limsup b(x,n)^{1/n}$.

Comme toujours, $c(G)$ ne dépend pas de x.

Proposition 10.12 (Vitesse de fuite, Lyons et Peres). *Pour la marche simple, si $r < 1$ et si $c(G)$ est fini, la vitesse inférieure de fuite est strictement positive. Plus précisément,*

$$\liminf d(o,X_n)/n \geqslant -\log r/\log c(G) \text{ presque sûrement.}$$

Démonstration : Soit $c > c(G)$ et $v < -\log r/\log c$ avec $rc^v < 1$. Alors

$$\mathbb{P}(|X_n| \leqslant vn) = \sum_{|x|\leqslant vn} p_n(o,x) \leqslant r^n \sum_{|x|\leqslant vn} \sqrt{C(x)/C(o)}.$$

Pour la marche simple, la dernière somme vaut $\mathrm{card}B(o,vn) \leqslant c^{vn}$ pour n assez grand donc $\mathbb{P}(|X_n| \leqslant vn) \leqslant (rc^v)^n$ est le terme général d'une série sommable. Par Borel-Cantelli, $\liminf |X_n|/n \geqslant vn$ presque sûrement. □

10.4 Norme d'opérateur

Soit $P := I + \Delta$ donc

$$Pu(x) = \sum_y p(x,y)u(y) = \mathbb{E}_x(u(X_1)).$$

Norme :

$$N(P) := \sup\{[Pu,Pu]^{1/2}\,;\, u \in \ell_0,\, \langle u,u\rangle = 1\}.$$

Donc on veut pouvoir écrire

$$[Pu,Pu] \leqslant N(P)^2\langle u,u\rangle.$$

Théorème 10.13 (Gerl 1988, Kaimanovich 1992). $1 - L = N(P) = r$.

11 Indices de croissance et récurrence/transience

Soit G un graphe, $B(x,n)$ la boule de rayon n autour du sommet x, $b(x,n)$ son cardinal, $S(x,n)$ la sphère de rayon n autour de x et $s(x,n)$ son cardinal.

11.1 Indices de croissance

La croissance de G autour d'un sommet x fixé est mesurée par

$$\mathrm{cr}(x,G) := \liminf s(x,n)^{1/n}, \quad \mathrm{cr}'(x,G) := \liminf b(x,n)^{1/n}.$$

Proposition 11.1. *Le nombre* $\mathrm{cr}'(x,G)$ *ne dépend pas de* x.

On le note donc désormais $\mathrm{cr}'(G)$.

Démonstration : Si k est la distance de x à y, $B(x,n+k)$ contient $B(y,n)$ pour tout n, donc $b(x,n+k) \geqslant b(y,n)$, donc $\mathrm{cr}'(x,G) \geqslant \mathrm{cr}'(y,G)$; en échangeant les rôles de x et y, on a fini. □

Exemple 11.2. Pour l'arbre régulier T de degré $d+1$, $\mathrm{cr}(T) = \mathrm{cr}'(T) = d$. □

Question : Préciser si $\mathrm{cr}(x,G) \leqslant \mathrm{cr}'(G)$ peut dépendre de x ou non. On remarque que $\limsup s(x,n)^{1/n} = \mathrm{cr}'(G)$ pour tout x donc si $\mathrm{cr}(x,G) \neq \mathrm{cr}'(G)$, la suite de terme général $s(x,n)^{1/n}$ admet plusieurs valeurs d'adhérence.

En tout cas, si G est un groupe, $\mathrm{cr}(x,G) = \mathrm{cr}'(G)$ pour tout x donc $\mathrm{cr}(x,G)$ ne dépend pas de x puisqu'on a la

Proposition 11.3. *Soit* G *le graphe de Cayley d'un groupe infini de type fini. Pour tout sommet* x,

$$\mathrm{cr}'(G) = \lim b(x,n)^{1/n} = \lim s(x,n)^{1/n}.$$

En particulier, $\mathrm{cr}(x,G)$ *ne dépend pas de* x.

Remarquer les limites au lieu des liminfs.

Démonstration : Rappelons que deux sommets x et y de G sont voisins si et seulement s'il existe un générateur g tel que $x = yg$ ou $y = xg$. La distance entre le neutre o et un élément x de G est donc la longueur minimale d'une écriture de x comme un mot en les générateurs g et leurs inverses g^{-1}. On considère les boules B_n et les sphères S_n centrées en o pour cette distance.

Tout mot z de S_{n+m} admet une écriture de longueur $n+m$ donc il existe au moins un couple de mots (x,y) de $S_n \times S_m$ tel que $z = xy$. Cela montre que $s_{n+m} \leqslant s_n s_m$. En passant aux logarithmes, le lemme sous-additif de Kingman-Fekete montre que $s_n^{1/n}$ converge vers une limite $c(G) := \inf s_n^{1/n}$.

Il reste à repasser aux boules. Comme $b_n \geqslant s_n$, $\mathrm{cr}'(o,G) \geqslant c(G)$. Montrons qu'en fait $b_n^{1/n}$ converge vers $c(G)$. Comme G est infini, $s_n \geqslant 1$ pour tout n donc $c(G) \geqslant 1$. Soit $c > c(G)$, donc $c > 1$, et soit N un entier tel que $s_n^{1/n} \leqslant c$ pour tout $n \geqslant N$. Donc $b_n \leqslant b_N + c^{N+1} + \cdots + c^n$, soit $b_n \leqslant b_N + c^{n+1}/(c-1)$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui montre que $\limsup b_n^{1/n} \leqslant c$.

On conclut en remarquant que $\mathrm{cr}'(G)$ utilise le cardinal des boules, donc ne dépend pas du sommet x de référence. □

On peut aussi appliquer directement le lemme sous-additif à la suite des $b(x,n)^{1/n}$ mais dans ce cas, il faut encore identifier la limite.

Lemme 11.1 (Lemme de Kingman-Fekete). *Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels, sous-additive, c'est-à-dire que $a_{n+k} \leqslant a_n + a_k$ pour tous n et k. Alors la suite de terme général a_n/n converge dans $[-\infty, +\infty[$ vers la limite* $\inf x_n/n$.

Démonstration : Soit $n \geqslant 1$ fixé et b_n un n ombre réel supérieur ou égal à tous les termes a_k pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Pour tout $in \leqslant m < (i+1)n$, $a_m \leqslant ia_n + a_{m-in} \leqslant ia_n + b_n$ donc $a_m/m \leqslant (a_n/n)(in/m) + b_n/m$. Quand $m \to \infty$, $m/i \to n$ donc $in/m \to 1$ et $b_n/m \to 0$ et $\limsup a_m/m \leqslant a_n/n$. Cette inégalité est vraie pour tout $n \geqslant 1$ donc $\limsup a_m/m \leqslant \inf a_n/n$ et comme $\inf a_n/n \leqslant \limsup a_m/m$, on a terminé. □

Exemple 11.4. Un arbre de croissance pathologique Soit $(n_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'entiers strictement positifs, $N_0 := 0$ et $N_k := n_1 + \cdots + n_k$ pour tout $k \geqslant 1$. Considérons le sous-arbre A de l'arbre binaire de racine o obtenu en ne gardant que les descendants d'un seul sommet de la génération N_k, pour chaque $k \geqslant 0$. Donc $s(o,N_k) = 2^{n_k}$, $s(o,N_k+1) = 2$ et $\mathrm{cr}'(o,A) = 1$. Par ailleurs,

$$\mathrm{cr}(A) \geqslant \liminf b(o,N_k)^{1/N_{k+1}} = \liminf 2^{n_k/N_{k+1}},$$

donc $\mathrm{cr}(A) > 1$ dès que la suite de terme général n_k/N_{k+1} est bornée inférieurement, par exemple si $n_k \sim a^k$ avec $a > 1$.

Par ailleurs, $b(o,2N_k) \leqslant b(o,N_k) + 2^{N_k} \leqslant 2\cdot 2^{N_k}$ donc $\liminf b(o,n)^{1/n} \leqslant 2^{1/2}$, mais $b(o,N_k) \geqslant 2^{n_k}$, donc

$$\limsup b(o,n)^{1/n} \geqslant \limsup 2^{n_k/N_k}.$$

Si $\limsup n_k/N_k > \frac{1}{2}$, cela prouve que la suite $(b(o,n)^{1/n})_n$ diverge, par exemple si $n_k \sim a^k$ avec $a > 2$. □

Exercice 11.5. Soit G un groupe de type fini, A un système de générateurs et $G(A)$ le graphe associé. Si B est un autre système de générateurs, montrer que $G(A)$ et $G(B)$ sont quasi-isométriques. En déduire que si $\mathrm{cr}(G(A)) > 1$, alors $\mathrm{cr}(G(B)) > 1$. □

Remarque 11.6. Dans la situation de l'exercice précédent, on ne sait pas si l'existence d'un système de générateurs A tel que $\mathrm{cr}(G(A)) > 1$ entraîne que $\inf_B \mathrm{cr}(G(B)) > 1$, où la borne inférieure porte sur tous les systèmes de générateurs B. □

11.2 Indices de branchement

Dans cette section, G est un graphe infini et connexe et o un sommet de G. Pour tout sommet x, on note $|x| := |x|_o$ la distance de o à x, pour toute arête $e = (x, y)$, on note $|e| := |e|_o := \inf(|x|, |y|)$.

Définition 11.7. *Soit $b \geqslant 1$ et k une fonction d'arêtes. On dit que k est adaptée au gabarit b à partir de o si, pour toute arête e, $|k(e)| \leqslant b^{-|e|}$. On dit que k est ultimement adaptée au gabarit b à partir de o s'il existe $n \geqslant 0$ fini tel que $|k(e)| \leqslant b^{-|e|}$ pour toute arête e telle que $|e| \geqslant n$.*

Comme G est infini (connexe), il existe toujours un flot j adapté au gabarit $b = 1$: on choisit un chemin injectif infini issu de o et on fait traverser ses arêtes par un flot de 1. Si une fonction d'arêtes est adaptée au gabarit $b > 1$, elle est aussi adaptée à tous les gabarits $1 \leqslant b' \leqslant b$. Enfin, si une fonction d'arêtes est ultimement adaptée au gabarit b, un de ses multiples positifs est adapté au même gabarit b.

Définition 11.8 (Lyons 1992). *Soit $\mathrm{br}(G)$ dans $[1, +\infty]$ le supremum de l'ensemble des nombres $b \geqslant 1$ tels qu'il existe un flot non nul issu de o (ultimement) adapté au gabarit b à partir de o.*

Lemme 11.2. *L'indice de branchement $\mathrm{br}(G)$ est indépendant de o.*

Définition 11.9. *Soit k une fonction d'arêtes, x un sommet, et γ un chemin orienté injectif de o vers x. Le transfert de k de o vers x selon γ est la fonction d'arêtes ℓ définie comme suit : si e n'est pas une arête de γ, $\ell(e) := k(e)$; si e est une arête de γ orientée dans le sens de γ, $\ell(e) := k(e) - k(o)$; enfin, si e est une arête de γ orientée dans le sens contraire de γ, $\ell(e) := k(e) + k(o)$.*

Lemme 11.3. *Soit j un flot issu de o et x un sommet. Tout transfert de o vers x de j est un flot k issu de x de même débit $k(x) = j(o)$.*

Démonstration du lemme 11.2 : Soit $1 \leqslant b < \mathrm{br}(o, G)$, j un flot issu de o de débit non nul et adapté au gabarit b autour de o, et x un sommet à distance m de o. Pour toute arête e, $|e|_x \leqslant |e| + m$ donc $|j(e)| \leqslant b^{-|e|} \leqslant b^m b^{-|e|_x}$ et le flot j/b^m est adapté au gabarit b autour de x. Le transfert k de j/b^m de o vers x est un flot issu de x qui coïncide avec j/b^m sauf sur un nombre fini d'arêtes donc ultimement adapté au gabarit b autour de x. On en déduit que $b \leqslant \mathrm{br}(x, G)$. On termine en inversant les rôles de o et x. □

Lemme 11.4. *Pour tout graphe G de degrés bornés,* $\mathrm{br}(G) \leqslant \mathrm{cr}(G)$.

Démonstration : Soit j un flot admissible non nul issu de o et soit $b < \mathrm{br}(G)$. Pour tout $n \geqslant 0$, l'ensemble ∂B_n des arêtes $e = (x, y)$ avec $|x| = n$ et

$|y| = n+1$ est un ensemble de coupure donc

$$|j(o)| \leqslant \sum_{e \in \partial B_n} |j(e)| \leqslant \mathrm{card}(\partial B_n)\, b^{-n},$$

donc $\mathrm{card}(\partial B_n) \geqslant c\, b^n$ avec $c := |j(0)| > 0$. Comme les degrés sont bornés par d, on en déduit que $s(o,n) \geqslant c\, b^n/d$ pour tout n, donc $\mathrm{cr}(G) \geqslant b$ et $\mathrm{br}(G) \leqslant \mathrm{cr}(G)$. □

Exemple 11.10. Pour l'arbre régulier A_d de degré $d+1$, $\mathrm{br}(A_d) = d$. En effet, le flot uniforme j issu de o de débit $j(o) = 1$ vérifie $|j(e)| \leqslant d^{-|e|}$ pour toute arête e, donc $\mathrm{br}(A_d) \geqslant d$. Et le lemme 11.4 fournit $\mathrm{br}(A_d) \leqslant \mathrm{cr}(A_d) = d$. □

Proposition 11.11. *Si A est un arbre sphérique,* $\mathrm{br}(A) = \mathrm{cr}(A)$.

Démonstration : Si $b < \mathrm{cr}(A)$, il existe une constante $c > 0$ telle que $s_n \geqslant cb^n$ pour tout $n \geqslant 0$. Soit j le flot uniforme. Si $|e| = n$, $j(e) = 1/s_{n+1}$ donc $(cb)j$ est adapté au gabarit b à partir de la racine o, soit $b < \mathrm{br}(A)$. □

Exemple 11.12. Arbre de générations paires binaires et de générations impaires ternaires : $\mathrm{br} = \mathrm{cr} = \sqrt{6}$. □

Exemple 11.13. Si A est le recollement de A' et A'' par leurs racines,

$$\mathrm{br}(A) = \max\{\mathrm{br}(A'), \mathrm{br}(A'')\}.$$

Soit $(n_k)_k$ une suite croissante d'entiers positifs. Soit A' l'arbre sans feuilles, binaire entre les générations n_{2k} et n_{2k+1} et linéaire sinon. Soit A'' l'arbre sans feuilles, linéaire entre les générations n_{2k} et n_{2k+1} et binaire sinon. Soit A le recollement de A' et A'' par leurs racines. Si $n_k \to \infty$ assez vite, $\mathrm{br}(A') = \mathrm{br}(A'') = \mathrm{br}(A) = 1$ mais $\mathrm{cr}(A) = 2$ (à faire). □

Exemple 11.14 (Arbre 3-1, Benjamini et Peres 1991). La racine est o, la génération n est l'ensemble des (n,k) pour $1 \leqslant k \leqslant 2^n$. Tout sommet (n,k) avec $k \leqslant 2^{n-1}$ possède 3 descendants, les autres possèdent un descendant. On numérote les sommets $(n+1,j)$ dans l'ordre de leur ancêtre. Donc $\mathrm{cr}(A) = 2$.

On va montrer que $\mathrm{br}(A) = 1$, c'est-à-dire que pour tout $b > 1$, il n'existe pas de flots j issus de o et adaptés au gabarit b, autres que les flots de débit nul en o.

Lemme 11.5. *Si $k \neq 1$, l'arbre $(n,k)^+$ postérieur au sommet (n,k) est la complétion d'un arbre fini par des copies de $\mathbb{N}$ attachées aux feuilles.*

Démonstration du lemme 11.5 : Si (n,k) n'a qu'un descendant, $k > 2^{n-1}$ donc l'indice de ce descendant est $3 \cdot 2^{n-1} + (k - 2^{n-1}) > 2^n$ et ce descendant n'a lui même qu'un descendant.

Si (n,k) a trois descendants, le plus petit indice d'un de ses descendants est $3(k-1)+1 = 3k-2$. Après i générations, le plus petit indice d'un de ses descendants est $3(k-1)^i+1$ donc ses descendants sont de la forme $(n+i,j)$ avec $j \geqslant 3(k-1)^i+1$. Si $k \neq 1$, pour i assez grand, $3(k-1)^i+1 > 2^{n+i-1}$, donc tous les descendants de (n,k) après i générations sont dans la partie "un seul descendant". $\square$

Par conséquent, si $k \neq 1$, pour tout $n \geqslant 1$, le débit $j(n,k)$ du flot qui entre dans $(n,k)^+$ vaut au plus le nombre de feuilles de cet arbre multiplié par b^{-i} avec i aussi grand que l'on veut, donc $j(n,k) = 0$.

Le flot j ne circule que dans le sous-arbre linéaire formé des sommets $(n,1)$, donc son débit est nul. $\square$

11.3 Flot maximal et ensembles de coupure

Un ensemble de coupure entre deux parties A et B du graphe G est un ensemble d'arêtes K tel que tout chemin d'un sommet de A vers un sommet de B emprunte une arête de K. Soit $|K|$ le minimum des $|e|$ pour e dans K. On note $K \to \infty$ le fait de considérer des limites selon les ensembles de coupures K tels que $|K| \to \infty$.

Définition 11.15. *On fixe une collection $d := (d(e))_e$ de coefficients $d(e) \geqslant 0$. Une fonction d'arêtes k est d-admissible si $|k(e)| \leqslant d(e)$ pour toute arête e.*

Définition 11.16. *On fixe une collection $d := (d(e))_e$ de coefficients $d(e) \geqslant 0$ et $b > 0$. Pour tout ensemble d'arêtes K, on note*

$$D(d,K) := \sum_{e \in K} d(e), \quad D_b(K) := \sum_{e \in K} b^{-|e|}.$$

Théorème 11.17 (Ford-Fulkerson 1957). *Soit G un graphe fini, $a \neq b$ deux sommets de G et $d := (d(e))_e$ des coefficients fixés. Alors le maximum des débits des flots d-admissibles entre a et b est égal au minimum des $D(d,K)$ sur tous les ensembles K de coupure entre a et b.*

Preuve admise.

Une partie est directe : pour tout ensemble de coupure K, il existe une partie $L \subset K$ telle que

$$|j(a)| \leqslant \sum_{e \in L} |j(e)| \leqslant \sum_{e \in L} d(e) = D(d,L) \leqslant D(d,K).$$

Le fait que l'égalité puisse être réalisée est surprenant.

En considérant des coupures entre o et l'infini, on obtient

Corollaire 11.1. *Pour tout graphe G,*

$$\mathrm{br}(G) = \inf\{b > 0\,;\, \inf_K D_b(K) = 0\} = \sup\{b > 0\,;\, \inf_K D_b(K) > 0\}.$$

Restreindre K aux sphères redonne $\mathrm{cr}(G)$ donc on retrouve le fait que, pour tout graphe G, $\mathrm{br}(G) \leqslant \mathrm{cr}(G)$.

On peut aussi remplacer $\inf_K$ par $\liminf_{K\to\infty}$.

11.4 Marches au hasard avec dérive

On dote l'arête e de la conductance $C_b(e) := b^{-|e|}$: pour tout $n \geqslant 0$, si (x, y) est une arête telle que $|x| = n$ et $|y| = n$ ou $|y| = n+1$, alors $C_b(x, y) := b^{-n}$.

Théorème 11.18. *Pour tout graphe G, si $b > \mathrm{br}(G)$, la marche sur (G, C_b) est récurrente.*

Première démonstration : Puisque $b > \mathrm{br}(G)$, il existe une suite d'ensembles de coupure (K_n) telle que $D_b(K_n) \to 0$. On peut supposer les parties K_n disjointes. Donc la série des $1/D_b(K_n)$ diverge. Il reste à remarquer que $D_b(K) = \sum_{e\in K} C_b(e)$ pour constater que le critère de Nash-Williams montre la récurrence puisque la composante connexe de o par rapport à un ensemble de coupure K est toujours finie. □

Deuxième démonstration (Lyons) : Si (G, C_b) est transient, il existe un flot non nul issu de o d'énergie finie pour C_b, c'est-à-dire tel que la somme des $b^{|e|} j(e)^2$ converge. Par Cauchy-Schwarz, pour tout ensemble de coupure K,

$$j(o)^2 \leqslant \left(\sum_{e\in K} |j(e)|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{e\in K} b^{|e|} j(e)^2\right) \left(\sum_{e\in K} b^{-|e|}\right),$$

ce qui entraîne que $j(o)^2 \leqslant \mathcal{E}_b(j)\, D_b(K)$, donc $D_b(K)$ est minoré uniformément sur K par $j(o)^2/\mathcal{E}_b(j) > 0$, ce qui montre que $b \leqslant \mathrm{br}(G)$. □

Théorème 11.19 (Lyons 1990). *Soit A un arbre. Si $b < \mathrm{br}(A)$, la marche sur (A, C_b) est transiente.*

Pour un arbre, ne reste donc plus que le cas $b = \mathrm{br}(A)$.

Lemme 11.6. *Soit A un arbre. Supposons qu'il existe une série $\sum w_n$ à termes positifs et convergente et un nombre $w > 0$ tels que, pour tout ensemble de coupure K,*

$$\sum_{e\in K} w_{|e|}\, C(e) \geqslant w.$$

Alors la marche sur (A, C) est transiente.

Démonstration du lemme 11.6 : Maxflow-mincut donne l'existence d'un flot j de débit $j(o) \geqslant w$ tel que $|j(e)| \leqslant w_{|e|}\, C(e)$ pour toute arête e. Appelons arête sortante toute arête orientée de o vers l'extérieur. Montrons qu'on peut choisir un flot sortant, c'est-à-dire positif ou nul sur les arêtes sortantes, et vérifiant les mêmes inégalités que j. Pour toute arête sortante e, posons $k(e) := j(e)$ si $j(e) \geqslant 0$ et si $j(f) \geqslant 0$ pour toutes les arêtes f sortantes entre o et e, et $k(e) := 0$ sinon. Alors $k(o) \geqslant j(o) \geqslant w$ et, pour tout $x \neq o$,

$$k(\bar{x}, x) \leqslant \sum_{\bar{y}=x} k(x, y),$$

où $\bar{x}$ désigne l'ancêtre de x. On construit un flot sortant basé sur k, de proche en proche à partir de o comme suit.

Si $|e| = 0$, on pose $\ell(e) := k(e)$. Si on a construit un flot ℓ jusqu'à la génération $n \geqslant 1$, soit x un sommet avec $|x| = n$. Si $\ell(\bar{x}, x) = \sum_{\bar{y}=x} k(x, y)$, on pose $\ell(x, y) := k(x, y)$ pour tout descendant y de x. Sinon, $\ell(\bar{x}, x) < \sum_{\bar{y}=x} k(x, y)$ et on pose $\ell(x, y) := t_x k(x, y)$ pour tout descendant y de x, où t_x est choisi dans $[0, 1[$ de sorte que $\ell(\bar{x}, x) = t_x \sum_{\bar{y}=x} k(x, y)$.

Il se trouve que ℓ est un flot et que $\ell(e) \leqslant k(e) \leqslant |j(e)|$ pour toute arête sortante e. On constate aussi que les seules arêtes sortantes e telles que $\ell(e) \neq 0$ sont les arêtes e telles $j(f) \geqslant 0$ pour toutes les arêtes sortantes f entre o et e.

Enfin le débit $\ell(o) = k(o) \geqslant j(o) \geqslant w$ et ℓ est sortant donc

$$\ell(o) = \sum_{e \in E_n} \ell(e),$$

où la somme porte sur l'ensemble E_n des arêtes $e = (x, y)$ telles que $|x| = n$ et $|y| = n + 1$. Comme $0 \leqslant \ell(e)/C(e) \leqslant w_{|e|}$ pour toute arête sortante e,

$$\mathcal{E}(\ell) = \sum_{e} \ell(e)^2/C(e) \leqslant \sum_{n} w_n \sum_{e \in E_n} \ell(e) = \ell(o) \sum_{n} w_n,$$

où dans la première somme, on ne compte que les arêtes sortantes, donc $\mathcal{E}(\ell)$ est finie et la marche est transiente. $\square$

Démonstration du théorème 11.19 : Pour tout $b < c < \mathrm{br}(A)$, la suite $w_n := (b/c)^n$ vérifie l'hypothèse du lemme 11.6. $\square$

Dans le cas limite, les deux situations sont possibles.

Exemple 11.20. Sur l'arbre régulier A_d, la marche pour $b = d$ est équivalente à la marche simple sur $\mathbb{N}$ avec réflexion en 0, donc elle est récurrente (nulle).

Soit A un arbre sphérique avec $s_n = 3^k$ pour tout $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ et tout $k \geqslant 0$, donc les sommets à distance $n = 0$ ou $2^k < n < 2^{k+1}$ pour un entier

$k \geqslant 0$ possèdent 1 descendant et les sommets à distance exactement $n = 2^k$ pour un entier $k \geqslant 0$ en possèdent 3. Alors $\mathrm{cr}(A) = 1$ et après connection de toutes les sphères, la résistance équivalente totale vaut la somme des $(\frac{2}{3})^n$ qui converge donc r_e est finie et la marche est transiente. $\square$

11.5 Dérive et branchement

Proposition 11.21. *Sur tout graphe G, si $b > \limsup s_n^{1/n}$, la marche est récurrente positive.*

Démonstration : Puisque $s_n \leqslant c^n$ pour tout n assez grand, avec $c < b$, la somme des conductances de toutes les arêtes est finie. $\square$

Théorème 11.22 (Lyons 1995). *Soit G un graphe de Cayley, alors :*
1) $\mathrm{br}(G) = \mathrm{cr}(G) = \lim s_n^{1/n}$.
2) Si $b > \mathrm{br}(G)$, la marche sur (G, C_b) est récurrente positive.
3) Si $b < \mathrm{br}(G)$, la marche sur (G, C_b) est transiente.

L'outil principal de la preuve est dû à Furstenberg.

Définition 11.23. *Soit A un arbre de racine o. L'arbre A est sous-périodique si pour tout sommet x, l'arbre A_x postérieur à x s'injecte dans A.*

On demande donc que chaque injection $f : A_x \to A$ envoie x sur o et préserve les arêtes au sens où, si (y, z) est une arête de A_x, $(f(y), f(z))$ est une arête de A.

Remarque 11.24. Extension : l'arbre A est k-sous-périodique si tout sous-arbre A_x s'injecte dans un des sous-arbres A_y avec $|y| \leqslant k$.

Exemple important : le revêtement universel A d'un graphe fini G de racine o est k-sous-périodique, où k désigne la longueur du plus grand chemin injectif dans G issu de o. (Exercice : la réciproque est vraie.) Par définition, les sommets de A sont les chemins $\gamma := (x_i)_{i \geqslant 0}$ issus de $x_0 := o$ et de longueur finie tels que $x_{i+2} \neq x_i$ pour tout $i \geqslant 0$, et une arête relie deux sommets de A s'ils correspondent à des chemins γ et γ prolongé d'un sommet de G.
$\square$

Lemme 11.7. *Tout graphe de Cayley G possède un arbre exhaustif géodésique sous-périodique A.*

Démonstration du lemme 11.7 : On représente chaque sommet x de G par le mot lexicographiquement minimal en les générateurs de G. L'arbre A ne garde que les arêtes (x, y) telles que les mots minimaux associés sont w et wg pour un générateur g. L'arbre A est géodésique : les distances entre o et x dans G et dans A coïncident. L'arbre A est sous-périodique ("sous" à cause des relations). $\square$

Théorème 11.25 (Furstenberg 1967). *Soit A un arbre sous-périodique, alors*
$$\mathrm{br}(A) = \mathrm{cr}(A) = \lim s_n^{1/n}.$$

Démonstration de "Furstenberg implique Lyons" : Soit A l'arbre exhaustif associé à G par le lemme 11.7. Comme A est géodésique, les boules de A et celles de G coïncident donc $\mathrm{cr}(A) = \mathrm{cr}(G)$. D'après le théorème de Furstenberg, $\mathrm{cr}(A) = \mathrm{br}(A)$.

Si $b < \mathrm{cr}(A) = \lim s_n^{1/n}$, la marche sur A est transiente d'après le théorème 11.19. La marche sur G aussi car G est un sur-graphe de A.

Si $b > \mathrm{cr}(A)$, soit d le degré maximal dans G. Alors
$$\sum_e C_b(e) \leqslant d \sum_{x \in G} b^{-|x|} = d \sum_{n \geqslant 0} b^{-n} s_n,$$
donc cette série converge et la marche est récurrente positive. □

Démonstration du théorème 11.25 : La sous-périodicité de A entraîne que $s(x,n) \leqslant s(o,n)$ pour tout x, donc $(s_n)_n$ est sous-multiplicative. Soit s la limite de $s_n^{1/n}$, donc $s \geqslant 1$, $s_n \geqslant s^n$ et $D_s(S_n) \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Si on sait que $D_s(K) \geqslant 1$ pour tout ensemble de coupure K, on a par définition $\mathrm{br}(A) \geqslant s$. Par ailleurs $s_n^{1/n} \to s$ donc $\mathrm{cr}(A) = \mathrm{cr}'(A) = s$ et comme $\mathrm{cr}' \geqslant \mathrm{br}$ en général, on a terminé.

Il reste à montrer que $D_s(K) \geqslant 1$ pour tout ensemble de coupure K. Soit $f_x : A_x \to A$ l'injection garantie par la sous-périodicité, donc $f_x(x) = o$. Soit L l'ensemble des sommets impasses et des sommets avant K, donc x appartient à L dans deux cas : si la géodésique de o à x ne peut pas être prolongée infiniment de façon injective ; et si la géodésique de o à x ne rencontre pas K à part peut-être en x. Soit M la réunion des $K^n \times L$ pour tout $n \geqslant 0$, et $F : A \to M$ l'application définie comme suit. Soit x dans A. Si la géodésique de o à x ne rencontre pas K à part peut-être en x, $F(x) := x$ donc $F(x) \in L$. Sinon, soit y la première intersection de cette géodésique avec K et $x_1 := f_y(x)$. Alors $F(x) := (y, F(x_1))$, c'est-à-dire que l'on recommence avec le chemin de y à x reporté en o grâce à l'injection f_y.

Il se trouve que si $F(x) = (y_1, y_2, \ldots)$, $|x|$ est la somme des $|y_i|$. Si on note $|y| := |y_1| + |y_2| + \cdots$ pour $y := (y_i)_{i \geqslant 1}$ dans M, on obtient par injectivité de F,
$$D_s(A) = \sum_{x \in A} s^{-|x|} \leqslant \sum_{y \in M} s^{-|y|} =: D_s(M),$$
et en décomposant chaque y dans M selon ses coordonnées,
$$D_s(M) = \sum_{z \in L} s^{-|z|} \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{t \in K} s^{-|t|} \right)^n = D_s(L) \sum_{n \geqslant 0} D_s(K)^n.$$

Par ailleurs,
$$D_s(A) = \sum_{n \geqslant 0} s^{-n} s_n,$$
donc $D_s(A)$ est infinie, ce qui montre que $D_s(K) \geqslant 1$ puisque $D_s(L)$ est une somme d'un nombre fini de termes. $\square$

Extension aux arbres k-sous-périodiques avec $k \geqslant 1$: On ne mentionne que les modifications de la démonstration. Si $F(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $|x|$ est la somme des $\|y_i\|$ pour $i \leqslant n-1$ et de $|y_n|$, où $\|\cdot\|$ est la modification suivante de $|\cdot|$. Soit $f_x : A_x \to A$ l'injection fournie par la k-sous périodicité, alors
$$\|x\| := |x| - |f_x(x)|.$$
Alors $|x| = |y|$ si $x = F(y)$ donc comme dans le cas précédent,
$$+\infty = D_s(A) \leqslant D_s(M) = D_s(L) \sum_{n \geqslant 0} D'_s(K)^n,$$
avec
$$D'_s(K) := \sum_{x \in K} s^{-\|x\|}.$$
Comme $|f_x(x)| \leqslant k$ pour tout x dans A, $\|x\| \geqslant |x| - k$. Comme $s \geqslant 1$, $D'_s(K) \leqslant s^k D_s(K)$ donc $D_s(K) \geqslant s^k$ pour tout ensemble de coupure K, ce qui suffit pour conclure que $\mathrm{br}(A) \geqslant s$. $\square$

Remarque 11.26. Le théorème 11.22 affirme donc que les graphes de Cayley se comportent comme des arbres à peu près symétriques. Pourtant la vitesse de fuite $v(b)$ définie comme la limite inférieure presque sûre de $|X_n|/n$ pour la marche sur (G, C_b), peut être croissante sur certains paramètres b alors qu'on s'attend au contraire (et que $b \mapsto v(b)$ est décroissante dès que G est sphériquement symétrique). Groupe de l'allumeur de réverbères. $\square$

Exemple 11.27. Vitesse paradoxale : A arbre binaire avec une copie de $\mathbb{N}$ ajoutée en chaque sommet. Alors $v(b) = (1-b)/(1+b)$ si $b \leqslant 1$ et $v(b) > 0$ si $b > 1$. À calculer. $\square$

Exemple 11.28. Groupe de l'allumeur de réverbères. $\square$

Remarque 11.29. On a montré que $\mathrm{br}(A) = \mathrm{cr}(G)$ pour un arbre exhaustif particulier. On ne sait pas si $\mathrm{br}(B) = \mathrm{cr}(G)$ pour tout arbre exhaustif B de tout graphe de Cayley G. $\square$

Récapitulatif

Pour tout graphe G, $\mathrm{cr}(G) \geqslant \mathrm{br}(G)$; $b > \mathrm{br}(G)$ implique la récurence ; $b > \limsup s_n^{1/n}$ implique la récurrence positive. Pour tout arbre, $b < \mathrm{br}(A)$ implique la transience. Pour tout arbre sphérique, $\mathrm{cr}(A) = \mathrm{br}(A)$.

Pour tout graphe de Cayley, $\mathrm{br}(G) = \mathrm{cr}(G) = \lim s_n^{1/n}$. Conséquence : si $b > \mathrm{br}(G)$, récurrence positive. Si $b < \mathrm{br}(G)$, on montre que $b < \mathrm{br}(A)$ pour un arbre $A \subset G$ bien choisi, donc A est transient donc le sur-graphe G aussi.

11.6 Compléments

11.6.1 Caractérisation de Thomassen

Fonction isopérimétrique plantée : soit (G, C) un graphe et o un sommet de G. Alors une fonction croissante ι est une fonction isopérimétrique plantée en o pour (G, C) si $C(\partial A) \geqslant \iota(C(A))$ pour toute partie finie connexe A de G contenant o.

Théorème 11.30 (Thomassen 1992). *Si C est bornée au sens où $C(x) \leqslant c$ pour tout sommet x et si l'intégrale de $1/\iota^2$ converge en l'infini, alors la marche sur (G, C) est transiente.*

Cas de la marche simple : restent la condition de degrés bornés et la condition que la série $\sum 1/\iota(n)^2$ converge.

La démonstration utilise le théorème de Menger et comporte le cas des arbres subdivisions de l'arbre binaire.

Démonstration pour les arbres subdivisions de l'arbre binaire : Soit S_n les sommets de l'arbre à n embranchements de la racine et j le flot uniforme donc $j(e) = 1/2^n$ si l'arête e est entre S_n et S_{n+1} et dirigée vers S_{n+1}. Soit e_n le nombre d'arêtes entre S_n et S_{n+1}. Alors

$$\mathcal{E}(j) = \sum_n \frac{e_n}{4^n}.$$

Par isométrie, $2^n \geqslant \iota(e_1 + \cdots + e_n)$ donc

$$\mathcal{E}(j) \leqslant \sum_n \frac{e_n}{\iota(e_1 + \cdots + e_n)^2} \leqslant \sum_k \frac{1}{\iota(k)^2},$$

où la dernière inégalité est fournie par la croissance de ι. Donc $\mathcal{E}(j)$ est finie, ce qui montre la transience de $(A, 1)$. □

Exemple 11.31. Classification des graphes de Cayley (Varopoulos) : $(G, 1)$ est récurrent si et seulement si G est une extension finie de $\mathbb{Z}^d$ avec $d = 0$, 1 ou 2. □

Exemple 11.32. Grossissements de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^{d+1}$ (T. Lyons)

Soit $G \subset \mathbb{Z}^{d+1}$ l'ensemble des $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d+1}$ tels que $|x_i| \leqslant \ell_i(|x_{k+1}|)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Alors $(G, 1)$ est transient si et seulement si la série suivante converge :

$$\sum_n \prod_{i=1}^k \frac{1}{\ell_i(n)}.$$

Le sens direct est une conséquence de Nash-Williams, par des connections analogues à celles utilisées pour $\mathbb{Z}^2$. Le sens réciproque vient de la condition de Thomassen. $\square$

11.6.2 Énoncés sans preuve

Pour toute marche irréductible récurrente positive de mesure stationnaire π et de rayon spectral r, pour tout $n \geqslant 0$, tout sommet x et toute partie B,

$$p^n(x, B) \leqslant r^n \sqrt{\pi(B)/\pi(x)}.$$

Vitesses de fuite (Peres)

Si G est de degrés bornés et si $\liminf |X_n|/n \geqslant v$ avec une probabilité strictement positive, alors $\mathrm{br}(G) \geqslant \mathrm{e}^{v/2}$.

Pour la marche simple sur un arbre, si $\liminf |X_n|/n \geqslant v$ avec une probabilité strictement positive, alors $\mathrm{br}(G) \geqslant \mathrm{e}^{I(v)/v}$, où I est une fonctionnelle de grandes déviations, définie par

$$I(v) := \frac{1}{2}\left((1+v)\log(1+v) + (1-v)\log(1-v)\right).$$

On commence par montrer que la marche simple et symétrique Y sur $\mathbb{Z}$ vérifie la borne

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geqslant vn) \leqslant 2\exp(-nI(v)).$$

12 Exercices

1. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi commune $p\delta_1 + (1-p)\delta_0$. Pour $n \geqslant 0$, on pose $S_n := Z_0 + \cdots + Z_n$. Parmi les processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ suivants, préciser lesquels sont des chaînes de Markov.

(1) $X_n := Z_n$. (2) $X_n := S_n$. (3) $X_n := Z_n + Z_{n-1}$.

(4) $X_n := S_0 + \cdots + S_n$. (5) $X_n := (S_n, S_0 + \cdots + S_n)$.

Selon les cas, on précisera l'espace d'états et la matrice de transition, ou on donnera un exemple montrant qu'il ne s'agit pas d'une chaîne de Markov.

2. Soit X une chaîne de Markov et τ le premier instant n tel que $X_n \neq X_0$.

Donner la loi de τ sachant X_0. Donner la loi de X_τ. Montrer que si $X_0 = x$ presque sûrement, τ et X_τ sont indépendants. Traiter le cas général.

On pose $\tau_0 := 0$, puis $\tau_{k+1} := \inf\{n \geqslant \tau_k + 1\,;\, X_n \neq X_{\tau_k}\}$ pour tout $k \geqslant 0$.

Montrer que τ_k est un temps d'arrêt pour X. On note $Y_k := X_{\tau_k}$ si τ_k est fini et $Y_k := \partial$ si τ_k est infini, où $\partial \notin V$.

Montrer que $Y := (Y_k)_{k\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène. On précisera l'espace d'états et la matrice de transition.

On suppose qu'aucun état n'est absorbant et que π est une distribution stationnaire pour X, et on pose $\pi'(x) := \pi(x)/(1 - q(x, x))$. Montrer que π' est une mesure stationnaire pour Y.

3. Soit X une chaîne de Markov, T le premier temps de passage par une partie F, et $Y_n := X_{n\wedge T}$.

Montrer que Y est une chaîne de Markov et préciser sa matrice de transition.

4. On place $N \geqslant 1$ boules dans deux boîtes. Au temps n, on prélève une de ces N boules, choisie au hasard de façon uniforme, et on la replace dans la boîte de gauche avec probabilité p, et dans la boîte de droite avec probabilité $1 - p$. Soit X_n le nombre de boules dans la boîte de gauche au temps n.

Montrer que X est une chaîne de Markov homogène. Expliciter sa matrice de transition. Trouver une mesure stationnaire.

5. Soit X une chaîne de Markov homogène et $Y_n := X_{n:n+k}$, pour $k \geqslant 0$ fixé.

Montrer que $Y := (Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène. Expliciter sa matrice de transition et sa distribution initiale.

Montrer que la réciproque est fausse, c'est-à-dire que Y peut être une chaîne de Markov sans que X en soit une. (Parler des marches avec renforcement.)

Préciser si, dès que X est irréductible, Y est irréductible. Comparer les périodes de X et de Y quand X et Y sont irréductibles.

On suppose que π est une distribution stationnaire de X. Exhiber une distribution stationnaire de Y.

(Montrer que **tout** processus peut être plongé dans une chaîne de Markov (transiente).)

6. Soit a, b et c des nombres réels dans l'intervalle $]0, 1[$. Calculer la distribution stationnaire de la chaîne de Markov de transition

$$q := \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-b & b \\ c & 0 & 1-c \end{pmatrix}.$$

Préciser si cette chaîne de Markov est réversible.

7. Soit $E_0 \subset E$ et q_0 définie sur E_0 par $q_0(x,y) := q(x,y)$ si x et y sont dans E_0 et $x \neq y$ et $q_0(x,x) := q(x,x) + q(x, E \setminus E_0)$ si x est dans E_0. Soit π une distribution stationnaire telle que $\pi(E_0) \neq 0$ et telle que (π, q) est réversible.

Montrer que la restriction π_0 de π à E_0 est une mesure stationnaire pour q_0 et que $(\pi_0/\|\pi_0\|, q_0)$ est réversible.

8. Vous possédez 1000 € mais vous en devez 5000 à la terrible Mafia grenobloise. Vous vous proposez d'essayer de vous renflouer par une série de jeux de pile ou face équitables. Dans la stratégie Tortue, vous pariez 1 € à chaque fois. Dans la stratégie Lièvre, vous pariez autant que vous pouvez à chaque fois, mais pas plus que nécessaire pour atteindre votre objectif de 5000 €. Calculer vos chances de finir au fond de l'Isère, un bloc de ciment aux pieds, si vous êtes Tortue, puis si vous êtes Lièvre.

Même question en pariant sur le rouge ou sur le noir de la roulette.

9. Soit X_n la somme des points obtenus pendant les n premiers lancers d'un dé à six faces. Trouver la limite de $\mathbb{P}(13 \text{ divise } X_n)$. On ne précise pas si le dé est biaisé ou non, seulement que chaque résultat de 1 à 6 est possible.

10. (Renouvellement) Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que le pgcd du support de la loi de U_1 vaut 1. On note $S_0 := 0$, puis $S_k := U_1 + \cdots + U_k$ et $\mathcal{S} := \{S_k\,;\, k \geqslant 0\}$. Soit

$$X_n := \min\{k \geqslant 0\,;\, n + k \in \mathcal{S}\}.$$

Montrer que X est une chaîne de Markov. Trouver la limite de $\mathbb{P}(X_n = 0)$.

11. Soit $m \geqslant 2$ un entier. On marche sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec transitions $p(x, x+1) := 1 - u$ et $p(x,y) := u/(m-1)$ si $y \neq x+1$, où u un nombre réel dans l'intervalle $]0,1[$. Préciser si cette chaîne est réversible. Exhiber une distribution stationnaire et estimer la vitesse de convergence vers cette distribution stationnaire. Indication : on pourra penser à un mode de simulation de cette chaîne.

12. Des particules se déplacent de façon indépendante dans E, chacune selon une chaîne de Markov de transition p. Chaque état x de E est occupé par un nombre fini $C_n(x)$ de particules au temps n, et on note $C_n := (C_n(x))_{x\in E}$. On suppose que C_0 est une collection de variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de moyennes $(m(x))_{x\in E}$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, C_n est une collection de variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de moyennes $(m_n(x))_{x\in E}$, et préciser la valeur de chaque $m_n(x)$. Si p admet une distribution invariante π, en déduire une distribution invariante pour $(C_n)_n$.

13. Soit X une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive, de distribution stationnaire π. Soit $A \subset E$ et $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ les temps successifs de passage dans A. Donc $\tau_0 := 0$ et, pour $n \geqslant 0$,

$$\tau_{n+1} := \inf\{k \geqslant \tau_n + 1 \,;\, X_k \in A\}.$$

Montrer que τ_n/n converge vers $1/\pi(A)$ presque sûrement.

14. Caractériser $\mathbb{E}(s^{T_0})$ pour $|s| \leqslant 1$ et pour la marche au hasard issue de 1 dont les incréments ont pour loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$.

Même question pour des incréments de loi $p\delta_2 + (1-p)\delta_{-1}$.

15. Calculer la valeur du temps moyen de retour en la case `a1` pour un roi d'échecs partant de la case `a1`.

16. (Temps d'absorption et distributions stationnaires)

Soit X une chaîne de Markov homogène de matrice de transition p sur un espace fini E. On veut calculer la moyenne du temps d'atteinte τ d'une partie F de E par la chaîne de Markov partant d'un sommet fixé a dans $G := E \setminus F$.

On considère la matrice de transition p' obtenue en modifiant les lignes de p indexées par des éléments de F et en les remplaçant par $p'(x, a) := 1$ pour tout x dans F. Décrire la classe de communication C de a pour r. Montrer que la restriction r de p' à C est possède une unique distribution stationnaire ϱ. Utiliser l'exercice **13** pour prouver que

$$\mathbb{E}_a(\tau) = \varrho(F)^{-1} - 1.$$

17. (File d'attente) Soit $(U_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendante des U_n. On considère la file d'attente suivante : U_n clients arrivent au temps n et si $X_n \geqslant 1$ clients sont présents dans la queue au temps n, l'un d'entre eux est servi entre les instants n et $n+1$.

(1) Montrer que X est une chaîne de Markov homogène. Donner sa matrice de transition.

(2) Si $\mathbb{E}(U_1) > 1$, montrer que X_n tend vers l'infini et préciser en quels sens.

(3) Si $\mathbb{E}(U_1) < 1$, montrer que 0 est récurrent.

(4) Soit $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi et $\sigma_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$. On pose

$$M_n := \max\{0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\}.$$

Exprimer la loi de M_{n+1} en fonction des lois de ξ_1 et M_n. Dans le cas où $\mathbb{E}(\xi_1) < 0$, montrer que M_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire M et décrire la loi de M.

(5) Soit $Y_n := (X_n - 1)^+$. Donner une équation de récurrence satisfaite par $Y := (Y_n)_{n \geqslant 0}$. Si $\mathbb{E}(U_1) < 1$, déduire de (4) que Y possède une mesure stationnaire que l'on décrira.

(6) Soit p et a dans $]0,1[$. On suppose que la loi de U_1 est

$$p(1-a)\,\delta_0 + a\,\delta_1 + (1-p)(1-a)\,\delta_2.$$

Expliciter une distribution stationnaire de X dans tous les cas où elle existe.

18. (Fibonacci) On construit une suite aléatoire $F := (F_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres entiers en posant $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, puis, si F_n et F_{n+1} sont connus, en décidant que F_{n+2} vaut $F_n + F_{n+1}$ ou $|F_n - F_{n+1}|$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

(1) Montrer que F n'est pas une chaîne de Markov.

(2) On pose $X_n := (F_n, F_{n+1})$. Montrer que X est une chaîne de Markov.

(3) Calculer la probabilité avec laquelle F atteint 3 avant de repasser par 0.

(4) Dessiner le début du flot de transition de X. En déduire que la probabilité pour que X passe par $(1,1)$ en partant de $(1,2)$ vaut $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$.

(5) En déduire que X est transient et que $F_n \to \infty$ presque sûrement.

19. On considère la marche au plus proche voisin sur $\mathbb{N}$ de transition p définie par $p(0,1) := 1$ et, pour tout $x \geqslant 1$,

$$p(x,x+1) := \frac{(x+1)^a}{x^a + (x+1)^a}, \quad p(x,x-1) := \frac{x^a}{x^a + (x+1)^a}.$$

Préciser pour quelles valeurs du paramètre a cette marche est récurrente positive, respectivement récurrente nulle, respectivement transiente.

Si $a = 2$ et $X_0 = 0$, montrer que la probabilité de ne jamais revenir 0 vaut $6/\pi^2$.

13 Appendices

13.1 Sur les suites de Fibonacci aléatoires

On va résoudre l'exercice 18 de la fiche de TD et exposer quelques prolongements. On rappelle l'énoncé.

13.1.1 Énoncé

On construit une suite aléatoire $F := (F_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres entiers en posant $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, puis, si F_n et F_{n+1} sont connus, en décidant que F_{n+2} vaut $F_n + F_{n+1}$ ou $|F_n - F_{n+1}|$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

(1) Montrer que F n'est pas une chaîne de Markov.

(2) On pose $X_n := (F_n, F_{n+1})$. Montrer que X est une chaîne de Markov.

(3) Calculer la probabilité avec laquelle F atteint 3 avant de repasser par 0.

(4) Dessiner le début du flot de transition de X. En déduire que la probabilité pour que X passe par $(1,1)$ en partant de $(1,2)$ vaut $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$.

(5) En déduire que X est transient et que F_n tend vers l'infini presque sûrement.

13.1.2 Solution

(1) Intuitivement, il est clair que F n'est pas une chaîne de Markov puisque la position au temps n dépend des deux positions précédentes. Il faut néammoins démontrer ce résultat rigoureusement, et en particulier n'utiliser que des suites d'états réalisables.

Notons S (comme « somme ») le choix $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ et D (comme « différence ») le choix $F_{n+1} = |F_n - F_{n-1}|$ à l'instant $n \geqslant 2$ (puisque $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$ sont imposés). Les valeurs $(0,1)$ et $(2,1)$ de (F_3, F_4) sont réalisables par les choix DD et SD respectivement et aboutissent toutes deux à $F_4 = 1$, mais dans le premier cas $F_5 = 1$ presque sûrement et dans le second cas, F_5 vaut 1 ou 3 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Les lois δ_1 et $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$ ne sont pas égales donc F n'est pas une chaîne de Markov (d'ordre 1).

(2) Quant à X, on peut réaliser cette suite en posant $X_0 := (F_0, F_1) = (0,1)$, puis, pour tout $n \geqslant 1$, $X_{n+1} := U(X_n, Y_n)$, pour une suite i.i.d. $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de loi de Bernoulli symétrique sur $\{\pm 1\}$, avec par exemple

$$U(a,b,+1) := (b, a+b), \quad U(a,b,-1) := (b, |b-a|).$$

D'après le théorème de représentation, ceci prouve que X est une chaîne de Markov.

Désormais on abrège (a,b) en ab, si besoin est.

(3) Comme $X_1 = 11$ presque sûrement, la question concerne la marche au hasard sur un graphe orienté fini. Les états sont 10, 11, 12, 21 et 3, où 3 est un état combiné qui représente 23 et 13. Si u_x est la probabilité de gagner en partant de x, on cherche u_{11} en sachant que $u_{10} = 0$, $u_3 = 1$ et

$$u_{11} = \tfrac{1}{2}u_{12}, \quad u_{12} = \tfrac{1}{2}(1 + u_{21}), \quad u_{21} = \tfrac{1}{2}(1 + u_{11}),$$

ce qui fournit la valeur $u_{11} = \frac{3}{7}$.

(4) Le graphe des transitions de X se compose d'un premier triangle orienté $(01, 11, 10)$ représentant les transitions $01 \to 11 \to 10 \to 01$ et d'un graphe G relié à ce premier triangle par le sommet 11, ce graphe G étant luimême composé du triangle orienté $(11, 12, 21)$ représentant les transitions

$11 \to 12 \to 21 \to 11$ et de deux graphes G_1 et G_2 attachés à 12 et 21 respectivement. Il se trouve que les graphes orientés G_1 et G_2 sont des copies disjointes du graphe orienté G.

Pour le montrer, on peut commencer par repérer tout sommet de G par un mot fini dans l'alphabet $\{S, D\}$, construit en reprenant l'idée de la question (1) comme suit. Les successeurs d'un sommet ab sont bc et bd avec $s := a+b$ et $d := |b-a|$. Appelons l'arête (ab, bs) une arête de type S, et l'arête (ab, bd) une arête de type D. Un label d'un sommet est une suite de labels des arêtes sur un chemin reliant 11 à ce sommet. Des labels des premiers sommets sont $11 = \emptyset$, $12 = S$, $21 = SD$, $23 = SS$, $31 = SSD$, $13 = SDS$. Si on simplifie le sous-mot SDD dès que possible, on obtient un mot non vide en S et D qui commence par S et qui ne comprend pas le sous-mot DD. Appelons label réduit d'un sommet de $G_1 \cup G_2$ tout mot vérifiant ces propriétés.

Pour montrer que G_1 et G_2 sont des copies disjointes de G, il suffit alors de montrer que le label réduit de tout sommet de $G_1 \cup G_2$ est unique puisqu'alors les bijections entre G_1, G_2 et G deviennent évidentes (voir plus bas). Pour ce faire, on remarque que si $a < b$, alors $ab = xS$ avec $x := (b-a, a)$ et si $a > b$, alors $ab = xSD$ avec $x := (b, a-b)$.

Il se trouve que l'espace des états de X est l'ensemble $\mathcal{X}$ des couples (a, b) d'entiers positifs ou nuls premiers entre eux (en particulier, si $a = 0$ alors $b = 1$ et si $b = 0$ alors $a = 1$). En effet, $X_0 = (0, 1)$ appartient à $\mathcal{X}$ et si (a, b) appartient à $\mathcal{X}$, alors $(b, a+b)$ et $(b, |b-a|)$ aussi, donc $\mathcal{X}$ contient l'espace des états de X. De plus, si la transition de x vers y pour X en un pas n'est pas nulle, celle de y vers x en deux pas n'est pas nulle non plus puisque les cycles élémentaires en triangle (x, xS, xSD) permettent de remonter le courant. Il suffit donc de montrer que tout sommet de $\mathcal{X}$ communique avec 11 : or c'est l'algorithme d'Euclide !

En détail, on construit le chemin d'un sommet ab de $G_1 \cup G_2$ vers 11 comme suit. On sait que $a \neq b$ puisque les seuls sommets tels que $a = b$ sont 10, 01 et 11. Si $a > b$, alors $ab = xSD$ avec $x := (b, a-b)$ donc on remplace ab par x et si $b > a$,alors $ab = xS$ avec $x := (b-a, a)$ donc on remplace ab par x, puis on recommence. Le long de cette trajectoire, on rencontre toutes les étapes de l'algorithme d'Euclide donc on termine par 11 et X est irréductible sur $\mathcal{X}$. De plus, si le dernier sommet rencontré avant 11 vaut 12, ab est dans G_1, et si le dernier sommet rencontré avant 11 vaut 21, ab appartient à G_2. Cela montre en particulier que G_1 et G_2 sont disjoints.

Les labels des sommets de G_1 commencent par SS et ceux des sommets de G_2 par SD. (On pourrait aussi représenter selon le même principe les sommets 01 et 10 qui ne sont pas dans G, par les labels $10 = D$ et $01 = DD$ ou $01 = DS$ mais nous n'en parlerons pas par la suite.) Enfin, $SSDx \mapsto SDx$ est une bijection de G_1 vers G_2 et les applications $x \mapsto Sx$ et $x \mapsto SDx$ sont des bijections de G vers G_1 et G_2, respectivement.

Si u_x désigne la probabilité de visiter 11 en partant d'un sommet x de $G_1 \cup G_2$, on cherche $u := u_{12}$. Il vient $u = \frac{1}{2}(u_{21} + u_{23})$, $u_{21} = \frac{1}{2}(1 + u_{13})$, $u_{23} = u^2$ et $u_{13} = uu_{21}$, donc

$$2u = 1/(2-u) + u^2,$$

soit $u = 1$ ou $u^2 - 3u + 1 = 0$. Donc $u = 1$ ou $u = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ puisque la solution $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ est strictement supérieure à 1.

Pour montrer que la bonne valeur est $u^* = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, et donc que X est transiente, on introduit pour tout $n \geqslant 1$ l'ensemble $\mathcal{X}_n$ des sommets de $G_1 \cup G_2$ qu'on atteint à partir de 11 en utilisant n fois le déplacement S. Soit $u_1 := 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, u_n la probabilité de visiter 11 avant le premier passage S_n par $\mathcal{X}_n$ en partant de 12.

Le premier pas de la marche issue de 12 peut être $12 \to 32$. Comme le graphe au dessus de 32 est isomorphe à celui au dessus de 12 et comme il faut repasser par 12 pour atteindre 11 en partant de 32,

$$\mathbb{P}_{32}(T_{11} < S_n) = \mathbb{P}_{12}(T_{11} < S_n)\mathbb{P}_{12}(T_{11} < S_{n-1}) = u_n u_{n-1}.$$

Si le premier pas de la marche est $12 \to 21$, on peut ensuite faire le pas $21 \to 11$ qui visite 11, ou le pas $21 \to 13$. Pour visiter 11 partant de 13, il faut d'abord revenir en 21, événement dont la probabilité est égale à celle de revenir en 11 en partant de 12, puis il faut revenir en 11 en partant de 21. Si on note $v_n = \mathbb{P}_{21}(T_{11} < S_n)$, il vient

$$2v_n = 1 + \mathbb{P}_{13}(T_{11} < S_n),$$

puis

$$\mathbb{P}_{13}(T_{11} < S_n) = \mathbb{P}_{13}(T_{21} < S_n)v_n = u_{n-1}v_n.$$

On en déduit

$$v_n = 1/(2 - u_{n-1}), \quad 2u_n = u_n u_{n-1} + v_n.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc déterminée par les conditions $u_1 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = \varphi(u_{n-1}), \qquad \varphi(w) := 1/(2-w)^2.$$

Il reste à tracer le diagramme de la fonction φ sur l'intervalle $[0,1]$ pour constater que $u_n \to u^* < 1$, donc que la marche X est transiente.

(5) Le problème de la transience de F est plus ardu que celui de la transience de X, résolu à la question précédente. En effet, pour tout $k \geqslant 1$, les sommets de G dont les deux coordonnées sont inférieures à k sont en nombre fini, donc pour tout n assez grand, $F_n \geqslant k$ ou $F_{n+1} \geqslant k$, presque sûrement. Ainsi, $F_{n+1} + F_n$ tend vers l'infini presque sûrement (et on peut soupçonner que c'est en fait ce résultat que les auteurs de l'énoncé avaient en tête).

Mais dans G, les deux sommets xS et xSD au dessus de $x = (a, b)$ valent $xS = (b, a + b)$ et $xSD = (a + b, a)$, donc il existe des sommets aussi loin que l'on veut dans le graphe et de la forme $(a, 1)$ par exemple. On n'a pas montré que les deux coordonnées F_n et F_{n+1} de X_n tendent vers l'infini.

Cependant, comme la marche X est transiente, la dernière visite T_n^* de $\mathcal{X}_n$ en partant de $X_1 = 11$ existe presque sûrement, pour tout $n \geqslant 1$. Les sommets X_n^* de ces dernières visites définissent une marche sur le graphe telle que $X_1^* = 11$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $X_{n+1}^* = X_n^* S$ ou $X_{n+1}^* = X_n^* SD$. En conditionnant par $X_n^* = x$, on sait que le sommet suivant visité par X est xS et que X n'utilisera plus l'arête (xSD, x). La probabilité pour que $X_{n+1}^* = X_n^* SD$ vaut donc

$$p^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - u^*)p^*.$$

Dans la somme du membre de droite, le terme $\frac{1}{2}$ correspond à une transition $xS \to xSD$ puisque tout retour vers xS est ensuite impossible. Le terme $\frac{1}{2}(1 - u^*)p^*$ correspond à une transition $xS \to xSS$, puis à un retour de xSS vers xS dans le graphe de racine xS, puis à la probabilité p^* que l'on recherche. Donc $p^* = 1/(1 + u^*)$ et X^* est une marche transiente sur G avec probabilités de transitions

$$p(x, xS) := 1 - p^*, \quad p(x, xSD) := p^*.$$

Si on considère $M(n) := \min\{F_n, F_{n+1}\}$ et $M_n^* := M(T_n^*)$, en utilisant le fait que $F_n \neq F_{n+1}$ dès que $X_n \neq 11$ appartient à G, on constate que $M_{n+1}^* \geqslant M_n^*$ presque sûrement et que $M_{n+1}^* \geqslant M_n^* + 1$ avec une probabilité au moins égale à $\min(p^*, 1 - p^*) = 1 - p^*$. Donc $M_n^* \geqslant (1 - p^*)n + o(n)$ presque sûrement, qui tend vers l'infini, cqfd.

13.1.3 Pour aller plus loin

On peut remarquer que $\mathbb{E}(F_n^2)$ est la suite de Fibonacci, donc $\mathbb{E}(F_n^2) \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\omega^n$ quand n devient grand, où $\omega := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ désigne le nombre d'or. Si on considère les suites définies par $Y_{n+1} := \pm Y_n \pm Y_{n-1}$ ou $Y_{n+1} := \pm Y_n + Y_{n-1}$ ou $Y_{n+1} := Y_n \pm Y_{n-1}$ en utilisant des signes $\pm$ i.i.d. Bernoulli symétriques et partant de $Y_0 := 0$ et $Y_1 := \pm 1$ ou $Y_1 := 1$, on peut montrer que $|Y_n|^{1/n} \to v$ presque sûrement avec $v := 1.13198824\ldots$ On aura remarqué que $|Y_n| = F_n$ en loi et que pourtant $\omega \neq v^2$ (même si bien sûr, pour ne pas embêter Messieurs Cauchy et Schwarz indûment, $v^2 < 1.3 < 1.6 < \omega$). Autrement dit, F_n est presque sûrement très petit devant $\sqrt{\mathbb{E}(F_n^2)}$.

Une façon d'expliquer ce phénomène est de considérer le processus

$$R_n := F_{n+1}/F_n, \quad n \geqslant 0,$$

à valeurs dans $[0, +\infty]$. On constate que R est une chaîne de Markov issue de $R_0 := +\infty$ telle que, conditionnellement à $R_n = r$, la loi de R_{n+1} est uniforme sur l'ensemble

$$\big\{1 + 1/r, |1 - 1/r|\big\},$$

avec les conventions usuelles pour les valeurs 0 et $+\infty$.

Supposons que R est récurrente positive au sens où la loi de R_n converge vers une distribution π sur $[0, +\infty]$. Si R satisfait à une loi des grands nombres affirmant que, pour tout intervalle B, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}\{R_k \in B\} \to \pi(B)$ presque sûrement, on peut espérer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log R_k \to \int \log(r)\, \pi(\mathrm{d}r)$ presque sûrement, ce qui signifierait exactement que $F_n^{1/n}$ converge vers

$$v := \exp\left(\int \log(r)\, \pi(\mathrm{d}r)\right).$$

Par convexité, $v^2 \leqslant \left(\displaystyle\int r\, \pi(\mathrm{d}r)\right)^2 \leqslant \displaystyle\int r^2\, \pi(\mathrm{d}r)$, et si π est une mesure de probabilité qui intègre r^2, la loi des grands nombres dont on a fait l'hypothèse plus haut donnerait $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 \to \int r^2\, \pi(\mathrm{d}r)$ presque sûrement, donc on peut se douter que $\displaystyle\int r^2\, \pi(\mathrm{d}r) = \omega$.

Tout ceci est vrai et peut se replacer dans le cadre plus général des produits de matrices aléatoires. En effet, si on pose $Z_n := (Y_n, Y_{n+1})^*$, on voit que $Z_{n+1} = A_{n+1} Z_n$ pour une suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ i.i.d. de matrices 2×2 distribuées comme A, avec par exemple

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc d'évaluer les coefficients de la matrice $B_n := A_n A_{n-1} \cdots A_1$ puis de l'appliquer au vecteur $Z_0 := (0, 1)^*$. On peut montrer que n'importe lequel des coefficients b_n de B_n vérifie

$$\frac{1}{n} \log |b_n| \to \gamma \quad \text{presque sûrement},$$

pour une constante γ déterministe dont on ne sait à peu près rien en général, mais qui dans le cas particulier des suites aléatoires de Fibonacci a été évaluée à une valeur telle que $\mathrm{e}^\gamma = 1.13198824\ldots$

Mathématiquement parlant, une situation beaucoup plus mystérieuse est celle de suites définies par $U_0 := 1$ puis, pour tout $n \geqslant 1$,

$$U_n := \pm U_{n-1} \pm U_{n-2} + \cdots \pm U_1 \pm U_0.$$

13.1.4 Références

Divakar Viswanath, *Random Fibonacci sequences and the number 1.131988-24...*, Math. Comput. 69, 1131-1155, 2000.

Ivars Peterson, *Stepping beyond Fibonacci numbers*, Science News, 2002 ; Vol. 162, No. 13. `www.sciencenews.org/articles/20020928/mathtrek.asp`

13.2 Sur un critère de dernière sortie

13.2.1 Énoncé

On considère une chaîne de Markov sur un espace d'états E, et F une partie de E. On suppose qu'il existe deux nombres réels a et b strictement positifs tels que, pour tout état x dans E, la probabilité que la chaîne partant de x visite F vaut au moins a et, pour tout état x dans F, la probabilité que la chaîne partant de x ne quitte jamais F vaut au moins b.

Montrer qu'il existe un instant aléatoire T presque sûrement fini tel que la position de la chaîne au temps n appartient à F, pour tout n supérieur à T.

Montrer par un exemple qu'aucune des hypothèses « la probabilité vaut toujours au moins a » et « la probabilité vaut toujours au moins b » ci-dessus ne peut être remplacée par l'hypothèse selon laquelle la probabilité correspondante est toujours strictement positive.

13.2.2 Solution

Montrons tout d'abord que la chaîne visite F presque sûrement. Pour tout sommet x dans E, il existe un entier n_x fini tel que la probabilité de visiter F avant le temps n_x est supérieure à $\frac{1}{2}a$. Notons $T_1 = n_x$ si x est la position initiale puis, pour tout $k \geqslant 1$, $T_{k+1} = T_k + n_y$ si y est la position au temps T_k. La propriété forte de Markov montre que la probabilité de ne pas avoir visité F avant le temps T_k est inférieure à $(1 - \frac{1}{2}a)^k$, qui est aussi petit que l'on veut, donc F est récurrent.

Une sortie de F est un temps $n \geqslant 1$ tel que la position de la chaîne est dans F au temps $n - 1$ mais pas au temps n. Comme F est récurrent, ou bien on finit par rester dans F, ou bien on sort une infinité de fois de F. En conditionnant par les positions hors de F occupées lors des sorties de F, on voit que la probabilité de sortir au moins k fois de F vaut au plus $(1 - b)^k$ donc le nombre total de sorties de F est presque sûrement fini et on finit par rester dans F.

Le premier exemple concerne l'arbre binaire complet E, tel que tous les sommets ont pour degré 3. On fixe une arête $\{x, y\}$ et on choisit pour F l'ensemble des sommets z tels que le chemin de z à x ne passe pas par y.

Pour la marche simple sur E, b vaut la probabilité de ne jamais passer par y en partant de x. Le réseau électrique équivalent $\{y, x, f\}$ représente le bord de F par un sommet f et alloue des conductances 1 aux deux arêtes $\{y, x\}$ et $\{x, f\}$, donc $b = \frac{1}{2}$. Partant d'un sommet z hors de F et à distance $n \geqslant 1$ de x, la probabilité de passer par F vaut la probabilité qu'une marche au hasard sur les entiers issue de n passe par 0 si les transitions valent $\frac{2}{3}$ de i à $i+1$ et $\frac{1}{3}$ de i à $i-1$, pour tout entier $i \geqslant 1$. Par le même calcul de conductance que précédemment, cette probabilité vaut $(\frac{1}{2})^n$, donc $a = 0$. Enfin, T est fini en partant de x si et seulement si on converge vers le bord de F, donc avec la probabilité que la marche sur le graphe linéaire $\{g, y, x, f\}$ passe par f en partant de x avant de passer par g si les conductances des arêtes $\{g, y\}$, $\{y, x\}$ et $\{x, f\}$ sont égales. Donc T est fini avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour notre deuxième exemple, notons E_n pour chaque entier $n \geqslant 1$ le graphe formé d'un arbre binaire infini à la racine duquel on a greffé un graphe linéaire de longueur $\ell_n \geqslant 1$. Appelons n l'unique feuille de E_n et relions les feuilles n et $n+1$ par une arête, pour chaque $n \geqslant 1$. Soit E le graphe obtenu, F le complémentaire dans E des sommets n, et considérons la marche au plus proche voisin sur E avec transitions uniformes entre les voisins, mais en interdisant les transitions $n \to n-1$. Ou bien on visite tous les sommets n et T est infini, ou bien on finit par rester dans un des arbres binaires et T est fini. Chaque arbre binaire entre sa racine et son bord est équivalent à une arête de conductance 1. Partant de n, la probabilité de ne pas atteindre $n+1$ vaut donc $1/(\ell_n + 2)$ et T est infini en partant du sommet 1 avec une probabilité égale au produit des $(\ell_n + 1)/(\ell_n + 2)$ pour $n \geqslant 1$. Ce produit est strictement positif si et seulement si la série de terme général $1/\ell_n$ diverge, auquel cas T n'est pas presque sûrement fini. De plus, à partir de chaque sommet n, on va en F en un pas avec probabilité $\frac{1}{2}$ donc $a \geqslant \frac{1}{2}$. Enfin, à partir du voisin m de n dans E_n, on quitte E_n avec la probabilité que la marche sur le graphe à trois points $\{n, m, e\}$ partant de m touche n avant e si les conductances de $\{n, m\}$ et de $\{m, e\}$ valent 1 et $1/\ell_n$, donc avec une probabilité $1/(\ell_n + 1)$, et $b = 0$ dès que la suite $(\ell_n)_n$ n'est pas bornée. Pour conclure, $\ell_n := n$ convient.

13.3 Bouts variés

14 Sujet d'examen du 17 janvier 2007

Durée 3 heures. Pas de documents.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. On portera la plus grande attention à la qualité de la rédaction.

On se donne un ensemble S non vide et une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur S, de noyau de transition p. Pour tout état x, $\mathbb{P}_x$ désigne la loi de la chaîne issue de $X_0 = x$ et T_x le premier temps de passage par x, c'est-à-dire

$$T_x = \inf\{n \geqslant 1\,;\, X_n = x\} \cup \{+\infty\}.$$

Exercice 1 (Questions de cours).

(a) Pour la marche au hasard simple symétrique au plus proche voisin sur $S = \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}_0[T_n]$ pour tout $n \geqslant 0$.

(b) Préciser si une chaîne de Markov réversible telle qu'il existe des états x et y tels que $\mathbb{E}_x[T_y]$ est fini est forcément récurrente, ou non.

(c) Donner un exemple de chaîne de Markov sur $S = \mathbb{N}$, qui n'est pas positivement récurrente et telle que $\mathbb{E}_n[T_0]$ est fini pour tout état $n \neq 0$.

(d) Donner un exemple de chaîne de Markov sur $S = \mathbb{N}$ telle que $\mathbb{E}_0[T_0]$ est fini et $\mathbb{E}_0[T_0^2]$ est infini.

(e) On suppose qu'il existe des états x et y tels que T_y est fini $\mathbb{P}_x$ presque sûrement et T_x est fini $\mathbb{P}_y$ presque sûrement. Montrer qu'alors, la chaîne de Markov est récurrente.

Exercice 2.

On munit l'ensemble $S = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ des arêtes $\{5, 1\}$ et $\{x, x + 1\}$ pour tout x dans S, et chacune de ces arêtes de la conductance 1. Calculer la conductance équivalente entre les sommets x et y du graphe obtenu et en déduire la probabilité que la marche au hasard simple sur S issue de x repasse par x avant de passer par y, dans les deux cas suivants :

(a) $x = 0$ et $y = 3$. **(b)** $x = 1$ et $y = 3$.

Exercice 3.

(a) Déterminer si la marche au hasard simple au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}^2$ est récurrente ou transiente.

(b) Même question qu'au (a), pour la marche au hasard simple au plus proche voisin sur le graphe $S = \{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3\,;\, |k| \leqslant \log(5 + |i| + |j|)\}$.

Exercice 4.

On construit les probabilités de transition d'une chaîne de Markov sur le graphe $S = \mathbb{N}$ muni de ses arêtes habituelles comme suit. On fixe un paramètre p dans l'intervalle $]0, 1[$, que l'on appelle la *porosité* du modèle. Le sommet 0 est une *barrière*. Chaque sommet $n \neq 0$ est un *site poreux* ou une *barrière* avec probabilité p ou $1-p$ respectivement, indépendamment du choix fait pour les autres sommets. Si n est une barrière, $p(n, n+1) = 1$ et si n est un site poreux, $p(n, n+1) = p(n, n-1) = \frac{1}{2}$. On note P la mesure qui décrit l'aléa donnant le type de chacun des sommets et $\mathbb{P}_n$ la mesure qui décrit l'aléa donnant la trajectoire de la chaîne de Markov issue de n. Enfin, pour tout $k \geqslant 0$, on note B_k la position de la barrière numéro k.

(a) Donner la loi de B_1 sous P, puis décrire simplement la loi du processus $(B_k)_{k\geqslant 0}$ sous P.

(b) Montrer que $\mathbb{E}_0[T_n/n]$ admet P presque sûrement une limite strictement positive et calculer sa valeur t (on appelle $1/t$ la vitesse de fuite en moyenne).

Indication : on pourra d'abord fixer la position de toutes les barrières et estimer la moyenne sous $\mathbb{P}_0$ du temps d'atteinte de la $n$ème barrière pour n grand.

(c) (Question subsidiaire) Montrer que T_n/n converge $P \otimes \mathbb{P}_0$ presque sûrement vers t (donc $1/t$ est aussi la vitesse de fuite presque sûre pour presque toute réalisation de l'ensemble des barrières).

Exercice 5.

Soit A l'arbre construit en remplaçant chaque arête de l'arbre binaire située à une distance $n \geqslant 0$ de la racine par $\ell(n) \geqslant 1$ arêtes disposées en série.

(a) Déterminer les suites $(\ell(n))_{n\geqslant 0}$ telles que la marche au hasard simple au plus proche voisin sur A est récurrente positive, récurrente nulle ou transiente.

(b) Rappeler une définition de la marche au hasard au plus proche voisin sur A de dérive $\lambda > 0$.

(c) Déterminer les valeurs du paramètre λ telles que la marche au hasard au plus proche voisin sur A de dérive λ est récurrente, respectivement transiente.

On pourra chercher une condition générale sur le paramètre λ, suffisamment précise pour en déduire les résultats suivants.

> **(i)** Si $\lambda < 1$, la marche au hasard est transiente.
>
> **(ii)** Si $\lambda > 1$ et $\ell(n) \to \infty$, la marche au hasard est récurrente.
>
> **(iii)** Si $\ell(n) = d$ est constante, on montrera l'existence d'une valeur critique $\lambda_c(d)$ que l'on calculera, telle que la marche au hasard est transiente pour tout $\lambda < \lambda_c(d)$ et récurrente positive pour tout $\lambda > \lambda_c(d)$.
>
> **(iv)** Enfin, si $\ell(n) = d$ est constante et $\lambda = \lambda_c(d)$, on précisera si la marche au hasard est transiente ou récurrente nulle ou récurrente positive.