Cours de Probabilités

expérimenté par Didier Piau

Compléments, exercices et sujets d'examens

Dernière révision substantielle : mars 2010

Table des matières

1 Présentation **5**

1.1 En guise d'introduction . . . 5

1.2 Programme . . . 6

1.3 Questions à la noix . . . 7

1.4 Measure for measure–The strange science of Francis Galton . . . 8

2 Compléments **15**

2.1 Sur le rayon de convergence des séries entières aléatoires . . . 15

2.2 Sur le maximum de variables aléatoires . . . 16

2.3 Une autre version de la loi des grands nombres . . . 17

2.4 Loi des grands nombres échangeable . . . 19

2.5 Encore de l'échangeabilité . . . 20

2.6 Sur quelques notions de convergence . . . 22

2.7 Sur la famille de fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|^\alpha}$ . . . 23

3 Exercices **27**

3.1 Fiche 1 : Outils probabilistes . . . 27

3.2 Fiche 2 : Outils probabilistes, suite . . . 32

3.3 Fiche 3 : Lois des grands nombres . . . 35

3.4 Fiche 4 : Convergence en loi . . . 40

4 Archives d'examens **45**

4.1 Examen partiel d'avril 1992 . . . 45

4.2 Examen partiel d'avril 1993 . . . 47

4.3 Examen final de juin 1993 . . . 48

4.4 Examen partiel d'avril 1994 . . . 49

4.5 Devoir à la maison de mars 1994 . . . 51

4.6 Examen final de juin 1994 . . . 52

4.7 Devoir à la maison d'avril 1995 . . . 54

4.8 Examen partiel de mars 1995 57
4.9 Examen final de juin 1995 59
4.10 Examen partiel d'avril 1996 60
4.11 Corrigé de l'examen partiel d'avril 1996 62
4.12 Examen final de juin 1996 64
4.13 Supplément à l'examen de juin 1996 66
4.14 Examen partiel d'avril 1997 66
4.15 Examen final de juin 1997 68
4.16 Session de septembre 1997 70
4.17 Examen partiel de mars 1998 71
4.18 Corrigé de l'examen partiel de mars 1998 73
4.19 Examen final de mai 1998 74
4.20 Devoir à la maison de mars 1999 75
4.21 Examen partiel de mars 1999 77
4.22 Examen final de mai 1999 78
4.23 Examen partiel de mars 2000 (extrait) 80
4.24 Examen final de mai 2000 81
4.25 Suppléments à l'examen de mai 2000 82
4.26 Examen de septembre 2000 84
4.27 Contrôle continu d'avril 2006 85
4.28 Examen final de juin 2006 89

Chapitre 1

Présentation

1.1 En guise d'introduction

Voici une citation :

> Probability theory has a right and a left hand. On the right is the rigorous foundational work using the tools of measure theory. The left hand "thinks probabilistically," reduces problems to gambling situations, coin–tossing, motions of a physical particle. — *Leo Breiman.*

Voici trois questions :

1. Vous installez un singe devant une machine à écrire. Le singe se met à taper sur les touches « au hasard ». Réussira-t-il après un certain temps à écrire cette page ?
2. Vous jetez une punaise en l'air. Une fois qu'elle est retombée, vous appelez $\perp$ le fait qu'elle repose sur la tête, la pointe en l'air, et $\dashv$ le fait qu'elle repose à la fois sur la pointe et sur la tête. Vous répétez l'expérience un grand nombre de fois. La proportion des $\perp$ va-t-elle se stabiliser vers une « probabilité » $\mathbb{P}(\perp)$?
3. Vous êtes perdu dans Lyon. Êtes-vous sûr de retrouver la place Bellecour en vous promenant "au hasard" dans les rues pendant assez longtemps, sans sortir des limites administratives de la Courly ? Et si vous vous permettez d'en sortir ?

En 1933, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (Андрей Николаевич Колмогоров pour les puristes) publie les *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (eh oui, ce cher Andrei ne se privait pas d'écrire en allemand de temps en temps, ni en français d'ailleurs), où il fournit un cadre mathématique naturel commun à tous ces problèmes.

Aujourd'hui, les probabilités constituent un champ autonome et étendu de recherches, qui féconde et est fécondé par de nombreux domaines des mathématiques (comme l'analyse, la géométrie, la théorie des nombres), de la physique (comme la mécanique stochastique) et de la biologie (comme la génomique).

Un des buts du cours sera d'acquérir rapidement l'agilité de la main gauche décrite par Leo Breiman, sans négliger celle de la main droite. Une référence suffisante pour cette dernière est un cours d'intégration de L3 ou bien simplement le premier chapitre du livre de Walter Rudin, *Real and Complex Analysis.*

Les résultats classiques qui seront démontrés, loi du zéro–un, loi des grands nombres, théorème central limite, permettront de constater que la réponse à la question 3 est « oui » (c'est rassurant), mais qu'elle serait « non » si vous pouviez voler (ce qui l'est moins).

1.2 Programme

Notions et outils fondamentaux de la théorie des probabilités

1. Rappels et notations – Classe monotone : définition. Théorème de la classe monotone. Corollaire : une probabilité est déterminée par ses valeurs sur un π-système.
2. Exemples de probabilités classiques
3. Fonctions de répartition et Radon-Nykodym
4. Variables aléatoires, loi, espérance – Définitions. Toute variable aléatoire X-mesurable s'écrit comme une fonction borélienne de X. Inégalité de Hölder. Inégalité de Markov.
5. Indépendance – Définition de l'indépendance de classes ; application à l'indépendance d'événements, de tribus, de variables aléatoires. Critère sur les π-systèmes. Théorème des coalitions. Loi de n variables aléatoires indépendantes, covariance, loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes.
6. Loi du 0–1 et lemme de Borel-Cantelli
7. Probabilités sur un espace produit – Cas indépendant : tribu cylindrique et théorème. Cas général sur $\mathbb{R}^I$: théorème de Kolmogorov.
8. Convergence d'une suite de variables aléatoires. – Egorov ; convergence en proba (P). Cv L^p ou cv p.s. implique cv P. Distance de la convergence en P. Cv P implique cv p.s. pour une sous-suite. Famille uniformément intégrable. Vitali. Critères d'u.i.

Lois des grands nombres

1. Rappels sur la convergence p.s. – Caractérisations ; cv P implique cv p.s. pour une sous-suite.
2. Convergence p.s. d'une série de v.a. indépendante – Loi du 0–1. Equivalence de P. Lévy entre cv P et cv p.s. Les trois séries.
3. Lois des grands nombres – Cas borné dans L^2. Inégalité de Kolmogorov. LGN avec condition de Kolmogorov. LGN i.d. dans L^1.
4. Applications statistiques – Moyenne empirique, variance empirique, médians, méthodes de Monte Carlo, Glivenko-Cantelli, Kolmogorov-Smirnov, maximum de vraisemblance, statistiques d'ordre et de rang.
5. Appendice : une LGN échangeable d'après L. Pratelli

Probabilité conditionnelle et espérance conditionnelle

1. Probabilité conditionnelle – Cas discret. Cas général. Version régulière. Un contrexemple. Jirina. Polonais implique standard.
2. Espérance conditionnelle – Définitions. Propriétés. $\mathbb{E}(\ |\mathcal{F})$ dans L^2 est une projection.
3. Conditionnement : Définition. Le cas densitable.
4. Cas Gaussien : inégalité de Gebelein.
5. Files d'attente. Processus de Poisson. Processus de vie et mort. Loi de Little

Fonctions caractéristiques et convergence en loi

1. Fonctions caractéristiques – Propriétés générales : densité, moments. Cas $\mathbb{R}^n$ et application à n variables aléatoires indépendantes.
2. Convergence en loi – Cv faible = cv étroite. Caractérisations. Cas de $\mathbb{R}$ et des fonctions de répartition. Helly.

3. Théorème de Lévy. Lien entre cv P et cv en loi. TCL. Corollaire : de Moivre Laplace. Utilisation statistique.
4. Vecteurs gaussiens et TCL multidimensionnel

Appendices

Loi du χ_2 et échantillonnage. Bochner. TCL de Lyapounov. TCL de Lindeberg-Feller. Berry-Esseen. TCL local. Introduction à la théorie des martingales.

Bibliographie sommaire

Pour le cours
- Dacunha-Castelle et Duflo, Probabilités et Statistiques, tome 1 : problèmes à temps fixe, Masson 1982.
- Breiman, Probability, Addison-Wesley, 1968.
- Chung, A course in probability theory, Academic Press 1974.
- Billingsley, Probability and measure, Wiley Series 1979.
- Métivier et Neveu, Probabilités, Cours de l'Ecole Polytechnique, 1980.

Pour les exercices
- Cotrell, Duhamel et Genon-Cathalot, Exercices de Probabilités, Belin 1980.

1.3 Questions à la noix

Anniversaires Combien de personnes doivent-elles aller à une soirée pour qu'il y ait au moins 50% de chances que deux d'entre elles soient nées le même jour de l'année ?

Bororos On suppose qu'une femme enceinte a autant de chances de donner naissance à un garçon qu'à une fille. On suppose que dans la (grande) tribu des Bororos, chaque famille continue à avoir des enfants jusqu'à avoir une fille, et qu'elle s'arrête alors. Après mille générations, quelle est la proportion de Bororos mâles ?

Hôpital Dans une ville, il y a deux hôpitaux, un grand et un petit. Chaque jour, mille enfants naissent dans le grand, cent dans le petit. Chaque naissance donne une fille ou un garçon avec 50% de chances. Quel hôpital a le plus de chances de vois naître exactement le même nombre de garçons que de filles un jour donné ?

Pacifistes et militaires Vous pénétrez dans une ville peuplée de P pacifistes et de M militaires. Quand un pacifiste rencontre un pacifiste, rien ne se passe. Quand un pacifiste rencontre un militaire, le pacifiste est tué. Quand deux militaires se rencontrent, les deux meurent. Une rencontre implique toujours deux personnes exactement et les personnes impliquées sont aléatoires. Quelles sont vos chances de survie ?

Pièces Comment transformer une pièce de monnaie biaisée en une pièce de monnaie non biaisée ? Ou : comment obtenir l'équivalent du résultat du jet d'une pièce de monnaie équitable en lançant, éventuellement plusieurs fois, une pièce non équitable ?

Roulette russe Vous jouez à la roulette russe avec Boris. Le revolver comporte trois balles dans trois compartiments successifs parmi les six que son barillet comporte. On lance une fois le barillet. Puis chaque joueur pointe le revolver et tire une fois. S'il est toujours vivant, il passe alors le revolver à son adversaire qui l'imite. Le jeu s'arrête quand un des joueurs meurt. Préférez-vous être le premier joueur ou laisser Boris commencer ? Et si le revolver ne contenait que deux balles au début des opérations ?

1.4 Measure for measure–The strange science of Francis Galton

Jim Holt, *The New Yorker*, Janvier 2005, disponible sur le web à l'adresse :
`www.newyorker.com/printable/?critics/050124crbo_books`

In the eighteen-eighties, residents of cities across Britain might have noticed an aged, bald, bewhiskered gentleman sedulously eying every girl he passed on the street while manipulating something in his pocket. What they were seeing was not lechery in action but science. Concealed in the man's pocket was a device he called a "pricker," which consisted of a needle mounted on a thimble and a cross-shaped piece of paper. By pricking holes in different parts of the paper, he could surreptitiously record his rating of female passerby's appearance, on a scale ranging from attractive to repellent. After many months of wielding his pricker and tallying the results, he drew a "beauty map" of the British Isles. London proved the epicenter of beauty, Aberdeen of its opposite

Such research was entirely congenial to Francis Galton, a man who took as his motto "Whenever you can, count." Galton was one of the great Victorian innovators. He explored unknown regions of Africa. He pioneered the fields of weather forecasting and fingerprinting. He discovered statistical rules that revolutionized the methodology of science. Yet today he is most often remembered for an achievement that puts him in a decidedly sinister light : he was the father of eugenics, the science, or pseudoscience, of "improving" the human race by selective breeding.

A new biography, *Extreme Measures : The Dark Visions and Bright Ideas of Francis Galton*, Bloomsbury, $ 24.95, casts the man's sinister aspect right in the title. The author, Martin Brookes, is a former evolutionary biologist who worked at University College London's Galton Laboratory (which, before a sanitizing name change in 1965, was the Galton Laboratory of National Eugenics). Brookes is clearly impressed by the exuberance of Galton's curiosity and the range of his achievement. Still, he cannot help finding Galton a little dotty, a man gripped by an obsession with counting and measuring that made him "one of the Victorian era's chief exponents of the scientific folly." If Brookes is right, Galton was led astray not merely by Victorian prejudice but by a failure to understand the very statistical ideas that he had conceived.

Born in 1822 into a wealthy and distinguished Quaker family—his maternal grandfather was Erasmus Darwin, a revered physician and botanist who wrote poetry about the sex lives of plants—Galton enjoyed a pampered upbringing. As a child, he revelled in his own precocity : "I am four years old and can read any English book. I can say all the Latin Substantives and Adjectives and active verbs besides 52 lines of Latin poetry. I can cast up any sum in addition and multiply by 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10. I can also say the pence table. I read French a little and I know the Clock." When Galton was sixteen, his father decided that he should pursue a medical career, as his grandfather had. He was sent to train in a hospital, but was put off by the screams of unanesthetized patients on the operating table. Seeking guidance from his cousin Charles Darwin, who had just returned from his voyage on the HMS Beagle, Galton was advised to "read Mathematics like a house on fire." So he enrolled at Cambridge, where, despite his invention of a "gumption-reviver machine" that dripped water on his head, he promptly suffered a breakdown from overwork.

This pattern of frantic intellectual activity followed by nervous collapse continued throughout

Galton's life. His need to earn a living, though, ended when he was twenty-two, with the death of his father. Now in possession of a handsome inheritance, he took up a life of sporting hedonism. In 1845, he went on a hippo-shooting expedition down the Nile, then trekked by camel across the Nubian Desert. He taught himself Arabic and apparently caught a venereal disease from a prostitute–which, his biographer speculates, may account for a noticeable cooling in the young man's ardor for women.

The world still contained vast uncharted areas, and exploring them seemed an apt vocation to this rich Victorian bachelor. In 1850, Galton sailed to Southern Africa and ventured into parts of the interior never before seen by a white man. Before setting out, he purchased a theatrical crown in Drury Lane which he planned to place "on the head of the greatest or most distant potentate I should meet with." The story of his thousand-mile journey through the bush is grippingly told in this biography. Improvising survival tactics as he went along, he contended with searing heat, scarce water, tribal warfare, marauding lions, shattered axles, dodgy guides, and native helpers whose conflicting dietary superstitions made it impossible to settle on a commonly agreeable meal from the caravan's mobile larder of sheep and oxen. He became adept in the use of the sextant, at one point using it to measure from afar the curves of an especially buxom native woman–"Venus among Hottentots." The climax of the journey was his encounter with King Nangoro, a tribal ruler locally reputed to be "the fattest man in the world." Nangoro was fascinated by the Englishman's white skin and straight hair, and moderately pleased when the tacky stage crown was placed on his head. But when the King dispatched his niece, smeared in butter and red ochre, to his guest's tent to serve as a wife for the night, Galton, wearing his one clean suit of white linen, found the naked princess "as capable of leaving a mark on anything she touched as a well-inked printer's roller. . . so I had her ejected with scant ceremony."

Galton's feats made him famous : on his return to England, the thirty-year-old explorer was celebrated in the newspapers and awarded a gold medal by the Royal Geographical Society. After writing a best-selling book on how to survive in the African bush, he decided that he had had enough of the adventurer's life. He married a rather plain woman from an intellectually illustrious family, with whom he never succeeded in having children, and settled down in South Kensington to a life of scientific dilettantism. His true métier, he had always felt, was measurement. In pursuit of it, he conducted elaborate experiments in the science of tea-making, deriving equations for brewing the perfect cup. Eventually, his interest hit on something that was actually important : the weather. Meteorology could barely be called a science in those days ; the forecasting efforts of the British government's first chief weatherman met with such ridicule that he ended up slitting his throat. Taking the initiative, Galton solicited reports of conditions all over Europe and then created the prototype of the modern weather map. He also discovered a weather pattern that he called the "anti-cyclone"–better known today as the high-pressure system.

Galton might have puttered along for the rest of his life as a minor gentleman scientist had it not been for a dramatic event : the publication of Darwin's "On the Origin of Species," in 1859. Reading his cousin's book, Galton was filled with a sense of clarity and purpose. One thing in it struck him with special force : to illustrate how natural selection shaped species, Darwin cited the breeding of domesticated plants and animals by farmers to produce better strains. Perhaps, Galton concluded, human evolution could be guided in the same way. But where Darwin had thought mainly about the evolution of physical features, like wings and eyes, Galton applied the same hereditary logic to mental attributes, like talent and virtue. "If a twentieth part of the cost and pains were spent in measures for the improvement of the human race that is spent on the improvements of the breed of horses and cattle, what a galaxy of genius might we not create !" he wrote in an 1864 magazine article, his opening eugenics salvo. It was two decades later that he coined the word "eugenics," from the Greek for "wellborn."

Galton also originated the phrase "nature versus nurture," which still reverberates in debates today. (It was probably suggested by Shakespeare's *The Tempest*, in which Prospero laments that his slave Caliban is “A devil, a born devil, on whose nature / Nurture can never stick.”) At Cambridge, Galton had noticed that the top students had relatives who had also excelled there ; surely, he reasoned, such family success was not a matter of chance. His hunch was strengthened during his travels, which gave him a vivid sense of what he called “the mental peculiarities of different races.” Galton made an honest effort to justify his belief in nature over nurture with hard evidence. In his 1869 book “Hereditary Genius,” he assembled long lists of “eminent” men–judges, poets, scientists, even oarsmen and wrestlers–to show that excellence ran in families. To counter the objection that social advantages rather than biology might be behind this, he used the adopted sons of Popes as a kind of control group. His case elicited skeptical reviews, but it impressed Darwin. “You have made a convert of an opponent in one sense,” he wrote to Galton, “for I have always maintained that, excepting fools, men did not differ much in intellect, only in zeal and hard work.” Yet Galton’s labors had hardly begun. If his eugenic utopia was to be a practical possibility, he needed to know more about how heredity worked. His belief in eugenics thus led him to try to discover the laws of inheritance. And that, in turn, led him to statistics.

Statistics at that time was a dreary welter of population numbers, trade figures, and the like. It was devoid of mathematical interest save for a single concept : the bell curve. The bell curve was first observed when eighteenth-century astronomers noticed that th errors in their measurements of the positions of planets and other heavenly bodies tended to cluster symmetrically around the tru value. A graph of the errors had the shape of a bell. In the early nineteenth century, a Belgian astronomer named Adolph Quetele observed that this “law of error” also applied to many human phenomena. Gathering information on the chest sizes of more than five thousand Scottish soldiers, for example, Quetelet found that the data traced a bell-shaped curve centered on the average chest size, about forty inches

As a matter of mathematics, the bell curve is guaranteed to arise whenever some variable (like human height) is determined by lots of little causes (like genes, health, and diet) operating more or less independently. For Quetelet, the bell curve represented accidental deviations from an ideal he called *l’homme moyen*the average man. When Galton stumbled upon Quetelet’s work, however, he exultantly saw the bell curve in a new light : what it described was not accidents to be overlooked but differences that revealed the variability on which evolution depended. His quest for the laws that governed how these differences were transmitted from one generation to the next led to what Brookes justly calls “two of Galton’s greatest gifts to science” : regression and correlation.

Although Galton was more interested in the inheritance of mental abilities, he knew that they would be hard to measure. So he focussed on physical traits, like height. The only rule of heredity known at the time was the vague “Like begets like.” Tall parents tend to have tall children, while short parents tend to have short children. But individual cases were unpredictable. Hoping to find some larger pattern, in 1884 Galton set up an “anthropometric laboratory” in London. Drawn by his fame, thousands of people streamed in and submitted to measurement of their height, weight, reaction time, pulling strength, color perception, and so on. Among the visitors was William Gladstone, the Prime Minister. “Mr. Gladstone was amusingly insistent about the size of his head. . . but after all it was not so very large in circumference,” noted Galton, who took pride in his own massive bald dome.

After obtaining height data from two hundred and five pairs of parents and nine hundred and twenty-eight of their adult children, Galton plotted the points on a graph, with the parents’ heights represented on one axis and the children’s on the other. He then pencilled a straight line though the cloud of points to capture the trend it represented. The slope of this line turned out to be two-thirds. What this meant was that exceptionally tall (or short) parents had children who, on average, were only two-thirds as exceptional as they were. In other words, when it came to height children tended to be less exceptional than their parents. The same, he had noticed years earlier, seemed to be true in the case of "eminence" : the children of J.S. Bach, for example, may have been more musically distinguished than average, but they were less distinguished than their father. Galton called this phenomenon "regression toward mediocrity." Regression analysis furnished a way of predicting one thing (a child's height) from another (its parents') when the two things were fuzzily related. Galton went on to develop a measure of the strength of such fuzzy relationships, one that could be applied even when the things related were different in kind—like rainfall and crop yield. He called this more general technique "correlation."

The result was a major conceptual breakthrough. Until then, science had pretty much been limited to deterministic laws of cause and effect–which are hard to find in the biological world, where multiple causes often blend together in a messy way. Thanks to Galton, statistical laws gained respectability in science. His discovery of regression toward mediocrity–or regression to the mean, as it is now called–has resonated even more widely. Yet, as straightforward as it seems, the idea has been a snare even for the sophisticated. The common misconception is that it implies convergence over time. If very tall parents tend to have somewhat shorter children, and very short parents tend to have somewhat taller children, doesn't that mean that eventually everyone should be the same height ? No, because regression works backward as well as forward in time : very tall children tend to have somewhat shorter parents, and very short children tend to have somewhat taller parents. The key to understanding this seeming paradox is that regression to the mean arises when enduring factors (which might be called "skill") mix causally with transient factors (which might be called "luck"). Take the case of sports, where regression to the mean is often mistaken for choking or slumping. Major-league baseball players who managed to bat better than .300 last season did so through a combination of skill and luck. Some of them are truly great players who had a so-so year, but the majority are merely good players who had a lucky year. There is no reason that the latter group should be equally lucky this year ; that is why around eighty per cent of them will see their batting average decline.

To mistake regression for a real force that causes talent or quality to dissipate over time, as so many have, is to commit what has been called "Galton's fallacy." In 1933, a Northwestern University professor named Horace Secrist produced a book-length example of the fallacy in "The Triumph of Mediocrity in Business," in which he argued that, since highly profitable firms tend to become less profitable, and highly unprofitable ones tend to become less unprofitable, all firms will soon be mediocre. A few decades ago, the Israeli Air Force came to the conclusion that blame must be more effective than praise in motivating pilots, since poorly performing pilots who were criticized subsequently made better landings, whereas high performers who were praised made worse ones. (It is a sobering thought that we might generally tend to overrate censure and underrate praise because of the regression fallacy.) More recently, an editorialist for the Times erroneously argued that the regression effect alone would insure that racial differences in I.Q. would disappear over time.

Did Galton himself commit Galton's fallacy ? Brookes insists that he did. "Galton completely misread his results on regression," he argues, and wrongly believed that human heights tended "to become more average with each generation." Even worse, Brookes claims, Galton's muddleheadedness about regression led him to reject the Darwinian view of evolution, and to adopt a more extreme and unsavory version of eugenics. Suppose regression really did act as a sort of gravity, always pulling individuals back toward the average. Then it would seem to follow that evolution could not take place through a gradual series of small changes, as Darwin envisaged. It would require large, discontinuous changes that are somehow immune from regression to the mean. Such leaps, Galton thought, would result in the appearance of strikingly novel organisms, or "sports of nature," that would shift the entire bell curve of ability. And if eugenics was to have any chance of success, it would have to work the same way as evolution. In other words, these sports of nature would have to be enlisted to create a new breed. Only then could regression be overcome and progress be made.

In telling this story, Brookes makes his subject out to be more confused than he actually was.

It took Galton nearly two decades to work out the subtleties of regression, an achievement that, according to Stephen M. Stigler, a statistician at the University of Chicago, "should rank with the greatest individual events in the history of science–at a level with William Harvey's discovery of the circulation of blood and with Isaac Newton's of the separation of light." By 1889, when Galton published his most influential book, "Natural Inheritance," his grasp of it was nearly complete. He knew that regression had nothing special to do with life or heredity. He knew that it was independent of the passage of time. Regression to the mean held even between brothers, he observed ; exceptionally tall men tend to have brothers who are somewhat less tall. In fact, as Galton was able to show by a neat geometric argument, regression is a matter of pure mathematics, not an empirical force. Lest there be any doubt, he disguised the case of hereditary height as a problem in mechanics and sent it to a mathematician at Cambridge, who, to Galton's delight, confirmed his finding.

Even as he laid the foundations for the statistical study of human heredity, Galton continued to pursue many other intellectual interests, some important, some merely eccentric. He invented a pair of submarine spectacles that permitted him to read while submerged in his bath, and stirred up controversy by using statistics to investigate the efficacy of prayer. (Petitions to God, he concluded, were powerless to protect people from sickness.) Prompted by a near-approach of the planet Mars to Earth, he devised a celestial signalling system to permit communication with Martians. More usefully, he put the nascent practice of fingerprinting on a rigorous basis by classifying patterns and proving that no two fingerprints were exactly the same–a great step forward for Victorian police work.

Galton remained restlessly active through the turn of the century. In 1900, eugenics received a big boost in prestige when Gregor Mendel's work on heredity in peas came to light. Suddenly, hereditary determinism was the scientific fashion. Although Galton was now plagued by deafness and asthma (which he treated by smoking hashish), he gave a major address on eugenics in 1904. "What nature does blindly, slowly, and ruthlessly, man may do providently, quickly, and kindly," he declared. An international eugenics movement was springing up, and Galton was hailed as its hero. In 1909, he was honored with a knighthood. Two years later, at the age of eighty-eight, he died.

In his long career, Galton didn't come close to proving the central axiom of eugenics : that, when it comes to talent and virtue, nature dominates nurture. Yet he never doubted its truth, and many scientists came to share his conviction. Darwin himself, in "The Descent of Man," wrote, "We now know, through the admirable labours of Mr. Galton, that genius... tends to be inherited." Given this axiom, there are two ways of putting eugenics into practice : "positive" eugenics, which means getting superior people to bree more ; and "negative" eugenics, which means getting inferior ones to breed less. For the most part, Galton was a positive eugenicist He stressed the importance of early marriage and high fertility among the genetic élite, fantasizing about lavish state-funded weddings in Westminster Abbey with the Queen giving away the bride as an incentive. Always hostile to religion, he railed agains the Catholic Church for imposing celibacy on some of its most gifted representatives over the centuries. He hoped that spreading the insights of eugenics would make the gifted aware of their responsibility to procreate for the good of the human race. But Galton did not believe that eugenics could be entirely an affair of moral suasion. Worried by evidence that the poor in industrial Britain were breeding disproportionately, he urged that charity be redirected from them and toward the "desirables." To prevent "the free propagation of the stock of those who are seriously afflicted by lunacy, feeble-mindedness, habitual criminality, and pauperism," he urged "stern compulsion," which might take the form of marriage restrictions or even sterilization.

Galton's proposals were benign compared with those of famous contemporaries who rallied to his cause. H.G. Wells, for instance, declared, "It is in the sterilisation of failures, and not in the selection of successes for breeding, that the possibility of an improvement of the human stock lies." Although Galton was a conservative, his creed caught on with progressive figures like Harold Laski, John Maynard Keynes, George Bernard Shaw, and Sidney and Beatrice Webb. In the United States, New York disciples founded the Galton Society, which met regularly at the American Museum of Natural History, and popularizers helped the rest of the country become eugenics-minded. "How long are we Americans to be so careful for the pedigree of our pigs and chickens and cattle—and then leave the *ancestry of our children* to chance or to 'blind' sentiment ?" asked a placard at an exposition in Philadelphia. Four years before Galton's death, the Indiana legislature passed the first state sterilization law, "to prevent the procreation of confirmed criminals, idiots, imbeciles, and rapists." Most of the other states soon followed. In all, there were some sixty thousand court-ordered sterilizations of Americans who were judged to be eugenically unfit.

It was in Germany that eugenics took its most horrific form. Galton's creed had aimed at the uplift of humanity as a whole ; although he shared the prejudices that were common in the Victorian era, the concept of race did not play much of a role in his theorizing. German eugenics, by contrast, quickly morphed into *Rassenhygiene*–race hygiene. Under Hitler, nearly four hundred thousand people with putatively hereditary conditions like feeblemindedness, alcoholism, and schizophrenia were forcibly sterilized. In time, many were simply murdered.

The Nazi experiment provoked a revulsion against eugenics that effectively ended the movement. Geneticists dismissed eugenics as a pseudoscience, both for its exaggeration of the extent to which intelligence and personality were fixed by heredity and for its naïveté about the complex and mysterious ways in which many genes could interact to determine human traits. In 1966, the British geneticist Lionel Penrose observed that "our knowledge of human genes and their action is still so slight that it is presumptuous and foolish to lay down positive principles for human breeding."

Since then, science has learned much more about the human genome, and advances in biotechnology have granted us a say in the genetic makeup of our offspring. Prenatal testing, for example, can warn parents that their unborn child has a genetic condition like Down syndrome or Tay-Sachs disease, presenting them with the agonizing option of aborting it. The technique of "embryo selection" affords still greater control. Several embryos are created in vitro from the sperm and the eggs of the parents ; these embryos are genetically tested, and the one with the best characteristics is implanted in the mother's womb. Both of these techniques can be subsumed under "negative" eugenics, since the genes screened against are those associated with diseases or, potentially, with other conditions that the parents might regard as undesirable, such as low I.Q., obesity, same-sex preference, or baldness

There is a more radical eugenic possibility on the horizon, one beyond anything Galton envisaged. It would involve shaping the heredity of our descendants by tinkering directly with the genetic material in the cells from which they germinate. This technique, called "germline therapy," has already been used with several species of mammals, and its proponents argue that it is only a matter of time before human beings can avail themselves of it. The usual justification for germline therapy is its potential for eliminating genetic disorders and diseases. Yet it also has the potential to be used for "enhancement." If, for example, researchers identified genes linked with intelligence or athletic ability, germline therapy could give parents the option of souping up their children in these respects.

Galtonian eugenics was wrong because it was based on faulty science and carried out by coercion. But Galton's goal, to breed the barbarism out of humanity, was not immoral. The new eugenics, by contrast, is based on a relatively sound (if still largely incomplete) science, and is not coercive ; decisions about the genetic endowment of children would be left up to their parents. It is the goal of the new eugenics that is morally cloudy. If its technologies are used to shape the genetic endowment of children according to the desires–and financial means–of their parents, the outcome could be a "GenRich" class of people who are smarter, healthier, and handsomer than the underclass of "Naturals." The ideal of individual enhancement, rather than species uplift, is in stark contrast to the Galtonian vision.

"The improvement of our stock seems to me one of the highest objects that we can reasonably attempt," Galton declared in his 1904 address on the aims of eugenics. "We are ignorant of the ultimate destinies of humanity, but feel perfectly sure that it is as noble a work to raise its level... as it would be disgraceful to abase it." Martin Brookes may be right to dismiss this as a "blathering sermon," but it possesses a certain rectitude when set beside the new eugenicists' talk of a "posthuman" future of designer babies. Galton, at least, had the excuse of historical innocence.

Chapitre 2

Compléments

2.1 Sur le rayon de convergence des séries entières aléatoires

Énoncé

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi et on se propose de calculer le rayon de convergence de la série entière aléatoire $\sum_{n\geqslant 0} X_n\, z^n$.

Solution développée

0) Rappelons que le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ est un nombre $0 \leqslant R \leqslant +\infty$ qui permet de caractériser le comportement de cette série entière comme suit. D'une part, si $|z| < R$, la série converge et son terme général converge (au moins) géométriquement vite vers 0, c'est-à-dire qu'il existe une constante finie c et un réel positif $\vartheta < 1$ (dépendant de $|z|$) tels que $|a_n\, z^n| \leqslant c\,\vartheta^n$ pour tout $n \geqslant 0$. Par contre, si $|z| > R$, la série diverge puisque la suite $(|a_n\, z^n|)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée. (Si $|z| = R$, la situation est plus compliquée.) Enfin, on dispose d'une formule :

$$1/R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

1) Dans le cas d'une série entière à coefficients aléatoires, on voit que, pour tout $k \geqslant 0$, $1/R$ est aussi la limite supérieure de la suite $(|X_n|^{1/n})_{n\geqslant k}$. Donc R est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(X_n)_{n\geqslant k}$ pour tout k et, comme les variables aléatoires X_n sont indépendantes, la loi du zéro-un montre que R est presque sûrement constant.

2) Pour calculer la valeur de R, on introduit les événements

$$A_n(c) = \{|X_n| \geqslant c^n\}.$$

Alors $\mathbb{P}(A_n(c)) = \mathbb{P}(|X_1| \geqslant c^n)$ puisque les variables aléatoires X_n ont toutes la même loi. Considérons la série $S(c) = \sum_n \mathbb{P}(|X_1| \geqslant c^n)$. Si $S(c)$ converge, la partie facile du lemme de Borel-Cantelli indique que, presque sûrement, l'événement $A_n(c)$ n'est réalisé que pour un nombre fini d'indices n (puisque $\limsup A_n(c)$ est de probabilité nulle et que cet ensemble correspond au fait que $A_n(c)$ est réalisé pour un nombre infini d'indices n). Par contre, si $S(c)$ diverge, la partie difficile du lemme de Borel-Cantelli est disponible puisque les événements $A_n(c)$ sont indépendants et elle indique que, presque sûrement, l'événement $A_n(c)$ est réalisé pour un nombre infini d'indices n.

Dans le premier cas, presque sûrement $|X_n| < c^n$ pour n assez grand, donc $\limsup |X_n|^{1/n} \leqslant c$ et $R \geqslant 1/c$ presque sûrement. Dans le second cas, presque sûrement $|X_n| \geqslant c^n$ pour des indices n aussi grands que l'on veut, donc $\limsup |X_n|^{1/n} \geqslant c$ et $R \leqslant 1/c$ presque sûrement.

3) Il reste à évaluer $S(c)$. Or, $S(c) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\log |X_1| \geqslant n \log c)$.

Si $c > 1$, on voit que $S(c)$ converge si et seulement si $\log |X_1|$ est intégrable là où $\log |X_1| \geqslant 0$. Par conséquent, si $\mathbb{E}(\log^+ |X_1|)$ est infini, $S(c)$ diverge pour tout $c > 1$ donc $R \leqslant 1/c$ pour tout $c > 1$ donc $R = 0$. Par contre, si $\mathbb{E}(\log^+ |X_1|)$ est fini, $S(c)$ converge pour tout $c > 1$ donc $R \geqslant 1/c$ pour tout $c > 1$ donc $R \geqslant 1$.

Par ailleurs, pour toute loi $X_1(\mathbb{P}) \neq \delta_0$, il existe $x > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_1| \geqslant x)$ est strictement positif. Donc la série $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| \geqslant x)$ diverge et la partie difficile du lemme de Borel-Cantelli indique que, presque sûrement, $|X_n| \geqslant x$ une infinité de fois. Si $|z| = 1$, on en déduit que $|X_n\, z^n| \geqslant x$ une infinité de fois, donc $|X_n\, z^n|$ ne tend pas vers 0 donc $R \leqslant 1$ dans tous les cas où $X_1(\mathbb{P}) \neq \delta_0$.

4) Finalement, il y a trois cas : si $X_1 = 0$ presque sûrement, alors $R = \infty$; si $\log^+ |X_1|$ est intégrable, alors $R = 1$; enfin, si $\log^+ |X_1|$ n'est pas intégrable, alors $R = 0$.

Pour fixer les idées, considérons le cas où la loi de $|X_1|$ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors, s'il existe $a > 2$ tel que $f(x) \leqslant c/(x\,(\log x)^a)$ quand $x \to \infty$, alors $\log^+ |X_1|$ est intégrable. Par contre, si $f(x) \geqslant c/(x\,(\log x)^2)$ quand $x \to \infty$, alors $\log^+ |X_1|$ n'est pas intégrable.

5) Rappel On a utilisé le fait suivant, démontré en TD et à connaître. Soit Y une variable aléatoire positive. Alors, pour tout $y > 0$, Y est intégrable si et seulement si la série $\sum_n \mathbb{P}(Y \geqslant n\, y)$ converge.

2.2 Sur le maximum de variables aléatoires

Énoncé

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, positives, de même loi, et intégrables. On pose $M_n = \max\{\, X_k\, ;\, 1 \leqslant k \leqslant n \,\}$. Montrer que $\mathbb{E}(M_n/n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Solution

On sait que, pour toute variable aléatoire positive X,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, $M_n \leqslant x$ si et seulement si $X_k \leqslant x$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et les variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont indépendantes et ont toutes la même loi que X_1, donc

$$\mathbb{E}(M_n/n) = \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi_n(x) = (1 - \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)^n)/n.$$

Comme $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1/n$, $\varphi_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $x \geqslant 0$ fixé. Il reste à vérifier que la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est dominée par une fonction intégrable.

Or, pour tout $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $n \geqslant 1$, $(1 - a^n)/n \leqslant 1 - a$. (Première solution : le rapport des deux termes vaut $(1 + a + \cdots + a^{n-1})/n$ et cette parenthèse comporte n termes, qui sont tous entre 0 et 1, donc elle est inférieure à n. Ou bien : il suffit de vérifier que $n\,a - a^n \leqslant n - 1$. En dérivant le membre de gauche par rapport à a, on constate qu'il est maximum quand $a = 1$, c'est-à-dire inférieur au membre de droite. Ou encore : montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est en fait décroissante.)

En appliquant ce qui précède à $a = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$, on obtient $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_1(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 1$. Il reste à vérifier que φ_1 est intégrable. Or, par définition, l'intégrale de φ_1 vaut $\mathbb{E}(X_1)$, donc on a terminé.

Remarque : sans l'hypothèse d'indépendance, on ne sait donc pas faire. La suite de l'exercice : trouver un exemple d'une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires dépendantes positives, de même loi, et intégrables telle que $\mathbb{E}(M_n/n)$ ne tend pas vers 0. Ou bien : montrer que l'hypothèse d'indépendance est inutile pour montrer que $\mathbb{E}(M_n/n)$ tend vers 0 (à première vue, je n'y crois pas, mais sait-on jamais...).

Sans indépendance

Énoncé : Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives, de même loi et intégrables. On pose $M_n = \max\{ X_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n \}$. Montrer que $\mathbb{E}(M_n/n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

On sait que, pour toute variable aléatoire positive X,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, si $M_n \geqslant x$, alors $X_k \geqslant x$ pour au moins un indice $1 \leqslant k \leqslant n$, et les variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ ont toutes la même loi que X_1, donc

$$\mathbb{P}(M_n \geqslant x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \geqslant x) = n\,\mathbb{P}(X_1 \geqslant x).$$

On déduit de ces deux remarques que

$$\mathbb{E}(M_n/n) = \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi_n(x) = \mathbb{P}(M_n \geqslant x)/n,$$

avec, pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \psi(x), \quad \psi(x) = \mathbb{P}(X_1 \geqslant x).$$

Puisque $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1/n$, $\varphi_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $x \geqslant 0$ fixé. Comme X_1 est intégrable, ψ est intégrable donc le théorème de convergence dominée montre que l'intégrale de φ_n tend vers 0. CQFD.

Remarque : on n'a besoin d'aucune hypothèse d'indépendance.

2.3 Une autre version de la loi des grands nombres

Voici une version de la loi des grands nombres qui est plus forte que celle démontrée en cours.

Théorème (LGN) *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi, intégrables et deux à deux indépendantes. Soit $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.*

Alors S_n/n converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ presque sûrement et dans L^1 quand n tend vers l'infini.

Remarque : l'indépendance des variables aléatoires deux à deux est une hypothèse plus faible que leur indépendance globale.

Les étapes de la preuve sont les suivantes.

(1) En décomposant chaque variable aléatoire X_n en ses parties positive et négative, on voit qu'il suffit de démontrer la convergence presque sûre pour des variables aléatoires positives.

Pour déduire la convergence L^1 de la convergence presque sûre, on dispose de deux options. Soit utiliser le fait que la famille $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable puisque toutes les variables aléatoires X_n ont la même loi intégrable. Les variables aléatoires S_n/n étant des barycentres de membres de cette famille, la famille $(S_n/n)_{n\geqslant 1}$ est aussi uniformément intégrable, donc la convergence presque sûre de S_n/n entraîne sa convergence au sens L^1. Soit utiliser le lemme de Scheffé ci-dessous puisque $\mathbb{E}(S_n/n) = \mathbb{E}(X_1)$.

Lemme (Scheffé) *Soit X_n et X des variables aléatoires intégrables telles que la suite $(X_n)_n$ converge vers X presque sûrement et telles que $\mathbb{E}(|X_n|)$ converge vers $\mathbb{E}(|X|)$. Alors la suite $(X_n)_n$ converge vers X dans L^1.*

(2) On suppose donc que $X_n \geqslant 0$. On va tronquer les variables aléatoires X_n pour obtenir une convergence rapide d'une sous–suite de $(S_n/n)_n$ puis utiliser la monotonie de la suite $(S_n)_n$.

Soit $a > 1$ et a_n la partie entière de a^n. Posons

$$Y_n := X_n\,\mathbf{1}(|X_n| \leqslant n), \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k, \quad Z_n = a_n^{-1}(T_{a_n} - \mathbb{E}(T_{a_n})).$$

On dispose du lemme de troncature suivant, que nous avons utilisé dans la preuve de la loi des grands nombres classique et dont nous ne reproduisons pas la preuve ici.

Lemme (Troncature) *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de même loi intégrable, et soit Y_n et T_n définis ci-dessus.*

(a) $\mathbb{E}(Y_n)$ *et* $\mathbb{E}(T_n/n)$ *convergent vers* $\mathbb{E}(X_1)$.

(b) *Les séries* $\sum_n \mathrm{var}(Y_n)/n^2$ *et* $\sum_n \mathbb{E}(Y_n^2)/n^2$ *convergent.*

(c) *L'événement* $\liminf\{X_n = Y_n\}$ *est de probabilité* 1.

On en déduit que la série $\sum_n \mathbb{E}(Z_n^2)$ converge. En effet, l'indépendance des variables aléatoires $(Y_n)_n$ deux à deux entraîne que

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = a_n^{-2}\sum_{k=1}^{a_n} \mathrm{var}(Y_k) \leqslant a_n^{-2}\sum_{k=1}^{a_n} \mathbb{E}(Y_k^2),$$

d'où par sommation,

$$\sum_n \mathbb{E}(Z_n^2) \leqslant \sum_k \mathbb{E}(Y_k^2) \sum_{n\,:\,a_n\geqslant k} a_n^{-2} \leqslant c\sum_k \mathbb{E}(Y_k^2)/k^2.$$

La dernière somme est finie par la partie (b) du lemme de troncature. On en déduit que $\sum_n Z_n^2$ est presque sûrement finie donc que Z_n tend presque sûrement vers 0.

(3) La partie (a) du lemme de troncature montre que $a_n^{-1}\,\mathbb{E}(T_{a_n})$ tend vers $\mathbb{E}(X_1)$. Donc $a_n^{-1}\,T_{a_n}$ converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ presque sûrement. On en déduit que $a_n^{-1}\,S_{a_n}$ converge vers $\mathbb{E}(X_1)$ presque sûrement, car $(S_{a_n} - T_{a_n})/a_n$ tend vers 0 presque sûrement, d'après la partie (c) du lemme de troncature.

(4) Il reste à repasser de la suite $(S_{a_n}/a_n)_{n\geqslant 1}$ à la suite $(S_n/n)_{n\geqslant 1}$. Pour tout $n \geqslant 1$, soit $k(n)$ l'indice k tel que $a_k \leqslant n < a_{k+1}$. Alors,

$$S_n/n \leqslant (a_{k(n)}/a_{k(n)+1})\,S_{a_{k(n)+1}}/a_{k(n)+1}$$

d'où $\limsup S_n/n \leqslant \limsup(a_{k(n)}/a_{k(n)+1}) \cdot \mathbb{E}(X_1) = a\,\mathbb{E}(X_1)$. De même,

$$\liminf S_n/n \geqslant \mathbb{E}(X_1)/a.$$

Le réel $a > 1$ est arbitraire donc on a terminé la preuve du théorème.

On a utilisé les résultats auxiliaires suivants dont la preuve est laissée en exercice au lecteur.

Soit $a > 1$ et a_n la partie entière de a^n. Alors a_{n+1}/a_n tend vers a. De plus, il existe une constante c indépendante de k (mais dépendant de a) telle que, pour tout k,

$$\sum_{n\,:\,a_n\geqslant k} 1/a_n^2 \leqslant c/k^2.$$

2.4 Loi des grands nombres échangeable

D'après Luca Pratelli, Séminaire XXIII, Lecture Notes 1372, 527–530 (1989).

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite échangeable de variables aléatoires et notons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad U_n = S_n/n.$$

Rappelons qu'une famille est échangeable si sa loi est invariante sous l'effet de toute permutation de support fini c'est-à-dire si pour $n \geqslant 1$ et s permutation de $\{1,\ldots,n\}$ quelconques, $X^s = (X_{s(k)})_{k\leqslant n}$ admet la même loi que $(X_k)_{k\leqslant n}$. Quelques propriétés :

- échangeable implique de même loi ;
- i.i.d. implique échangeable ;
- si $(X_n)_n$ est échangeable, f est borélienne et Z est indépendante de $(X_n)_n$, alors la suite des $Y_n = f(X_n, Z)$ est échangeable ;
- si $(X_n)_n$ est échangeable de carré intégrable, $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1)$, $\mathrm{var}(X_n) = \mathrm{var}(X_1)$. De plus, on a par exemple $\mathbb{E}(X_n\,X_m) = \mathbb{E}(X_1\,X_2)$ pour tout $n \neq m$.

Théorème *Soit $(X_n)_n$ une suite échangeable. Notons $\mathcal{A}$ la tribu asymptotique des X_n et supposons que X_1 est intégrable. Alors la suite $(U_n)_n$ converge presque sûrement et dans L^1 vers une variable aléatoire U $\mathcal{A}$–mesurable. On peut caractériser U comme suit : toute variable aléatoire Z $\mathcal{A}$–mesurable et bornée vérifie*

$$\mathbb{E}(Z\,X_1) = \mathbb{E}(Z\,U).$$

On verra plus tard que U est l'espérance conditionnelle de X_1 par rapport à $\mathcal{A}$.

Corollaire *Dans le cas i.i.d., la tribu $\mathcal{A}$ est triviale donc U est constante presque sûrement et $U = \mathbb{E}(X_1)$.*

Démonstration La preuve se fait en plusieurs étapes.

1. Soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$ et posons
$$Y_n = f(X_n), \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \qquad V_n = T_n/n.$$
On a alors $\mathbb{E}|U_n - V_n| \leqslant \mathbb{E}|X_1 - Y_1|$. (Inégalité triangulaire.)
2. Supposons que X_1 est de carré intégrable et notons $a = \mathbb{E}(X_1^2)$ et $b = \mathbb{E}(X_1\, X_2)$. Alors, pour $m \leqslant n$, on peut calculer
$$\mathbb{E}(U_n\, U_m) = (a + (n-1)\, b)/n = \mathbb{E}(U_n^2),$$
donc $\mathbb{E}((U_m - U_n)^2) = \mathbb{E}(U_m^2) - \mathbb{E}(U_n^2)$, par conséquent, la suite des $\mathbb{E}(U_n^2)$ est décroissante et la suite $(U_n)_n$ est de Cauchy dans L^2.
3. Supposons X_1 intégrable. Alors, pour $\varepsilon > 0$, on a :
$$\varepsilon\, \mathbb{P}(\max_{m \leqslant i \leqslant n} |U_n - U_i| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{E}|U_n - U_m|.$$
Pour le démontrer, on pose
$$\tau = \sup\{i\,;\, m \leqslant i < n,\, |U_n - U_i| \geqslant \varepsilon\},$$
et on évalue $\varepsilon\, \mathbb{P}(\tau = i)$ en séparant la partie où $U_i > U_n$ et celle où $U_i \leqslant U_n$. Il vient
$$\varepsilon\, \mathbb{P}(\tau \geqslant m) \leqslant \mathbb{E}(U_n - U_m : A_-) + \mathbb{E}(U_m - U_n : A_+),$$
où A_- et A_+ sont deux ensembles disjoints ; le tout est donc majoré par $\mathbb{E}|U_n - U_m|$.
4. On déduit de ce qui précède que la suite $(U_n)_n$ est de Cauchy dans L^1 : on se ramène au cas L^2 grâce à 1 et on applique alors le 2. Par conséquent, le 3 montre que la suite $(U_n)_n$ converge presque sûrement.
5. Posons alors $U = \limsup U_n$. La variable aléatoire U est bien $\mathcal{A}$–mesurable et, si Z est $\mathcal{A}$–mesurable bornée, on a $\mathbb{E}(U_n\, Z) = \mathbb{E}(X_1\, Z)$ pour tout n, d'où le résultat.

■

Remarque La variable aléatoire U est la seule telle que $\mathbb{E}(U : A) = \mathbb{E}(X_1 : A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

2.5 Encore de l'échangeabilité

Rappelons qu'une permutation finie de $\mathbb{N}^*$ est une bijection $s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $s(i) \neq i$ pour un nombre fini de valeurs de i. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout A dans la tribu engendrée par la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$, il existe un borélien B de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ tel que
$$A = \{\omega \in \Omega\,;\, (X_n(\omega))_{n\geqslant 1} \in B\}.$$
Alors A est dit échangeable si et seulement si $s^{-1}(B) = B$ pour toute permutation finie s où, pour tout $x := (x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on note
$$s(x) := (x_{s(n)})_{n\geqslant 1}.$$
La collection des événements échangeables est une tribu, notée $\mathcal{E}$ et appelée la tribu échangeable.

Exemples

Pour construire des exemples, notons $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Alors les événements

$$A_C := \{S_n \in C \,\text{pour une infinité de}\, n\} \quad \text{et} \quad \{\limsup S_n/c_n \geqslant 1\}$$

sont échangeables. De plus, tout événement asymptotique est échangeable. (Pour le montrer, on fixe la permutation s et on écrit la mesurabilité par rapport à $(X_k)_{k\geqslant n}$ avec un indice n suffisamment grand pour que $s(k) = k$ pour tout $k \geqslant n$.) L'exemple de A_C montre que la réciproque est fausse, c'est-à-dire que l'on peut être échangeable sans être asymptotique.

Résultats

Le résultat suivant indique que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite indépendante, la tribu échangeable est triviale (donc qu'elle coïncide avec la tribu asymptotique).

Théorème (Loi du zéro-un de Hewitt-Savage) *Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite indépendante et si A est échangeable, alors $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.*

Une application est le résultat suivant.

Théorème (Loi des grands nombres pour des marches au hasard réelles)
Supposons que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. et notons $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Alors, soit $S_n = 0$ presque sûrement pour tout $n \geqslant 1$; soit $S_n \to +\infty$ presque sûrement quand $n \to \infty$; soit $S_n \to -\infty$ presque sûrement quand $n \to \infty$; soit

$$\liminf S_n = -\infty \quad \textit{et} \quad \limsup S_n = +\infty \quad \textit{presque sûrement.} \tag{2.1}$$

On peut montrer que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. telle que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) \neq 1$, alors on est dans le cas (2.1).

Preuve de la loi des grands nombres

D'après la loi du zéro-un de Hewitt-Savage, $\limsup S_n$ est mesurable par rapport à $\mathcal{E}$ donc vaut une constante c dans $[-\infty, +\infty]$, presque sûrement.

Pour $n \geqslant 1$, soit $T_n := S_{n+1} - X_1$. Comme $(T_n)_{n\geqslant 1}$ et $(S_n)_{n\geqslant 1}$ suivent la même loi, $\limsup T_n = \limsup S_n = c$ presque sûrement, donc $c = c - X_1$ presque sûrement. Si c est fini, il vient $X_1 = 0$ presque sûrement. Par conséquent, si $\mathbb{P}(X_1 = 0) \neq 1$, c vaut $+\infty$ ou $-\infty$. Le même raisonnement s'applique à $\liminf S_n$. Il reste à éliminer le cas impossible $\liminf S_n = +\infty$ et $\limsup S_n = -\infty$ pour obtenir la conclusion de la loi des grands nombres.

Preuve de la loi du zéro-un de Hewitt-Savage

On suit la preuve de la loi du zéro-un de Kolmogorov, qui traite de la tribu asymptotique d'une suite indépendante. Plus précisément, soit A dans $\mathcal{E}$. Il existe une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ telle que A_n est mesurable par rapport à $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\mathbb{P}(A \triangle A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ (voir ci-dessous).

Il existe des boréliens B et B_n tels que

$$A_n := \{(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in B_n\}, \qquad A := \{(X_n)_{n\geqslant 1} \in B\}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, soit s_n la permutation qui échange les ensembles $\{1, \ldots, n\}$ et $\{n+1, \ldots, 2n\}$, plus précisément $s_n(i) := n + i$ si $1 \leqslant i \leqslant n$, $s_n(i) := i - n$ si $n + 1 \leqslant i \leqslant 2n$ et $s_n(i) := i$ si $i \geqslant 2n + 1$. Alors $s_n^{-1}(A) = A$ car A est échangeable et $s_n^{-1}(A_n) = A'_n$ avec

$$A'_n := \{(X_k)_{n+1 \leqslant k \leqslant 2n} \in B_n\}.$$

Comme la suite $(X_k)_{k \geqslant 1}$ est i.i.d., les lois de $(X_k)_{k \geqslant 1}$ et $(X_{s_n(k)})_{k \geqslant 1}$ coïncident donc

$$\mathbb{P}(A_n \triangle A) = \mathbb{P}(A'_n \triangle A).$$

Comme $A_n \setminus (A_n \cap A'_n) \subset A_n \triangle A'_n \subset (A_n \triangle A) \cup (A'_n \triangle A)$, on voit que

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_n \cap A'_n) \leqslant 2\,\mathbb{P}(A_n \triangle A) \to 0.$$

Pour chaque $n \geqslant 1$ fixé, A_n est mesurable par rapport à $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et A'_n est mesurable par rapport à $(X_k)_{n+1 \leqslant k \leqslant 2n}$, donc A_n et A'_n sont indépendants et $\mathbb{P}(A'_n \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(A'_n)$. Il reste à remarquer que $\mathbb{P}(A'_n) = \mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$ pour en déduire que $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 0$, ce qui conclut la preuve.

Un rappel de théorie de la mesure

On a utilisé en passant l'approximation de A par une suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ telle que chaque ensemble A_n est mesurable par rapport à $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. C'est une conséquence du résultat suivant : soit $\mathcal{A}$ une algèbre, $\sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée, m une mesure sur $\sigma(\mathcal{A})$ et A dans $\sigma(\mathcal{A})$ un ensemble de mesure $m(A)$ finie. Alors, pour tout a positif, il existe un ensemble B dans $\mathcal{A}$ tel que $m(A \triangle B) \leqslant a$. (Indication : considérer la classe des A dans $\sigma(\mathcal{A})$ tels que c'est vrai pour tout a positif.) On applique ceci à l'algèbre réunion des tribus engendrées par $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

2.6 Sur quelques notions de convergence

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ et X des variables aléatoires. Voici quatre propriétés.

[PS] $X_n \to X$ presque sûrement.

[L^p] $X_n \to X$ dans L^p.

[UI] La famille $(|X_n|^p)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable.

[Série] Pour tout $a > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant a)$ converge.

D'après le cours, si [PS] et [UI] sont vraies, alors [L^p] est vraie (on passe par la convergence en probabilité), et si [Série] est vraie, alors [PS] est vraie.

L'objet de cette note est de montrer que

[L^p] entraîne [UI] ; [PS] n'entraîne pas [Série].

Si [L^p] est vraie, soit $a > 0$. On va montrer qu'il existe t tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n(t) \leqslant a$, avec $x_n(t) = \mathbb{E}(|X_n - X|^p\,; |X_n - X| \geqslant t)$. Comme $X_n \to X$ dans L^p, il existe un entier N fini tel que $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \leqslant a$ pour tout $n \geqslant N$. Or, pour tout t, $x_n(t) \leqslant \mathbb{E}(|X_n - X|^p)$ donc $x_n(t) \leqslant a$ pour tout $n \geqslant N$ et tout t. Par ailleurs la famille $(|X_n - X|^p)_{n \leqslant N}$ est une partie finie de L^1 donc elle est uniformément intégrable. Ainsi, il existe t tel que $x_n(t) \leqslant a$ pour tout $n \leqslant N$. Alors t convient pour la suite entière, donc $(|X_n - X|^p)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable. Comme X est dans L^p d'après la définition de la convergence L^p, on sait que $|X|^p$ est uniformément intégrable. Comme $|X_n|^p \leqslant 2^{p-1}(|X_n - X|^p + |X|^p)$, $(|X_n|^p)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable en tant que famille contrôlée par la somme de deux familles uniformément intégrables.

Pour la deuxième assertion, voici un exemple. Soit Y une variable aléatoire positive quelconque et $X_n = Y/n$. Alors [PS] est vraie avec $X = 0$ et le terme général de la série de la condition [SÉRIE] vaut $\mathbb{P}(|X_n| \geqslant a) = \mathbb{P}(Y \geqslant n\,a)$, donc [SÉRIE] est vraie si et seulement si Y est intégrable. Toute variable aléatoire Y non intégrable fournit donc un cas où [PS] est vraie et [SÉRIE] est fausse.

2.7 Sur la famille de fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|^\alpha}$

On note $\varphi_\alpha(t) := \mathrm{e}^{-|t|^\alpha}$ et on se propose de déterminer pour quelles valeurs de α la fonction φ_α est une fonction caractéristique.

Quelques remarques élémentaires tout d'abord. On veut que $\varphi_\alpha(0) = 1$ donc $\alpha > 0$. De plus, φ_1 est la fonction caractéristique de la loi de Cauchy réduite de densité $1/(\pi(1+x^2))$ et φ_2 est la fonction caractéristique de la loi gaussienne centrée de variance 2, de densité $\mathrm{e}^{-x^2/4}/(2\sqrt{\pi})$.

Une remarque moins élémentaire à présent. Si φ_α est une fonction caractéristique, le déterminant $K_\alpha(t,s)$ ci-dessous doit être positif ou nul pour toute valeur de t et s, avec

$$K_\alpha(t,s) := \begin{vmatrix} \varphi_\alpha(0) & \varphi_\alpha(t) & \varphi_\alpha(t+s) \\ \varphi_\alpha(-t) & \varphi_\alpha(0) & \varphi_\alpha(s) \\ \varphi_\alpha(-t-s) & \varphi_\alpha(-s) & \varphi_\alpha(0) \end{vmatrix}.$$

En supposant que $s = xt$ pour x fixé et en considérant la limite $t \to 0$, le développement limité de la fonction exponentielle en 0 permet de montrer que $K_\alpha(t,xt) = |t|^{2\alpha}\, k_\alpha(x) + o(|t|^{2\alpha})$ avec

$$k_\alpha(x) := 2x^\alpha(1+x)^\alpha + 2x^\alpha + 2(1+x)^\alpha - x^{2\alpha} - (1+x)^{2\alpha} - 1.$$

Si $\alpha > 2$, $k_\alpha(x) = -\alpha^2\, x^2 + o(x^2)$ quand $x \to 0$ donc $K_\alpha(t,xt)$ prend des valeurs strictement négatives et φ_α n'est pas une fonction génératrice.

Il reste à traiter le cas $0 < \alpha < 2$, cas dans lequel on va montrer que φ_α est effectivement une fonction caractéristique. Pour cela, on considère une suite i.i.d. $(Z_n)_n$ de variables aléatoires de loi de Cauchy réduite, et on pose

$$Y_n := \mathrm{sgn}\,(Z_n)\,|Z_n|^{1/\alpha} \quad \text{et} \quad X_n := (Y_1 + \cdots + Y_n)/n^{1/\alpha}.$$

Rappelons que la loi de Z_n admet la densité $1/(\pi\,(1+z^2))$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itY_k}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tz^{1/\alpha})}{1+z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Supposons que l'on puisse montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itY_k}) = 1 - c_\alpha\,|t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$ quand $t \to 0$, pour une constante $c_\alpha \geqslant 0$ donnée. Alors, quand $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX_n}) \to \mathrm{e}^{-c_\alpha\,|t|^\alpha} = \varphi_\alpha(c_\alpha^{1/\alpha}\,t).$$

Comme la fonction φ_α est continue en 0, cela montrerait que $(X_n)_n$ converge en loi vers $c_\alpha^{1/\alpha}\,X$, où X est une variable aléatoire de fonction caractéristique φ_α, et en particulier que φ_α est une fonction caractéristique.

Or, en posant $y := |t|\,z^{1/\alpha}$, on obtient

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itY_k}) = 1 - \frac{2}{\pi}\,\alpha\,|t|^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(y)}{|t|^{2\alpha} + y^{2\alpha}}\,y^{\alpha-1}\,\mathrm{d}y.$$

La fonction dans la dernière intégrale est positive et dépend de $|t|$ de façon monotone donc $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itY_k}) = 1 - c_\alpha\,|t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$ avec

$$c_\alpha := \frac{2}{\pi}\,\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(y)}{y^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}y.$$

Il reste à vérifier que c_α est finie. Quand $y \to 0$, la fonction à intégrer est équivalente à $1/(2y^{\alpha-1})$ et $\alpha < 2$ donc l'intégrale converge. Quand $y \to \infty$, la fonction à intégrer est majorée par $2/y^{\alpha+1}$ et $\alpha > 0$ donc l'intégrale converge, ce qui termine la preuve.

On peut remarquer que la densité f_α de la loi cherchée est paire et vaut, pour tout x,

$$f_\alpha(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(tx)\,\mathrm{e}^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Si $1 < \alpha \leqslant 2$, on peut développer le cosinus comme une série, donc

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} \int_0^{+\infty} t^{2n}\,\mathrm{e}^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t,$$

si du moins cette série converge. En posant $s = t^\alpha$ dans chaque intégrale, on obtient

$$f_\alpha(x) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n\,a_n\,x^{2n}, \qquad a_n := \frac{\Gamma((2n+1)/\alpha)}{\pi\,\alpha\,\Gamma(2n+1)}.$$

Comme $\alpha > 1$, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est positive et décroissante et, pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant a_n \leqslant a_0 = \Gamma(1+1/\alpha)/\pi$ donc la série converge au moins pour $|x| < 1$. En fait, la formule de Stirling montre que a_n tend vers 0 plus vite que toute série géométrique donc la série converge partout.

Enfin, on peut remarquer que, puisque la suite $(a_n)_n$ est décroissante, la série qui définit $f_\alpha(x)$ est alternée pour $|x| \leqslant 1$, donc le résultat est bien positif sur ce domaine. Par ailleurs, même pour $\alpha = 1$, cette formule donne bien la bonne densité $f_1(x) = 1/(\pi(1+x^2))$.

En conclusion, $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|^\alpha}$ est une fonction caractéristique si et seulement si $0 < \alpha \leqslant 2$. La loi associée est toujours symétrique par rapport à 0. Elle est intégrable si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas elle est centrée. Elle est de carré intégrable si et seulement si $\alpha = 2$, auquel cas il s'agit de la loi normale centrée de variance 2. Enfin, si $1 < \alpha \leqslant 2$, on dispose de la densité de cette loi sous la forme d'une série alternée qui converge partout plus vite que géométriquement.

Remarque Resterait à montrer que $f(x) \geqslant 0$ pour $|x| > 1$. Quelques tentatives en ce sens.

Soit $(c_n)_n$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi de Cauchy réduite et $1 < \alpha \leqslant 2$. Notons $x_n := c_n^{1/\alpha}$ si $c_n \geqslant 0$ et $x_n := -(-c_n)^{1/\alpha}$ si $c_n \leqslant 0$. Alors $y_n := (x_1 + \cdots + x_n)/n^{1/\alpha}$ convergerait en loi vers une loi stable d'indice α.

On sait que $\mathbb{P}(x_n \geqslant x) \sim 1/(\pi x^\alpha) \sim \mathbb{P}(x_n \leqslant -x)$ pour $x \to +\infty$. Et

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itx_k}) = (2/\pi) \int_0^{+\infty} \cos(tx^{1/\alpha})\,\mathrm{d}x/(1+x^2).$$

Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itx_k}) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$ quand $t \to 0$, alors $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itx_n}) \to \mathrm{e}^{-|t|^\alpha}$ et on a terminé. En supposant que $t > 0$ et en posant $y = t^\alpha x$, il reste à montrer la convergence vers une constante positive et finie de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(y^{1/\alpha})}{t^{2\alpha}+y^2}\,\mathrm{d}y,$$

ce qui est bizarre.

Par ailleurs, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \, x_n, \quad x_n = (-1)^n \int_{n\pi/x}^{(n+1)\pi/x} \cos(tx) \, \varphi_\alpha(t) \, \mathrm{d}t.$$

Sur l'intervalle $(n\pi/x, (n+1)\pi/x)$, les fonctions φ_α et $t \mapsto (-1)^n \cos(tx)$ sont toutes deux décroissantes, donc x_n est supérieur au produit des intégrales, soit $x_n \geqslant 0$. Il suffirait de montrer que $x_{2n} \geqslant x_{2n+1}$ pour conclure.

Chapitre 3

Exercices

3.1 Fiche 1 : Outils probabilistes

1. Pour $n \geqslant 0$, M_n est un "menteur". M_0 émet un message ($+$ ou $-$) vers M_1 et chaque M_n, $n \geqslant 1$, transmet le message reçu de M_{n-1} vers M_{n+1} : il y a p chances, $0 \leqslant p \leqslant 1$, que M_n transmette le message reçu intact et $(1-p)$ chances qu'il le modifie. Trouver p_n, la probabilité que M_n transmette effectivement le message émis par M_0 et p_∞, la limite des p_n si elle existe.

2. Nabuchodonosor et Cléopâtre ont rendez-vous entre 5 et 7. Chacun a décidé d'attendre l'autre, si besoin est, pendant un quart d'heure. Calculer la probabilité que Nabuchodonosor et Cléopâtre réussissent leur rendez-vous.

3. Pour $n \geqslant 1$ on munit l'espace $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_n$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $F(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.

1) Exprimer $\mathbb{P}_n(F = k)$ à l'aide de $p(i) = \mathbb{P}_i(F = 0)$. En déduire une relation entre les $p(i)$ puis la valeur de $p(i)$ (séries entières !).
Trouver $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(F = k)$.

2) Etablir la formule due à Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [1,n], |I|=k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

Indications : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$ et $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \, \mathbf{1}_B$.
Retrouver directement les $p(i)$ à partir de cette formule.

4. Exhiber Ω, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\Omega)$ et deux probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ distinctes sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telles que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ pour tout A dans $\mathcal{C}$.

5. Exhiber un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $\mathcal{F}$ ne contient aucun singleton mais tel que $\mathcal{F}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\Omega)$.

6. Pour $A \subset \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant 1$, on pose $d_n(A) = n^{-1}|A \cap [1, n]|$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}^*$ telles que la "densité" $d(A) = \lim_n d_n(A)$ existe.
Exhiber A et B dans $\mathcal{A}$ tels que $A \cap B$ n'est pas dans $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ n'est pas un π–système.

Moralité : approcher une "mesure uniforme sur $\mathbb{N}^*$" par la mesure uniforme sur $[1, n]$ n'est pas la seule solution employée par les théoriciens des nombres. Pour $s \in (1, +\infty)$, soit

$$m_s = \zeta(s)^{-1} \sum_{n\geqslant 1} n^{-s} \, \delta_n.$$

Outre des propriétés d'indépendance bien venues (voir un exercice plus bas), les mesures m_s ont l'avantage que $m_s(A) \to d(A)$ quand $s \to 1^+$, pour tout A dans $\mathcal{A}$. Le montrer.
Montrer que la convergence de $m_s(A)$ quand $s \to 1^+$ n'implique pas que A appartient à $\mathcal{A}$.

7. Soit $(A_n)_n$ une suite de parties de $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbf{1}(\limsup A_n) = \limsup \mathbf{1}_{A_n}.$$

8. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}$ une fonction $\mathcal{F}/\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mesurable et $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurables. Montrer que $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega),$$

est $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable.

9. **(Atomes)** On dit que A dans $\mathcal{F}$ est un atome de $\mathbb{P}$ si $\mathbb{P}(A) > 0$ et si toute partie B de A mesurable vérifie $\mathbb{P}(B) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$.
On note $A \sim B$ si et seulement si $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, on note A^* la classe de A.

1) Montrer que la classe $\mathcal{A} = \{A^* \,;\, A \in \mathcal{F},\ A \text{ atome}\}$ est une classe au plus dénombrable.

2) Montrer que $d(A^*, B^*) = \mathbb{P}(A \triangle B)$ définit une distance d sur l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$.

3) Dans cette question $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et A est un atome. Montrer qu'il existe un réel x tel que $A^* = \{x\}^*$.

4) Dans cette question, $\mathbb{P}$ ne possède aucun atome. Soit $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$ et $0 < \varepsilon \leqslant \mathbb{P}(A)$. On note

$$\mathbb{P}_\varepsilon(A) = \sup\{\mathbb{P}(B) \,;\, B \subset A,\ B \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(B) \leqslant \varepsilon\}.$$

Montrer que $\mathbb{P}_\varepsilon(A)$ n'est pas nul puis que $\mathbb{P}_\varepsilon(A) \geqslant \varepsilon/2$. Pour montrer que $\mathbb{P}_\varepsilon(A) \geqslant \varepsilon/2$, on pourra raisonner par l'absurde, montrer alors l'existence d'un événement $B \subset A$ tel que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_\varepsilon(A)$ et en déduire une contradiction.

5) Application : supposons qu'il existe un réel $0 \leqslant x \leqslant 1$ tel que $\mathbb{P}$ ne prend jamais la valeur x. Construire des B_n disjoints avec pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\, x \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) \leqslant x.$$

Conclusion ?

10. On choisit deux points au hasard sur un segment de façon indépendante et uniforme. Calculer la probabilité que les trois portions du segment ainsi obtenues puissent former un triangle.

11. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace métrique muni de ses boréliens et d'une probabilité quelconque. Tout A borélien vérifie

$$\mathbb{P}(A) = \inf\{\mathbb{P}(O) \,;\, A \subset O,\ O \text{ ouvert}\} = \sup\{\mathbb{P}(F) \,;\, F \subset A,\ F \text{ fermé}\}.$$

12. Soit $(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de tribus et $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par leur réunion. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{F}$, il existe un indice n et un événement $A' \in \mathcal{F}_n$ tels que $\mathbb{P}(A \triangle A') \leqslant \varepsilon$.

Variables aléatoires

13. Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ une variable aléatoire et $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{F}')$. Vérifier que $\sigma(X)$ est bien "la plus petite tribu $\mathcal{G}$ rendant X mesurable pour $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}'$".

Soit $\pi(X) = \{\{X \leqslant x\}\,;\, x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\pi(X) = X^{-1}(\pi(\mathbb{R}))$ et que $\pi(X)$ est un π–système qui engendre $\sigma(X)$.

14. Soit X_n des variables aléatoires réelles.
Montrer que $\inf_n X_n$, $\liminf_n X_n$ et $\limsup_n X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Montrer que $\{\lim_n X_n \text{ existe}\}$ et $\{X_n \text{ est bornée}\}$ sont dans $\mathcal{F}$.

15. (Représentation de Skorokhod) Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction de répartition.

1) On définit X sur $\Omega = [0,1]$ par $X(\omega) = \inf\{x\,;\, F(x) > \omega\}$. Montrer que

$$X(\omega) = \sup\{x\,;\, F(x) \leqslant \omega\}.$$

Montrer que X est $\mathcal{B}(\Omega)$ mesurable et que X admet pour fonction de répartition F par rapport à la mesure de Borel $\mathbb{P}$.

2) Soit $Y(\omega) = \inf\{x\,;\, F(x) \geqslant \omega\}$. Montrer que $Y(\omega) = \sup\{x\,;\, F(x) < \omega\}$, que Y est $\mathcal{B}(\Omega)$ mesurable, que Y admet pour fonction de répartition F par rapport à $\mathbb{P}$ mesure de Borel et enfin que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Indépendance

16. $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont des π–systèmes avec $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}$ et $\Omega \in \mathcal{C}_i$. Montrer que $(*)$ pour $A_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, 3$, entraîne $(*)$ pour $A_i \in \sigma(\mathcal{C}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Pourquoi a-t-on imposé $\Omega \in \mathcal{C}_i$? Contrexemple ?

17. (Fonction indicatrice d'Euler) On prend $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}$ probabilité uniforme et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers de Ω premiers et divisant n. Pour $p \in \mathcal{P}$, soit $A_p = \{q \in \Omega\,;\, p|q\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$. Montrer que les événements $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants. En déduire que la fonction d'Euler φ vérifie

$$\varphi(n) = n \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - 1/p).$$

18. (Fonction Zêta) Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on se donne une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi $\mathbb{P}(X = n) = n^{-s}/\zeta(s)$.

1) On note $A_n = \{n|X\}$ pour tout entier n. Montrer que les A_p pour $p \in \mathcal{P}$ sont indépendants et en déduire une preuve probabiliste de l'égalité

$$1/\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} (1 - 1/p^s).$$

2) Montrer que la probabilité qu'aucun carré ne divise X est $1/\zeta(2s)$.

3) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X. On note D le p.g.c.d. (aléatoire) de X et Y. Montrer que D est une variable aléatoire et que sa loi est donnée par

$$\mathbb{P}(D = n) = n^{-2s}/\zeta(2s).$$

On pourra introduire $\Omega_0 = \{n|D\}$ et la probabilité $\mathbb{P}_0(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|\Omega_0)$.

19. (Records) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition commune F continue. Soit $R_1 = \Omega$ et pour $n \geqslant 2$, $R_n = \{\forall m < n, X_m < X_n\}$. Ainsi, R_n est l'événement “un record est battu au temps n”. Montrer que les R_n sont indépendants et que $\mathbb{P}(R_n) = 1/n$. Conclusion ?

20. (Tribu asymptotique)

1) Soit X_n des variables aléatoires, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$, $\mathcal{F}^n = \sigma(X_k\,;\, k \geqslant n)$ et $\mathcal{F}^\infty = \bigcap_n \mathcal{F}^n$ la tribu asymptotique. Pour chacun des ensembles suivants, préciser s'il appartient à $\mathcal{F}^\infty$:

$$A = \{X_n \text{ converge}\}, \quad B = \left\{\sum_n X_n \text{ converge}\right\},$$

$$C = \left\{n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k \text{ converge}\right\},$$

$$D = \left\{\lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k = a\right\}, \quad E = \left\{\sum_n X_n = b\right\}.$$

2) Supposons de plus que les X_n sont indépendantes et soit Y une variable aléatoire $\mathcal{F}^\infty$ mesurable. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(Y = a) = 1$.

21. 1) Soit $a > 0$. Montrer que X est intégrable si et seulement si la série $\sum_n \mathbb{P}(|X| \geqslant an)$ converge.

2) En déduire que si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. alors : si X_1 est intégrable, X_n/n tend vers 0 presque sûrement ; sinon, X_n/n n'est pas bornée presque sûrement.

Suites de Bernoulli

22. (Symétrie, symétrie ...) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi diffuse et symétrique par rapport à l'origine. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1) Montrer que la loi de S_n est diffuse.

2) Montrer sans calcul que $\mathbb{P}(S_2 > 0 \,|\, S_1 > 0) = 3/4$.

23. (Retours en zéro) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli de paramètre p de loi $b(p)$: $X_1(\mathbb{P}) = p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ si $n \geqslant 1$. On rappelle que S_n suit la loi binômiale $B(n, p)$.

1) Soit a un entier. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = a)$ n'est non nul que si $n - a$ est pair et positif et que quand n tend vers l'infini, $\mathbb{P}(S_{a+2n} = a)$ est équivalent à

$$(2p)^a\,(4p(1-p))^n/\sqrt{n\pi}.$$

2) Si $p \neq 1/2$, montrer que $\mathbb{P}(\exists n_0,\, \forall n \geqslant n_0,\, S_n \neq a) = 1$.
Peut-on conclure si $p = 1/2$?

Désormais, $p = 1/2$. On pose $T = \inf\{n \geqslant 1\,;\, S_n = 0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $T = +\infty$ sinon. On va montrer

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T) = +\infty.$$

3) Soit $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des chemins possibles entre les temps 0 et n : $c \in \mathcal{C}_n$ si c est une fonction continue sur $[0, n]$, nulle en 0, affine sur chaque intervalle $[k, k+1]$ et telle que $f(k+1) - f(k) = \pm 1$. Montrer qu'il existe une bijection g_n de $\{-1, +1\}^n$ sur $\mathcal{C}_n$ telle que la mesure $g_n((X_1, \ldots, X_n)(\mathbb{P}))$ soit la probabilité uniforme sur $\mathcal{C}_n$ notée U_n.

4) Soit $a \geqslant 1$ et b deux entiers. Posons

$$F_b = \{c \in \mathcal{C}_n\,;\, c(n) = b\},$$

et

$$F_b^a = \{c \in F_b\,;\, \exists k \geqslant 1, c(k) = a\}.$$

On suppose $b \geqslant a$. Alors, $F_b = F_b^a$. On suppose $b < a$. Alors, faire un dessin pour démontrer le principe de réflexion suivant :

$$U_n(F_b^a) = U_n(F_{2a-b}).$$

(On pourra remarquer que $(2a-b)$ est le symétrique de b par rapport à a.)

5) On s'intéresse à la quantité $A_n = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0)$. Déduire du 4 les égalités :

$$A_n = 2\,\mathbb{P}(S_1 = -1, S_2 < 0, S_3 < 0, \ldots, S_{2n} < 0).$$

Puis,

$$A_n = \mathbb{P}(S_1 < 1, S_2 < 1, \ldots, S_{2n} < 1).$$

Puis,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_{2n-1}(F_{2k-(2n-1)} \setminus F^1_{2k-(2n-1)}).$$

6) Montrer que $\mathbb{P}(T = 2n) = a_{n-1} - a_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et en déduire

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T) = +\infty.$$

Pour la suite, voir le livre d'exercices de Cottrell, Duhamel et Genon–Catalot.

24. (Le mur) Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs complexes de loi $p\,\delta_1 + (1-p)\,\delta_{\mathrm{i}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$. On fixe deux entiers a et b positifs et on note M le mur

$$M = \{a + \mathrm{i}\,k\,;\, 0 \leqslant k \leqslant b\}.$$

1) Calculer $m = \mathbb{P}(\exists n \geqslant 1,\, S_n \in M)$.

2) En remarquant que S_{a+b} est sur la droite $\{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z}\,;\, x + y = a + b\}$, obtenir une autre expression de m. Les deux quantités sont-elles égales ?

25. (Construction d'une suite de variables aléatoires i.i.d.) On munit $\{0,1\}$ de la tribu $\mathcal{P}(\{0,1\})$ et de la probabilité $b(p)$ donnée par

$$b(p) = p\,\delta_1 + (1-p)\,\delta_0.$$

Soit Ω l'ensemble des applications $\omega = (\omega_n)_n$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\{0,1\}$ où on note $\omega_n = \omega(n)$. On identifie Ω à un produit infini de copies de $\{0,1\}$ et on appelle $\mathcal{F}$ la tribu cylindrique sur Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité produit des $b(p)$; $\mathbb{P}$ est donc déterminée par

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega,\ \omega_1 = a_1, \ldots, \omega_n = a_n\}) = p^{|a|}\,(1-p)^{n-|a|},$$

pour tout $n \geqslant 1$ et tout n–uplet $a = (a_k)_{k \leqslant n}$ formé de 0 et de 1 et de “longueur” $|a| = \sum_k a_k$. On définit enfin des fonctions $\varepsilon_n : \Omega \to \{0,1\}$ par $\varepsilon_n(\omega) = \omega_n$.

A) 1) Montrer que ε_n est une variable aléatoire de loi $b(p)$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que la suite $(\varepsilon_n)_n$ est indépendante.

2) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par $X = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n}\,\varepsilon_n$. Montrer que X est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$.

3) On suppose jusqu'à nouvel ordre que $p = 1/2$. Quelle est la loi de X ? Construire une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$.

4) Si I est une partie infinie de $\mathbb{N}$ de la forme $I = \{i_n\,;\, n \geqslant 1\}$, montrer que X^I suit la même loi que X :

$$X^I = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n}\,\varepsilon_{i_n}.$$

5) Construire une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$.

B) 6) Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Construire une variable aléatoire Y définie sur Ω et de loi $Y(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}$. On pourra chercher Y $\sigma(X)$–mesurable.

7) Soit $(\mathbb{Q}_n)_n$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Construire une suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ définies sur Ω, indépendantes et de lois $Y_n(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}_n$.

C) On revient au cas général $0 < p < 1$ et on note $I = [0, 1[$, $\mathcal{I}$ sa tribu borélienne et ℓ la mesure de Borel sur $(I, \mathcal{I})$. Si $x \in I$, on note $0, x_1x_2x_3 \dots$ son développement dyadique qui ne se termine pas par des 1.

8) Exhiber une bijection bimesurable entre $(I, \mathcal{I})$ et $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ pour un espace Ω_0 de la forme $\Omega_0 = \Omega \setminus N$, $\mathbb{P}(N) = 0$, et pour la tribu $\mathcal{F}_0$ induite.

9) En déduire l'existence d'une famille de mesures de probabilités $(m_p)_{p\in]0,1[}$ sur I, étrangères deux à deux, diffuses et telles que $\ell = m_{1/2}$.

On admettra une loi des grands nombres pour le jeu de pile ou face, c'est-à-dire que la suite $n^{-1} \sum_{k\leqslant n} \varepsilon_k$ converge $\mathbb{P}$ presque sûrement vers p et on pourra construire m_p sur $(I, \mathcal{I})$ de sorte que la suite $(\alpha_n)_n$ de variables aléatoires définies sur $(I, \mathcal{I})$ par $\alpha_n(x) = x_n$ suive, sous m_p, la même loi que la suite $(\varepsilon_n)_n$ sous P.

3.2 Fiche 2 : Outils probabilistes, suite

(Lois)

1. Donner la loi de $X+Y$ si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson $\mathcal{P}(a)$ et $\mathcal{P}(b)$.

Donner la loi de $X + Y$ si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

2. On suppose que le couple (X, Y) admet pour loi $2\,\mathbf{1}_D(x, y)\,\mathrm{d}\ell_2(x, y)$ où ℓ_2 désigne la mesure de Borel sur $\mathbb{R}^2$ et D le triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Donner la loi des variables aléatoires X, Y, $X + Y$, $X - Y$ et $Y/(1 - X)$. Pour cette dernière, on pourra donner une solution sans calcul.

Montrer que les variables aléatoires X et $Y/(1 - X)$ sont indépendantes.

3. On suppose que X admet une loi diffuse et que Y est indépendante de X. Montrer que $\mathbb{P}(X \neq Y) = 1$.

4. Trouver deux variables aléatoires X et Y non indépendantes telles que X^2 et Y^2 sont indépendantes.

5. Sur $\Omega = \{0, 1\}^2$ avec $\mathbb{P}$ uniforme, trouver trois événements indépendants deux à deux mais non dans leur ensemble.

6. On suppose que $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ et que $\mathbb{P}(\{0\}) = p$, $\mathbb{P}(\{k\}) = (1 - p)/n$ pour $k \geqslant 1$. Trouver une valeur de p telle que deux événements quelconques distincts de l'ensemble vide et de Ω ne sont jamais indépendants.

(Simulation)

7. (Rejet) On veut simuler une variable aléatoire de loi de densité f donnée par rapport à la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$. On suppose que l'on sait simuler une variable aléatoire de loi de densité g avec $f \leqslant a\,g$ pour $a \geqslant 0$ (et donc obligatoirement $a \geqslant 1$).

Pour cela, on se donne une suite $(U_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et une suite $(Y_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d. de loi de densité g. On pose

$$T = \inf\{n \geqslant 1\,;\, f(Y_n) > a\,U_n\,g(Y_n)\}.$$

1) Montrer que T est une variable aléatoire et que T est fini presque sûrement.

2) On pose $X = Y_T$ si T est fini, $X = 0$ sinon. Montrer que X est une variable aléatoire et que sa loi admet pour densité f.

3) Calculer $\mathbb{E}(T)$.

8. (Loi normale)

1) Soit X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $(X, Y) = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ pour $R \geqslant 0$ et $\Theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Déterminer la loi du couple (R, Θ).

2) Soit U et V deux variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Construire explicitement à partir de U et V un couple de même loi que (R, Θ).

3) En déduire un procédé de simulation d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

(Intégration)

9. Soit X une variable aléatoire positive ou nulle et soit Y la partie entière de X. Montrer que

$$Y = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}(X \geqslant n), \qquad \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Montrer que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

10. (Difficile.) Soit X une variable aléatoire positive ou nulle telle que $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{E}(X^2) = 1$. Alors, pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(X \geqslant t\,a) \geqslant (1-t)^2\,a^2.$$

11. Soit F une fonction de répartition et a un réel. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(x+a) - F(x))\,\mathrm{d}x = a.$$

12. Soit X une variable aléatoire positive et $r > 1$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{E}(X \wedge t^r)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^r} = \frac{r}{r-1}\,\mathbb{E}(X^{1/r}).$$

13. Exhiber deux variables aléatoires X et Y de même loi uniforme sur $[0,1]$, telles que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ et telles que X, Y ne sont pas indépendantes.

14. (Stone–Weierstrass par les polynômes de Bernstein) On veut montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on peut l'approcher uniformément par des polynômes.

Pour cela, on introduit une suite $(\varepsilon_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p, donc $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_n = 0)$ et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ et $T_n = S_n/n$.

1) Montrer que $\mathbb{E}(f(T_n))$ est un polynôme en p, que l'on notera $B_n(f)$, et donner une expression de $B_n(f)(p)$.

2) Utiliser le fait que f est bornée et uniformément continue pour montrer que $B_n(f)(p)$ tend vers $f(p)$ uniformément en p quand n tend vers l'infini.

15. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires positives de même loi et intégrables. Soit $M_n = \max\{\, X_k\,;\, k \leqslant n \,\}$. Utiliser l'exercice 9 pour montrer que $\mathbb{E}(M_n/n)$ tend vers 0.

16. (Voir l'exercice 21.) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On considère l'événement

$$A = \{|X_n| \geqslant n \text{ une infinité de fois}\}.$$

Utiliser l'exercice 9 pour montrer que X_1 est intégrable si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$.

17. (Dyadiques) Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ boréliens et $\mathbb{P}$ mesure de Borel. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ négligeables tels que $\Omega \subset A + B$.

Une somme de nombres normaux est-elle un nombre normal ?

(Convergences)

18. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires *quelconque*. Exhiber une suite de réels a_n non nuls telle que X_n/a_n converge presque sûrement vers 0.

19. On munit $[0,1]$ de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.

1) Soit $X_n = n\mathbf{1}_{]0,1/n[}$. Montrer que $X_n \to 0$, préciser en quels sens, et montrer que $\mathbb{E}(X_n) = 1$. Dessiner $X = \sup_n X_n$. Préciser si X est intégrable.

2) Soit $Y_n = \mathbf{1}_{]0,1/n[}$. On ordonne lexicographiquement l'ensemble des couples $(q,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant p \leqslant q$ et on pose $Z_n = \mathbf{1}_{](p-1)/q,p/q]}$ si (q,p) est le n–ième couple.

Étudier les convergences en probabilité, presque sûre et au sens L^r des suites de terme général

$$Y_n, \quad n^2\,Y_n, \quad Z_n, \quad \sqrt{p}\,Z_n, \quad \mathrm{e}^n\,Z_n.$$

20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers X. Montrer que $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$. Que se passe-t-il si f n'est pas continue ? Et avec la convergence presque sûre ?

21. (Voir l'exercice 16.) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que la suite des moyennes $n^{-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y. Montrer que Y est presque sûrement constante et que X_1 est intégrable (on pourra utiliser l'exercice 9).

Utiliser le même argument pour montrer que si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}|X_1| = +\infty$, alors $\limsup |S_n|/n = +\infty$ presque sûrement.

22. Soit $\Omega = \{\omega_n\,;\, n \geqslant 1\}$ un ensemble fini ou dénombrable et $\mathbb{P} = \sum_n p_n\,\delta_{\omega_n}$ une mesure sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Montrer que la convergence en probabilité équivaut à la convergence presque sûre (et donc que la convergence au sens L^p implique la convergence presque sûre).

Montrer qu'une CNS pour que convergence presque sûre et convergence au sens L^p soient équivalentes est que le support de $\mathbb{P}$ soit fini.

23. 1) Pour chaque $n \geqslant 1$, soit X_n une variable aléatoire dont la loi vérifie

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = (1 - 1/(x+n))\,\mathbf{1}_{x\geqslant 0}.$$

On suppose que les X_n sont indépendantes. Montrer que X_n tend en probabilité vers 0 (facile) mais que la suite des S_n/n ne converge pas en probabilité (difficile).

2) La topologie de la convergence en probabilité peut-elle être définie par une norme ?

3) La suite X_n converge-t-elle presque sûrement ou au sens L^p ?

24. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi non presque sûrement constante. Montrer que la suite $(X_n(\omega))_n$ diverge presque sûrement.

25. Exhiber une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires telle que $\limsup_n X_n$ vaut $+\infty$ presque sûrement mais telle qu'il n'existe pas de sous–suite $(\varphi(n))_n$ et d'ensemble $A \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et que $(X_{\varphi(n)})_n$ tend vers l'infini sur A.

26. Utiliser une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité mais pas presque sûrement pour montrer que la topologie de la convergence presque sûre n'est pas métrisable.

On pourra considérer l'espace $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb})$.

27. (Uniforme intégrabilité) 1) Si $(X_n)_n$ est uniformément intégrable, la suite $(S_n/n)_n$ est uniformément intégrable.

Indication : quelle caractérisation de l'uniforme intégrabilité utiliser ?

2) Application à la loi des grands nombres ?

28. Soit X_n des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p_n.$$

Trouver une CNS portant sur la suite $(p_n)_n$ pour avoir $X_n \to 0$ en probabilité. Même question pour avoir $X_n \to 0$ presque sûrement.

29. On se donne n variables aléatoires indépendantes X_k de loi exponentielle telles que $\mathbb{P}(X_k \geqslant x) = \mathrm{e}^{-ax}$ pour $x \geqslant 0$.

1) On note $I = \inf\{\, X_k \,;\, k \leqslant n \,\}$. Calculer la loi de I.

2) On pose $N_t = \mathrm{Card}\,\{\, k \leqslant n \,;\, X_k \geqslant t \,\}$. Donner la loi, l'espérance et la variance de N_t.

Si les variables aléatoires X_k modélisent les durées de vie aléatoires de n individus nés au temps $t = 0$, le nombre de survivants au temps t vaut N_t.

3.3 Fiche 3 : Lois des grands nombres

Quand une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est donnée, on note $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. (Convergences) Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy $\mathcal{C}(a)$. Quelle est la loi de S_n/n ? Montrer que la suite S_n/n ne converge pas en probabilité, ni d'ailleurs aucune de ses sous–suites.

2. Si la suite $(X_n)_n$ est u.i., la suite $(S_n/n)_n$ est u.i. Indication : quelle caractérisation utiliser ?

(Convergence de séries)

3. Illustrer par un exemple chacune des situations suivantes :

(1) La série $\sum X_n$ converge presque sûrement et la série $\sum |X_n|$ diverge presque sûrement.

(2) La série $\sum X_n$ converge presque sûrement et les séries $\sum \mathbb{E}(X_n)$ et $\sum \mathbb{E}(X_n^2)$ divergent.

(3) La série $\sum X_n$ diverge presque sûrement et la série $\sum \mathbb{E}(X_n^2)$ converge.

(4) La série $\sum X_n$ diverge presque sûrement et la série $\sum \mathbb{E}(X_n^2)$ converge et $\mathbb{E}(X_n) = 0$ pour tout n.

4. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mu \neq \delta_0$ et soit $(a_n)_n$ une suite de réels.

(1) On suppose que a_n ne tend pas vers 0. Montrer que $\sum a_n X_n$ diverge presque sûrement.

(2) On suppose que $X_n \geqslant 0$ et $a_n \geqslant 0$ pour tout n, que a_n tend vers 0 et que X_n est de carré intégrable. Montrer que $\sum a_n X_n$ converge presque sûrement si et seulement si $\sum a_n$ converge. (Le sens direct utilise le théorème des trois séries.)

5. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives.

(1) On suppose que $0 \leqslant X_n \leqslant c$ pour tout n. Montrer que $\sum X_n$ converge presque sûrement si et seulement si $\sum \mathbb{E}(X_n)$ converge. (Le sens direct utilise le théorème des trois séries.)

(2) Montrer que $\sum X_n$ converge presque sûrement si et seulement si la série $\sum \mathbb{E}(X_n/(1+X_n))$ converge.

6. (Réalisation des suites indépendantes) Pour $n \geqslant 1$, on définit $r_n : [0,1[\to \{-1,+1\}$ par $r_n(x) = \operatorname{sgn}\sin(2^n \pi x)$ où on pose par convention $\operatorname{sgn}(0) = 1$.

(1) Montrer que $(r_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et de même loi (que l'on calculera) dans l'espace de probabilité $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \mathrm{d}x)$.

(2) Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déduire du **(1)** qu'il existe une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ indépendantes, de lois respectives μ_n, et définies sur l'espace de probabilité $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), dx)$.

7. (Un jeu presque équitable) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois $\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2 = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$. Montrer que les X_n sont centrées mais que S_n/n tend p.s. vers -1.

8. (Une application de la LGN L^4) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$ et soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

(1) Montrer que S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\,a)$.

(2) Evaluer $\mathbb{E}\left(f\left(x + \dfrac{S_n}{n}\right)\right)$. En déduire que

$$f(x+a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{-n\,a}\, \frac{(n\,a)^k}{k!}.$$

(3) Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ intégrable, de moyenne m et soit μ^{*n} sa puissance n–ème de convolution. Montrer que, pour tout réel a,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(a + \frac{x}{n}\right) \mathrm{d}\mu^{*n}(x) = f(a+m).$$

9. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, positives et intégrables, et soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| \leqslant c \cdot x$ pour tout réel positif x. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k)\right).$$

10. (Bernstein–suite) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $B_n(f)$ les polynômes de Bernstein associés à f, donc

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, (1-x)^{n-k} \, f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(1) Fixons x dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe une suite de variables aléatoires $(\varepsilon_n)_n$ i.i.d. avec

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right)\right).$$

En déduire que $B_n(f)$ converge uniformément vers f. (On a redémontré le théorème de Stone–Weierstrass.)

(2) Supposons que f est de plus hölderienne d'ordre $0 < a < 1$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C finie telle que, pour tous x et y,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^a.$$

Montrer que dans ce cas,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant C\,\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k - x\right|^a.$$

En utilisant la concavité de la fonction $t \mapsto t^{a/2}$ sur $t \geqslant 0$, démontrer le taux de convergence suivant : pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout x dans $[0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant C\,n^{-a/2}.$$

11. (LGN L^2) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de carré intégrable et centrées. Si la série $\sum \mathrm{var}(X_n)/n^2$ converge, la suite S_n/n converge presque sûrement vers 0.

(1) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes dont les lois sont spécifiées par les égalités

$$\mathbb{P}(X_n = +1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = (1 - 2^{-n})/2,$$

et

$$\mathbb{P}(X_n = +2^n) = \mathbb{P}(X_n = -2^n) = 2^{-n}/2.$$

Montrer que S_n/n converge presque sûrement et que la série $\sum \mathrm{var}(X_n)/n^2$ diverge.

(2) Soit $(v_n)_n$ une suite de réels positifs tels que la série $\sum v_n^2/n^2$ diverge.

Exhiber une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes de carré intégrable et centrées de variances $\mathrm{var}(X_n) = v_n^2$ telle que S_n/n diverge presque sûrement.

On cherchera X_n à valeurs dans $\{-n, 0, +n\}$ si $v_n \leqslant n$ et à valeurs dans $\{-v_n, +v_n\}$ si $v_n > n$, de telle sorte que la série $\sum \mathbb{P}(|X_n| \geqslant n)$ diverge.

12. (Estimateurs de la moyenne) Soit $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une collection de n variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[a,b]$. Les bornes a et b sont inconnues et on veut estimer $(a+b)/2$ à partir de l'échantillon observé. Deux estimateurs sont proposés :

$$M_n = S_n/n \quad \text{et} \quad T_n = (\inf X_k + \sup X_k)/2.$$

Calculer $\mathbb{E}(M_n)$, $\mathbb{E}(T_n)$, $\mathrm{var}(M_n)$ et $\mathrm{var}(T_n)$ et en déduire que M_n et T_n sont deux estimateurs **consistants**, c'est-à-dire qu'ils convergent bien vers $(a+b)/2$ pour n grand, mais que T_n est meilleur que M_n.

On pourra se ramener au cas $[a,b]=[0,1]$ pour simplifier les calculs, puis, pour ce qui concerne T_n, remarquer que $I_n = \inf X_k$ suit la loi de $1-S_n = 1-\sup X_k$.

On calculera alors $\mathbb{P}(x \leqslant I_n, S \leqslant y_n)$, puis la loi de S_n, $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}(S_n^2)$. On montrera enfin les relations

$$\mathbb{E}((S_n-I_n)^2) = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)},\ \mathrm{var}(S_n+I_n) = \mathbb{E}((2S_n-1)^2) - \mathbb{E}((S_n-I_n)^2).$$

13. (Estimation et lois de Gauss) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de carré intégrable.

(1) On pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \frac{S_n}{n}\right)^2$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}(V_n)$.

(2) Si la loi de X_1 est gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, montrer que S_n et V_n sont indépendantes et trouver leurs lois.

(3) On fixe $n \geqslant 2$, on note $\varphi(s) = \mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}sX_1))$, et on suppose que S_n et V_n sont indépendantes. Calculer de deux façons différentes $\mathbb{E}(V_n \exp(itS_n))$ en fonction de la fonction φ.

Trouver une équation différentielle satisfaite par φ et en déduire que la loi de X_1 est gaussienne.

14. (Transformée de Laplace) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue bornée. La transformée de Laplace de f évaluée en $\lambda > 0$ est

$$Lf(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)\,dx.$$

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que

$$\mathbb{E}[f(X_1+\cdots+X_n)] = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\lambda^n\,(Lf)^{(n-1)}(\lambda).$$

En déduire que l'on peut retrouver f à partir de Lf grâce à la formule

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{n}{x}\right)^n (Lf)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

Avertissement Cette méthode de reconstruction de f est peu précise en pratique.

15. (Gauss en dimension infinie) (1) Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et soit O une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^d$. Montrer que OX suit la même loi que X. En déduire que $X/\|X\|$ suit une loi uniforme sur la sphère unité S^{d-1} de $\mathbb{R}^d$.

(2) Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et notons

$$R_n = (Z_1^2+\cdots+Z_n^2)^{1/2}.$$

Montrer que $R_n/\sqrt{n}$ tend presque sûrement vers 1 quand n tend vers l'infini.

(3) En déduire que si, pour chaque $n \geqslant 1$, le point $Y^{(n)} = (Y_k^{(n)})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est choisi uniformément sur la sphère $\sqrt{n}\,S^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mathbb{P}(Y_1^{(n)} \leqslant x) \longrightarrow \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y,$$

et

$$\mathbb{P}(Y_1^{(n)} \leqslant x_1,\, Y_2^{(n)} \leqslant x_2) \longrightarrow \varphi(x_1)\,\varphi(x_2).$$

Commenter.

16. (Suites échangeables) (1) Soit $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une collection de n variables aléatoires échangeables de carré intégrable. Calculer la variance de S_n en fonction de la variance de X_1 et de la covariance de X_1 et X_2.

(2) Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite infinie de variables aléatoires échangeables de carré intégrable. Montrer que la covariance de X_1 et X_2 est positive.

(3) Montrer qu'il existe n variables aléatoires échangeables $(Y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ non plongeables dans une famille de $n+1$ variables aléatoires échangeables. On pourra introduire des variables aléatoires indépendantes de même loi X_k et poser $Y_k = X_k - S_n/n$.

(4) Soit $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des variables aléatoires échangeables intégrables. Montrer que

$$\mathbb{E}\,|S_n/n| \leqslant \mathbb{E}\,|S_{n-1}/(n-1)|\,.$$

(5) Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}^*$ **de support fini** et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires. On note $\mathcal{A}$ la tribu asymptotique et $\mathcal{E}$ la tribu des échangeables. Donc A appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si A est mesurable par rapport à $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $\mathbb{P}(s(A)\triangle A) = 0$ pour tout s dans $\mathfrak{S}$.

Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ et donner un exemple pour lequel $\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$.

17. (Loi du logarithme itéré pour des variables aléatoires gaussiennes) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note $h(t) = \sqrt{2t\log\log t}$ pour $t \geqslant 3$. On veut montrer que

$$\limsup_n \frac{S_n}{h(n)} = 1 \text{ presque sûrement.}$$

(1) Montrer que pour tout réel t, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\,S_n}) = \mathrm{e}^{n\,t^2/2}$.

(2) Soit $S_n^* = \max\{0, S_1, \ldots, S_n\}$. Adapter la preuve de l'inégalité de Kolmogorov à la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{st}$ pour montrer que, pour tous $c \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(S_n^* \geqslant c) \leqslant \mathrm{e}^{-ct}\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS_n}).$$

En déduire la majoration suivante :

$$\mathbb{P}(S_n^* \geqslant c) \leqslant \mathrm{e}^{-c^2/(2n)}.$$

(3) Soit $a > 1$ un réel fixé et, pour tout n suffisamment grand, $b_n = a\,h(a^{n-1})$. Utiliser le lemme de Borel-Cantelli, partie facile, pour montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang n,

$$S_{a^n}^* \leqslant b_n.$$

En déduire que $\limsup S_n/h(n) \leqslant a$, presque sûrement.

En déduire enfin que $\limsup S_n/h(n) \leqslant 1$, presque sûrement.

(4) Soit $r \geqslant 2$ un entier et $0 < \varepsilon < 1$ un réel. Estimer la probabilité de l'événement

$$A_n = \{S_{r^{n+1}} - S_{r^n} \geqslant (1-\varepsilon)\,h(r^{n+1} - r^n)\}$$

à l'aide de la fonction

$$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(y)\, dy \quad \text{avec} \quad \varphi(y) = \exp(-y^2/2)/\sqrt{2\pi}.$$

(5) Pour $x > 0$, montrer la double inégalité suivante :

$$\varphi(x)/x \geqslant \Phi(x) \geqslant \varphi(x)/(x + 1/x).$$

On pourra calculer les dérivées de $\varphi(y)$ et de $\varphi(y)/y$.

(6) Appliquer le lemme de Borel-Cantelli, partie difficile, pour montrer que presque sûrement, une infinité des événements A_n est réalisée. Combiner l'estimation ainsi obtenue avec la conclusion du **(3)** pour en déduire que, presque sûrement,

$$\limsup_n S_{r^{n+1}}/h(r^{n+1}) \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{1-1/r} - 2\sqrt{1/r}.$$

Conclure.

18. (Sommes aléatoires) Soit $N \geqslant 1$ une variable aléatoire entière et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires. On note

$$S_N : \omega \mapsto \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

(1) Rappeler pourquoi S_N est une variable aléatoire.

(2) On suppose que les X_n sont i.i.d. et intégrables. Soit $(N_k)_k$ une suite de variables aléatoires entières telle que N_k converge presque sûrement vers l'infini.

Montrer que S_{N_k}/N_k tend presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.

(3) On suppose que les X_n sont i.i.d. et de carré intégrable et que N est indépendante de la suite $(X_n)_n$ et de carré intégrable.

Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ et $\text{var}(S_N)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_1)$, $\mathbb{E}(N)$, $\text{var}(X_1)$ et $\text{var}(N)$.

(4) On rappelle que la fonction génératrice φ_X d'une variable aléatoire X positive vaut $\varphi_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$ pour s dans $[0,1]$.

Calculer φ_{S_N} en fonction de φ_{X_1} et φ_N.

Application : un poisson pond un nombre aléatoire T d'œufs de loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$. Chacun des œufs survit jusqu'à l'âge adulte avec une probabilité p.

Donner la loi du nombre S d'œufs ayant survécu jusqu'à l'âge adulte. Donner la loi du couple $(S, T-S)$. En déduire la loi de $T-S$ et le fait que les variables aléatoires S et $T-S$ sont indépendantes.

3.4 Fiche 4 : Convergence en loi

1 Pour tout réel t, on note $\varphi(t) = (1-|t|)^+$.
(1) Montrer que φ est la fonction caractéristique d'une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
(2) Développer φ en série de Fourier. En déduire qu'il existe également une loi discrète dont la fonction caractéristique coïncide avec φ sur $[-1,1]$.

2 Donner une preuve ou un contrexemple de chacune des assertions suivantes.
(1) Si X_n converge en loi vers X, alors X_n converge vers X presque sûrement.
(2) Si X_n converge en loi vers X, alors l'événement $\{X_n \to X\}$ est de probabilité strictement positive.
(3) Si X_n converge en loi vers X, alors l'événement « il existe une suite extraite $(n_k)_k$ telle que X_{n_k} converge vers X » est de probabilité strictement positive.
(4) Si X_n converge en loi vers X et si Y_n converge en loi vers Y, alors $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$.
(5) Si X_n converge en loi vers X et si Y_n converge en loi vers une constante y, alors (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, y).
(6) Si X_n converge en loi vers X, si Y_n converge en loi vers une constante y et si Z_n converge en loi vers une constante z, alors $Z_n X_n + Y_n$ converge en loi vers $z\, X + y$.
(7) Si X et Y suivent la même loi et si G est mesurable, alors $G(X)$ et $G(Y)$ suivent la même loi.
(8) Si X, Y et Z sont définies sur le même espace de probabilité et si X et Y suivent la même loi, alors $Z\,X$ et $Z\,Y$ suivent la même loi.

3 (1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geqslant 1$, soit $X_n = [nX]/n$. Montrer qu'il existe un borélien B tel que $\mathbb{P}(X \in B) = 0$ et pourtant $\mathbb{P}(\forall n \geqslant 1, X_n \in B) = 1$. Montrer par contre que $X \in \overline{B}$ presque sûrement.
(2) Montrer que si X_n converge en loi vers X, alors il existe une suite $(Y_n)_n$ de variables aléatoires telle que, pour tout n, Y_n suit la loi de X_n et telle que $Y_n \to X$ presque sûrement.
(3) Soit F un fermé. Utiliser la question précédente pour montrer que si, pour tout n, $X_n \in F$ presque sûrement et si X_n converge en loi vers X, alors $X \in F$ presque sûrement.

4 Pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, soit $x_n(a) := \displaystyle\sum_{k=0}^{[an]} \frac{n^k}{k!}$.
(1) Utiliser la loi des grands nombres pour montrer que, quand $n \to \infty$, $x_n(a) \ll \mathrm{e}^n$ si $a < 1$ et $x_n(a) \sim \mathrm{e}^n$ si $a > 1$.
(2) Utiliser le théorème de la limite centrale pour trouver un équivalent simple de $x_n(1)$ quand $n \to \infty$.

5 On suppose que X_n converge en loi vers X et que la suite $(X_n)_n$ est uniformément intégrable. Montrer que X est intégrable et que $\mathbb{E}(X_n)$ tend vers $\mathbb{E}(X)$ quand $n \to \infty$.

6 Soit $(\nu_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières telle que ν_n/n converge en probabilité vers une constante ν non nulle. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers X.

(1) On suppose que la suite $(\nu_n)_n$ est indépendante de la suite $(X_n)_n$. Montrer que la suite $(X_{\nu_n})_n$ converge en loi vers X.

(2) Le but de cette question est de montrer que, sans l'hypothèse d'indépendance des suites $(\nu_n)_n$ et $(X_n)_n$, le résultat de la question (1) est faux.

Pour un contrexemple, soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Notons $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $X_n = 0$ si Z_n est pair et $X_n = 1$ si Z_n est impair. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la loi de X_n est uniforme sur $\{0, 1\}$. En déduire que X_n converge en loi et préciser la limite π de sa loi.

On note ν_n le $n$ème indice k tel que $X_k = 0$. Plus précisément, on pose $\nu_0 = 0$ puis, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\nu_{n+1} = \inf\{k \geqslant \nu_n + 1,\, X_k = 0\}.$$

Calculer la loi γ du temps ν_1. Montrer que la suite $(\nu_{n+1} - \nu_n)_{n\geqslant 0}$ est i.i.d. de loi γ. En déduire que

$\nu_n/n \to 2$ presque sûrement quand $n \to \infty$. Montrer que la suite (X_{ν_n}) converge en loi vers une limite ϱ et conclure en remarquant que $\varrho \neq \pi$.

7 Une roulette comporte 18 numéros noirs, 18 numéros rouges, et 1 numéro vert sur lequel on ne peut pas miser. On mise sur noir ou sur rouge, donc les chances de gain sont de $p = 18/37$ et les chances de perte de $1 - p = 19/37$. Si on mise 1 Euro à chaque fois, donner une estimation basée sur le théorème central limite du nombre de fois n_T pendant lequel on doit jouer pour avoir au moins 50 % de chances d'avoir perdu $T = 1000$ Euros.

8 (1) Soit X une variable aléatoire. Montrer que sa fonction caractéristique est continue.
(2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $X + Y$ suit la loi de X. Trouver la loi de X.
(3) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $X - Y$ suit la loi de X. Trouver la loi de X.
(4) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $(X + Y)/2$ suit la loi de X. Trouver la loi de X.
(5) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que $(X+Y)/\sqrt{2}$ suit la loi de X. Trouver la loi de X. On supposera que cette loi est de carré intégrable.
(6) Soit a un nombre réel tel que $a^2 \neq 1/2$ et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi de carré intégrable. On suppose que $a\,(X + Y)$ suit la loi de X. Trouver la loi de X.

9 (1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Calculer sa fonction caractéristique φ_U.
(2) Montrer qu'il n'existe pas deux variables aléatoires indépendantes et de même loi X et Y telles que la loi de $X - Y$ est uniforme sur $[-1, 1]$.
(3) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Y = 1 - X$. Calculer la loi de Y. En déduire qu'il existe deux variables aléatoires de même loi X et Y telles que la loi de $X-Y$ est uniforme sur $[-1, 1]$.

10 (1) Soit V et W deux variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telles que (V, W) suit la loi uniforme sur $\{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$. Montrer que V et W suivent la même loi puis calculer la loi de $V + W$ et la loi de $V - W$. On précisera si V et W sont indépendantes ou non.
(2) Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_1)$. On pose $S = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{Z_n}{2^n}$. Calculer la loi de S.
(3) Déduire des questions (1) et (2) qu'il existe deux variables aléatoires de même loi X et Y telles que la loi de $X + Y$ et la loi de $X - Y$ sont toutes deux uniformes sur $[-1, 1]$.
(4) Revenant à la question (1), trouver la loi de (V, W). En déduire finalement que (X, Y) suit une loi uniforme sur un sous-ensemble mesurable et borné du plan que l'on décrira.

11 On veut montrer qu'il n'existe pas de variables aléatoires indépendantes et de même loi X et Y telles que la loi de $X + Y$ est uniforme sur $[-1, 1]$.
(1) Soit φ_T la fonction caractéristique d'une variable aléatoire T. Utiliser des copies indépendantes T_1, T_2 et T_3 de T pour montrer que, pour tous nombres réels s et t, le déterminant $K_T(t, s)$ doit être un réel positif, avec

$$K_T(t,s) = \begin{vmatrix} \varphi(0) & \varphi(t) & \varphi(t+s) \\ \varphi(-t) & \varphi(0) & \varphi(s) \\ \varphi(-t-s) & \varphi(-s) & \varphi(0) \end{vmatrix}.$$

(2) Montrer que

$$K_T(t,s) = 1 - |\varphi_T(t)|^2 - |\varphi_T(s)|^2 - |\varphi_T(t+s)|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\varphi_T(t)\,\varphi_T(s)\,\overline{\varphi_T(t+s)}).$$

(3) On suppose à présent que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que la loi de $X+Y$ est uniforme sur $[-1,1]$. Calculer $|\varphi_X(\pi/2)|$ et $\varphi_X(\pi)$, puis $K_X(\pi/2,\pi/2)$, et conclure.

12 Soit $(X_n)_n$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de carré intégrable telles que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$. On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2, \quad Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{C_n}}, \quad Z_n = \sqrt{n}\,\frac{S_n}{C_n}.$$

(1) Montrer que, presque sûrement, $C_n > 0$ à partir d'un certain rang, et donc que Y_n et Z_n sont presque sûrement bien définies à partir d'un certain rang.
(2) Étudier la convergence en loi des suites $(Y_n)_n$ et $(Z_n)_n$ quand $n \to \infty$.
(3) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n, Z_n)_n$ quand $n \to \infty$.
(4) Calculer la limite de $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0)$ quand $n \to \infty$.
(5) On pose $T_n = \mathrm{e}^{-S_n}\,\mathbf{1}\{S_n \geqslant 0\}$. Montrer que $\mathbb{E}(T_n)^{1/\sqrt{n}}$ tend vers 1 quand $n \to \infty$. On pourra considérer les événements $\{0 \leqslant S_n \leqslant c\sqrt{n}\}$ pour tout c positif.

13 Pour tout $a > 0$, on se donne une variable aléatoire X_a de loi de Poisson de paramètre a et on pose $Y_a = (X_a - a)/\sqrt{a}$.
(1) Montrer que Y_a converge en loi quand $a \to \infty$ et préciser la limite.
(2) Pour $t \geqslant 0$, on note $G(a,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[t]} \mathrm{e}^{-a}\,\frac{a^k}{k!}$. Calculer la limite de $G(a, at)$ quand $a \to \infty$, pour tout t fixé. En déduire la limite de $G(at, as)$ quand $a \to \infty$, pour tous s et t fixés.
(3) Montrer que la famille $(Y_a)_{a>0}$ est uniformément intégrable.
(4) Pour $n \geqslant 1$ entier, calculer $\mathbb{E}((Y_n)^-)$.
(5) Déduire de tout ceci la formule de Stirling, c'est-à-dire le fait que quand $n \to \infty$,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n.$$

Chapitre 4

Archives d'examens

4.1 Examen partiel d'avril 1992

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Cauchy de paramètre a : on rappelle que la loi de X_1 admet la densité $(a/\pi)\mathrm{d}x/(a^2+x^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $S_n = \sum_1^n X_k$.

1) Montrer que si S_n/n converge en probabilité vers une variable aléatoire S, celle-ci est presque sûrement constante.

2) Montrer que la loi de S_n/n est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer la transformée de Fourier de la densité de la loi de X_1. En déduire la loi de S_n/n.

3) Montrer que S_n/n ne converge pas en probabilité.

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre a donc $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathrm{e}^{-a}a^k/(k!)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et x un réel. Utiliser le comportement asymptotique des X_n pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(x+\frac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{-na}\,\frac{(na)^k}{k!} = f(x+a).$$

Problème Les parties B, C et D sont indépendantes entre elles.

Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et telle que $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_1^n X_k$.

Pour tout réel positif t, on définit $N_t = \sup(n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant t)$ et on appelle $(N_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de comptage associé à la suite X.

Partie A 1) On fixe $t \geqslant 0$. Montrer l'égalité entre ensembles $\{N_t = n\} = \{S_n \leqslant t < S_{n+1}\}$. Montrer que N_t est presque sûrement fini et que N_t est une variable aléatoire.

2) Montrer que l'application $t \mapsto N_t$ est croissante et que presque sûrement $\lim_{t\to+\infty} N_t = +\infty$.

Partie B 3) On suppose que X_1 est intégrable. Montrer que presque sûrement $\lim_{t\to+\infty} N_t/t = 1/\mathbb{E}(X_1)$. Que se passe-t-il quand X_1 n'est pas intégrable ?

4) Dans le reste de cette partie, on étudie la convergence de N_t/t au sens de la convergence L^1.

Soit $X^0 = (X_n^0)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli avec $\mathbb{P}(X_1^0 = 0) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1^0 = 1)$ et soit N^0 le processus de comptage de X^0. Calculer $\mathbb{P}(N_t^0 = n)$, $\mathbb{E}(N_t^0 + 1)$ et $\mathbb{E}((N_t^0 + 1)(N_t^0 + 2))$.

5) Soit $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_1 \geqslant a) = p > 0$. On pose $X_n' = a\,\mathbf{1}_{X_n \geqslant a}$ et on note N' le processus de comptage associé. Montrer que $N_t \leqslant N_t'$.

6) En déduire que $\mathbb{E}(N_t^2)/t^2$ est borné. On suppose que X_1 est intégrable ; montrer que $\mathbb{E}(N_t)/t \to 1/\mathbb{E}(X_1)$. On suppose que X_1 n'est pas intégrable ; montrer que $\mathbb{E}(N_t)/t \to 0$.

Partie C 7) **Le théorème de Wald :** Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes d'espérance finie et soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que N est intégrable et que pour tout $n \geqslant 1$, $\{N \leqslant n\}$ appartient à la tribu engendrée par Y_1, Y_2,... , Y_n. Soit T_N défini par $T_N(\omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{n=N(\omega)} Y_n(\omega)$. Montrer que T_N est une variable aléatoire et que $\mathbb{E}(T_N) = \mathbb{E}(Y_1)\,\mathbb{E}(N)$.

8) Montrer que $N = N_t + 1$ vérifie les hypothèses du théorème de Wald. Donc $\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(N_t + 1)$.

9) On reprend les notations de 4). Préciser si $\mathbb{E}(X^0_{N_t+1}) = \mathbb{E}(X_1^0)$ ou non.

Partie D On va maintenant montrer que le phénomène observé au 9) est général. On suppose jusqu'à la fin du problème que la loi des X_n est exponentielle de paramètre a, c'est-à-dire de densité $ae^{-ax}\mathbf{1}_{x\geqslant 0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit t un réel positif : on note $V_t = t - S_{N_t}$ et $W_t = S_{N_t+1} - t$.

10) Soit $0 \leqslant v \leqslant t$, $0 \leqslant w$ et $A = \{V_t \geqslant v\}\bigcap\{W_t > w\}$. Montrer que $A = \{N_{t-v} = N_{t+w}\}$.

11) Soit $t \geqslant 0$ fixé : trouver la loi de N_t.

12) On rappelle que pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $N_t - N_s$ est indépendante de N_s et de même loi que N_{t-s}. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Que vaut $\mathbb{P}(V_t = t)$?

13) Montrer que W_t suit la loi exponentielle de paramètre a et que V_t suit la loi de paramètre $\min(X_1, t)$.

14) Calculer $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(V_t + W_t)$. Quel est le rapport avec la question 9) ? Supposons que X_n modélise le temps d'attente entre deux passages successifs de l'autobus. Pourquoi appelle-t-on le résultat démontré le paradoxe de l'autobus ?

Exercice 3 Soit X_1, X_2, ... , X_n des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1) Montrer que $N = \{\exists k \neq i, X_k = X_i\}$ est négligeable. Soit $\omega \in N^c$: on note $\sigma(\omega)$ la permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $X_{\sigma(\omega)(1)}(\omega) < X_{\sigma(\omega)(2)}(\omega) < \ldots < X_{\sigma(\omega)(n)}(\omega)$. Montrer que σ est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2) On pose $Y_k = X_{\sigma(k)}$ et $Y = (Y_1, Y_2, \ldots , Y_n)$. Montrer que Y est une variable aléatoire et déterminer sa loi.

3) Déterminer la loi conditionnelle de $(Y_2, Y_3, \ldots , Y_{n-1})$ sachant (Y_1, Y_n).

4) Déterminer la loi du vecteur $(Y_1, Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_{n-1})$.

Soit Z une variable aléatoire indépendante de $(X_1, \dots, X_n)$ de loi $(z^n/n!)\mathrm{e}^{-z}\mathbf{1}_{z\geqslant 0}\mathrm{d}z$. Montrer que les variables aléatoires $Y_1 Z, (Y_2 - Y_1)Z, \dots, (Y_n - Y_{n-1})Z$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

5) On veut simuler n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 à partir de $2n+1$ variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$. Décrire une procédure n'utilisant qu'une seule fois la fonction logarithme.

4.2 Examen partiel d'avril 1993

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Dans tout l'énoncé, X, Y et X_n pour $n \in \mathbb{N}$ désignent des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ fixé.

Exercice 1 On modélise la rupture d'une chaîne moléculaire de longueur X aléatoire par le choix d'un nombre aléatoire Y de loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendant de X. Les longueurs des deux tronçons issus de la rupture sont alors respectivement $X_1 = YX$ et $X_2 = (1-Y)X$.

(a) On suppose que la loi de X admet une densité f sur $\mathbb{R}^+$. Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?

(b) Dans le cas particulier où $f(x) = a^2\, x\, \mathrm{e}^{-ax}$ avec $a > 0$, que peut-on dire du couple (X_1, X_2) ? Ce phénomène peut-il se produire pour d'autres lois de X ?

(c) Soit X_0 la plus petite des deux longueurs X_1 et X_2. Calculer $\mathbb{E}X_0$ en fonction de $\mathbb{E}X$.

Exercice 2 Montrer que pour toute suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles, il existe une suite $(a_n)_n$ de réels $a_n > 0$ telle que $a_n\, X_n$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 3 Un insecte pond des œufs. Le nombre X d'œufs pondus suit une loi de Poisson donc pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^n/(n!)$. Chaque œuf éclôt (ou n'éclôt pas) indépendamment de tous les autres et la probabilité p d'éclosion d'un œuf est la même pour chaque œuf. Quelle est la loi du nombre d'œufs éclos ?

Exercice 4 Montrer que la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ vers 0 implique la convergence presque sûre de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ vers 0. Montrer que la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ vers 0 **n'implique pas** la convergence en probabilité de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ vers 0.

Exercice 5 On rappelle le résultat suivant du cours, qu'il est inutile de redémontrer : si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X, il existe une sous-suite $(X_{\phi(n)})_n$ qui converge presque sûrement vers X.

(a) Montrer le résultat plus fort suivant : X_n converge en probabilité vers X si et seulement si on peut extraire de chaque sous-suite $(X_{\phi(n)})_n$ une sous-sous-suite $(X_{\phi\circ\psi(n)})_n$ qui converge presque sûrement vers X.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Borel-mesurable et $C = \{\omega \in \Omega\,;\, f \text{ est continue en } X(\omega)\}$.

Montrer que si $\mathbb{P}(C) = 1$ et $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X, alors $(f(X_n))_n$ converge en probabilité vers $f(X)$.

(c) On suppose que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X et que les X_n sont presque sûrement positives. Montrer que X est presque sûrement positive et que l'on a : $\mathbb{E}X \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}X_n$.

(d) Soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace topologique (ou d'un espace métrique si l'on s'y sent plus à l'aise). Montrer que si chaque sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ contient une sous-sous-suite $(x_{\phi\circ\psi(n)})_n$ convergeant vers x, alors la suite $(x_n)_n$ converge vers x.

En déduire que la convergence presque sûre n'est pas topologisable (ni métrisable).

4.3 Examen final de juin 1993

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Dans tout l'énoncé, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

Exercice 1 Soit X une variable aléatoirede loi exponentielle : $\mathbb{P}(X \geqslant x) = \mathrm{e}^{-x}$ pour $x \geqslant 0$.

On fixe $x \geqslant 0$. Déterminer $\mathbb{E}(X|X \wedge x)$ et $\mathbb{E}(X|X \vee x)$.

Exercice 2 On se donne une suite croissante de tribus $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, $n \geqslant 0$, et une suite de variables aléatoires intégrables $(X_n; n \geqslant 0)$ *adaptée* c'est-à-dire que chaque variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. On rappelle les définitions suivantes :
- une variable aléatoire entière T est un *temps d'arrêt* si $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ pour $n \geqslant 0$;
- une suite de variables aléatoires intégrables $(X_n; n \geqslant 0)$ est une *martingale* si, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

Montrer que $(X_n; n \geqslant 0)$ est une martingale si et seulement si tout temps d'arrêt borné T vérifie :

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0.$$

Indication : Pour quels ensembles A la variable aléatoire $n + \mathbf{1}_A$ est-elle un temps d'arrêt ?

Exercice 3 La suite $(X_n; n \geqslant 1)$ de variables aléatoires indépendantes est telle que :
- la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge presque sûrement quand n tend vers $+\infty$ vers une variable aléatoire S ;
- les lois des X_n sont discrètes et toutes concentrées sur un ensemble dénombrable $D = \{d_n; n \in \mathbb{N}\}$.

On note C l'ensemble des sommes *finies* de termes $\epsilon_k d_k$, où les d_k sont pris dans D (avec redoublements possibles) et où les ϵ_k valent 0 ou +1 ou −1.

1) i) Soit B un borélien. Montrer que $A = \{S \in B + C\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_n$ engendrée par les variables aléatoires X_k avec $k > n$.

Indication : Que vaut l'intersection de A avec $\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k = x_k\}$ pour des x_k dans D ?

1) ii) Quelles valeurs $\mathbb{P}(A)$ peut-il prendre ?

2) Montrer que C est dénombrable et que $C = C + C = C - C$.

3) Montrer que si la loi de S n'est pas diffuse, il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(S \in a + C) = 1$.

4) Montrer que s'il existe un borélien N de mesure nulle tel que $\mathbb{P}(S \in N) > 0$, alors il existe un borélien M de mesure nulle avec $\mathbb{P}(S \in M) = 1$.

5) Prouver le théorème suivant :

Théorème de pureté : Soit $(X_n; n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois discrètes telle que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge presque sûrement, quand n tend vers $+\infty$, vers une variable aléatoire S. Alors la loi de S est *pure*, c'est-à-dire que soit cette loi est discrète, soit cette loi est singulière, soit cette loi est absolument continue.

Exercice 4 La loi du couple (X, Y) est répartie sur le disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ avec une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par $(1 + 2\,\mathbf{1}_{x \geqslant 0})/(2\pi)$.

Donner la loi de X sachant Y.

Exercice 5 Soit $(U_n; n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $a > 0$, on pose :

$$X_a = \sum_{n=1}^{+\infty} (U_1 U_2 \cdots U_n)^{1/a}.$$

1) Montrer que la série définissant X_a converge presque sûrement.
Indication : On pourra montrer $\mathbb{E}X_a < +\infty$, ou bien examiner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} (U_1 U_2 \cdots U_n)^{1/a} z^n$.
2) Montrer que X_a coïncide en loi avec $U_1^{1/a}(1 + X_a^*)$, où X_a^* est indépendante de U_1 et admet la même loi que X_a.
3) Soit ϕ_a la fonction caractéristique de X_a : $\phi_a(\lambda) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\lambda X_a})$. Montrer que :

$$\phi_a(\lambda) = \exp\left(a \cdot \int_0^1 (\mathrm{e}^{i\lambda u} - 1) \frac{\mathrm{d}u}{u}\right).$$

Indication : Déduire de 2) que ϕ_a vérifie une équation intégrale puis résoudre cette équation par différentiation.
4) Si X_a et X_b sont indépendantes, quelle est la loi de $X_a + X_b$?

4.4 Examen partiel d'avril 1994

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Dans tout l'énoncé, on considère des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ fixé.

Exercice 1 On suppose que le couple (X, Y) de variables aléatoires réelles admet pour loi la mesure

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(dx\, dy) = e^{-y}\, \mathbf{1}_{0 \leqslant x \leqslant y}\, dx\, dy.$$

(a) Donner la loi de X et la loi de Y.

(b) Les couples (X, Y), $(X, Y - X)$ et $(Y, X/Y)$ sont-ils formés de variables aléatoires indépendantes ?

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0).$$

(a) Montrer que $Y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$ est une variable aléatoire.

(b) Donner la loi de Y quand $p = 1/2$.

(c) On choisit pour Ω l'intervalle $[0,1[$, pour $\mathcal{F}$ la tribu $\mathcal{B}(\otimes)$ des boréliens de Ω et pour $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur Ω. Si $\omega \in \Omega$, on note $0, \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ son développement dyadique ne finissant pas par des 1.

Montrer que $X_n : \omega \mapsto \omega_n$ vérifie les hypothèses de cet exercice pour $p = 1/2$.

(d) En déduire l'existence d'une famille $(m_p)_{p\in]0,1[}$ de mesures de probabilité sur l'espace mesuré $([0,1[, \mathcal{B}([\prime,\infty[))$ étrangères deux à deux, diffuses et assignant une probabilité strictement positive à tout intervalle de $[0,1[$ ouvert et non vide.

Que vaut la mesure de Lebesgue ?

Exercice 3 On se donne n variables aléatoires indépendantes X_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ de même loi exponentielle de paramètre $a > 0$ donc $\mathbb{P}(X_k \geqslant x) = \mathrm{e}^{-ax}$ pour tout $x \geqslant 0$. Les X_k peuvent par exemple modéliser les durées de vie (aléatoires) de n individus nés au même instant $t = 0$. On pose alors

$$M_n = \min\{X_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

(a) Calculer $\mathbb{P}(M_n \geqslant x)$ pour tout $x \geqslant 0$. En déduire la loi de M_n.

(b) Pour $t \geqslant 0$, on note N_t le cardinal (aléatoire) de l'ensemble des indices k pour lesquels $X_k \geqslant t$. Ainsi, N_t peut modéliser le nombre d'individus encore vivants au temps t.

Trouver la loi de N_t. Calculer l'espérance et la variance de N_t.

Exercice 4 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de même loi

$$a^2\, x\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathbf{1}_{x>0}\, \mathrm{d}x,$$

pour un réel $a > 0$ donné. On note $S = X + Y + Z$, $U = X/S$ et $V = Y/S$.

(a) Donner la loi de S et les moments de S.

(b) Donner la loi de (S, U, V). Quelle indépendance observe-t-on ? Pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}(U^p V^q) = \frac{\mathbb{E}(X^p)\mathbb{E}(Y^q)}{\mathbb{E}(S^{p+q})}.$$

(c) Donner la loi de U.

Exercice 5 Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, on dit que X est inférieure à Y en loi et on note $X \prec Y$ si $\mathbb{E}f(X) \leqslant \mathbb{E}f(Y)$ pour toute fonction réelle croissante positive et bornée.

(a) Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si la fonction de répartition F de X et la fonction de répartition G de Y vérifient $F \geqslant G$.

On dit que X et Y sont égales en loi et on note $X \sim Y$ si $X \prec Y$ et $Y \prec X$.

(b) Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si on peut trouver deux variables aléatoires X' et Y' telles que $X \sim X'$, $Y \sim Y'$ et $X' \leqslant Y'$ presque sûrement.

(c) On suppose que $X \leqslant Y$ presque sûrement et $X \sim Y$. Montrer que $X = Y$ presque sûrement. Indication : écrire $\{X < Y\}$ comme la réunion sur $q \in \mathbb{Q}$ des $\{X < q < Y\}$.

Exercice 6 Pour deux parties A et B de Ω, on définit la différence symétrique de A et B par

$$A_\triangle B = (A \cap (\Omega \backslash B)) \cup (B \cap (\Omega \backslash A)).$$

(a) Si $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de parties de Ω, montrer que l'on a

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n) \backslash (\liminf_{n\to\infty} A_n) \subset \limsup_{n\to\infty} (A_n{}_\triangle A_{n+1}).$$

(b) En déduire que si les A_n sont des éléments de $\mathcal{F}$ et si la série de terme général $\mathbb{P}(A_n{}_\triangle A_{n+1})$ est convergente, la suite A_n admet une limite presque sûre c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbb{P}((\limsup_{n\to\infty} A_n)_\triangle (\liminf_{n\to\infty} A_n)) = 0.$$

Exercice supplémentaire Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. On ne connaît pas les valeurs de a et b mais on observe un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de cette loi et on cherche à estimer la moyenne $\mathbb{E}(X_1) = (a+b)/2$ de cette loi à partir de cet échantillon. On définit S et T par les relations

$$n\,S = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad 2T = \sup\{X_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\} + \inf\{X_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

(a) Montrer que S et T sont consistants, c'est-à-dire que leur espérance vaut bien $m = (a+b)/2$, et que S et T tendent presque sûrement vers m quand n tend vers l'infini.

(b) Calculer la variance de S et celle de T. Conclusion ?

4.5 Devoir à la maison de mars 1994

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Dans tout l'énoncé, X, Y et X_n pour $n \in \mathbb{N}$ désignent des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ fixé.

Exercice 1 On modélise la rupture d'une chaîne moléculaire de longueur X aléatoire par le choix d'un nombre aléatoire Y de loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendant de X. Les longueurs des deux tronçons issus de la rupture sont alors $X_1 = YX$ et $X_2 = (1 - Y)X$.

(a) On suppose que la loi de X admet une densité f sur $\mathbb{R}^+$. Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?

(b) Dans le cas particulier où $f(x) = a^2\, x\, \mathrm{e}^{-ax}$ avec $a > 0$, que peut-on dire du couple (X_1, X_2) ? Ce phénomène peut-il se produire pour d'autres lois de X ?

(c) Soit X_0 la plus petite des deux longueurs X_1 et X_2. Calculer $\mathbb{E}X_0$ en fonction de $\mathbb{E}X$.

Exercice 2 Montrer que pour toute suite X_n de variables aléatoires réelles, il existe une suite de réels $a_n > 0$ telle que $a_n\, X_n$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 3 Un insecte pond des œufs. Le nombre X d'œufs pondus suit une loi de Poisson :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^n/(n!).$$

Chaque œuf éclôt (ou n'éclôt pas) indépendamment de tous les autres et la probabilité p d'éclosion d'un œuf est la même pour chaque œuf. Quelle est la loi du nombre d'œufs éclos ?

Exercice 4 Montrer que la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ vers 0 implique la convergence presque sûre de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ vers 0. Montrer que la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ vers 0 n'implique pas la convergence en probabilité de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ vers 0.

Exercice 5 On rappelle le résultat suivant du cours, qu'il est inutile de redémontrer : si X_n converge en probabilité vers X, il existe une sous-suite $X_{\phi(n)}$ qui converge presque sûrement vers X.

(a) Montrer le résultat plus fort suivant : X_n converge en probabilité vers X si et seulement si on peut extraire de chaque sous-suite $X_{\phi(n)}$ une sous-sous-suite $X_{\phi\circ\psi(n)}$ qui converge presque sûrement vers X.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Borel-mesurable telle que :

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega\,;\, f \text{ est continue en } X(\omega)\}) = 1.$$

Montrer que $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$ dès que X_n converge en probabilité vers X.

(c) On suppose que (X_n) converge en probabilité vers X et que les X_n sont presque sûrement positives. Montrer que X est presque sûrement positive et que l'on a : $\mathbb{E}X \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}X_n$.

(d) Soit (x_n) une suite d'un espace topologique (ou d'un espace métrique si l'on s'y sent plus à l'aise). Montrer que si chaque sous-suite $(x_{\phi(n)})$ contient une sous-sous-suite $(x_{\phi\circ\psi(n)})$ convergeant vers x, alors la suite (x_n) converge vers x.

En déduire que la convergence presque sûre n'est pas topologisable (ni métrisable).

4.6 Examen final de juin 1994

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Dans tout l'énoncé, on considère des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$ fixé.

Exercice 1 **(1)** Soit X une variable aléatoire de loi discrète

$$X(\mathbb{P}) = \sum_{n\geqslant 1} a_n\, \delta_{x_n}.$$

On pose $b_0 = 0$ et $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que si U suit une loi uniforme sur $]0,1[$, la variable aléatoire Y définie ci-dessous suit la même loi que X.

$$Y = \sum_{n\geqslant 1} x_n\, \mathbf{1}(U \in [b_{n-1}, b_n[).$$

(2) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$. Pour $0 < x < 1$, on pose

$$G(x) = \inf\{y \in \mathbb{R}\,;\, F(y) > x\}.$$

Vérifier que G est bien définie sur $]0,1[$. Montrer que si U suit une loi uniforme sur $]0,1[$, $Z = G(U)$ est une variable aléatoire qui suit la même loi que X. Que donne cette méthode dans le cas du (1) ?

Exercice 2 On veut simuler une variable aléatoire de loi densitable de densité f à partir de variables aléatoires de loi densitable de densité g et on suppose qu'il existe $c \geqslant 0$ tel que $f \leqslant c \cdot g$ (dans ce cas, on a forcément $c \geqslant 1$). Pour cela, on définit deux suites indépendantes de variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ telles que les variables aléatoires U_n sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$ et les variables aléatoires Y_n sont indépendantes et de même loi densitable de densité g. On pose alors

$$T = \inf\{n \geqslant 1\,;\, f(Y_n) > c \cdot U_n \cdot g(Y_n)\}.$$

(1) Montrer que T est presque sûrement fini et que T est une variable aléatoire.
(2) On pose $X(\omega) = Y_{T(\omega)}(\omega)$ si $T(\omega)$ est fini et $X(\omega) = 0$ sinon. Montrer que X est une variable aléatoire de loi densitable de densité f.
(3) Calculer la moyenne de T.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que X_n/a_n converge presque sûrement vers 0.

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et de même loi. On suppose que X_1 n'est pas nulle presque sûrement et on pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On définit le processus de comptage $(N_t)_{t\geqslant 0}$ associé à $(X_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$N_t = n \Longleftrightarrow S_n \leqslant t < S_{n+1}.$$

(1) On fixe $t \geqslant 0$. Montrer que N_t est une variable aléatoire finie presque sûrement.

(2) Montrer que N_t est croissante et tend presque sûrement vers l'infini quand t tend vers l'infini.

(3) On suppose que X_1 est intégrable. Montrer que N_t/t converge presque sûrement vers $1/\mathbb{E}(X_1)$.

(4) Si X_1 n'est pas intégrable, montrer que N_t/t converge presque sûrement vers 0.

(5) On suppose dans cette question que la loi de X_1 est $p\,\delta_1 + (1-p)\,\delta_0$ avec $0 < p \leqslant 1$. Calculer $\mathbb{E}(N_t)$ et $\mathbb{E}(N_t^2)$. [Indication : on pourra évaluer $\mathbb{P}(N_t = n)$ puis $\mathbb{E}(N_t+1)$ et enfin $\mathbb{E}((N_t+1)(N_t+2))$.]

(6) On revient au cas général. On choisit un réel $c \geqslant 0$ de sorte que $\mathbb{P}(X_1 \geqslant c) = p$ soit strictement positif et on note N' le processus de comptage associé à la suite de variables aléatoires $X'_n = c\,\mathbf{1}(X_n \geqslant c)$. Calculer $\mathbb{E}(N'_t)$ et $\mathbb{E}(N'^2_t)$.

(7) Comparer N'_t et N_t. Montrer qu'on peut majorer $\mathbb{E}(N_t^2)$ par un multiple constant de t^2 et en déduire que $\mathbb{E}(N_t/t)$ tend vers $1/\mathbb{E}(X_1)$ avec la convention $1/\mathbb{E}(X_1) = 0$ si X_1 n'est pas intégrable.

(8) Démontrer le **théorème de Wald :** soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et intégrables. Soit N une variable aléatoire entière intégrable telle que pour tout $n \geqslant 1$, l'événement $\{N \leqslant n\}$ appartient à la tribu engendrée par les variables aléatoires X_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$. On pose alors

$$S_N \ :\ \omega \mapsto S_{N(\omega)}(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

(a) Montrer que S_N est une variable aléatoire finie presque sûrement.

(b) Montrer que S_N est intégrable et que $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(N)$.

(c) Que peut-on dire si X_1 ou N n'est pas intégrable ?

(9) Montrer que $N_t + 1$ vérifie les hypothèses du théorème de Wald. On a donc

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mathbb{E}(X_1) \cdot (1 + \mathbb{E}(N_t)).$$

(10) A-t-on $\mathbb{E}(X_{N_t+1}) = \mathbb{E}(X_1)$?

Exercice 5 Soit X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable telles que $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ presque sûrement et $\mathbb{E}(X^2|Y) = Y^2$ presque sûrement. Montrer que $X = Y$ presque sûrement.

Exercice 6 Soit X et Y deux variables aléatoires intégrables telles que $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ presque sûrement et $\mathbb{E}(Y|X) = X$ presque sûrement. Montrer que $X = Y$ presque sûrement.

Exercice 7 Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ et Y un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^m$. On suppose que le vecteur (X, Y) est gaussien et que la matrice de covariance C_Y de Y est inversible.
Montrer qu'il existe une matrice A de taille $n \times m$ et un vecteur B de taille n tels que $X - (AY + B)$ soit indépendant de Y et que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(AY + B)$.
En déduire que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|Y)$ est une fonction affine de Y et que $X - \mathbb{E}(X|Y)$ est indépendante de Y.

Exercice 8 **(1)** Soit $(m_n)_{n\geqslant 1}$ et m_∞ des mesures de probabilités densitables de densités respectives $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et f_∞. On suppose que f_n converge vers f_∞ presque partout pour la mesure de Lebesgue. Montrer que m_n converge étroitement vers m_∞.
Indication : on pourra montrer que si g est une fonction intégrable d'intégrale nulle, on a

$$\int |g| = 2 \int (g)^+.$$

(2) Soit X_1 et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes de lois

$$X_1(\mathbb{P})(dx) = f(x)\, \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\, dx, \quad \varepsilon_n(\mathbb{P}) = (\delta_0 + \delta_1)/2.$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$X_{n+1} = (X_n + \varepsilon_n)/2.$$

(a) Déterminer la loi de X_n et montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
(b) Si f_n est la densité de $X_n(\mathbb{P})$, choisir f de sorte que f_n ne converge pas vers $\mathbf{1}_{[0,1]}$ presque partout pour la mesure de Lebesgue.

4.7 Devoir à la maison d'avril 1995

Les deux problèmes sont indépendants.

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Problème Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi intégrable de moyenne $\mathbb{E}(X_1)$. On se propose d'étudier les limites supérieure et inférieure de $|S_n|$ où $S_0 = 0$ et S_n pour $n \geqslant 1$ est la somme des n premiers X_k.

I) On suppose que $\mathbb{E}(X_1) \neq 0$.
Montrer que $|S_n|$ tend presque sûrement vers l'infini.

On suppose désormais que $\mathbb{E}(X_1) = 0$.

II) On suppose dans cette question que les X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli symétriques valant ± 1 avec probabilité $1/2$. On veut montrer que $\limsup_n |S_n| = +\infty$ presque sûrement.
1) Montrer que dans le cas contraire, il existerait $\varepsilon > 0$ et $a \geqslant 0$ tels que

$$\mathbb{P}(\forall n \geqslant 1,\ |S_n| \leqslant a) \geqslant \varepsilon.$$

2) Donner la loi de S_n.
3) Estimer $\mathbb{P}(|S_n| \leqslant a)$.
4) On rappelle la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi\, n}(n/e)^n$. Montrer que $\mathbb{P}(|S_n| \leqslant a)$ tend vers 0 et conclure.

III) Dans cette partie, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes non identiquement nulles, de même loi intégrable, centrée et bornée par c. On veut montrer que le phénomène démontré au (II) est général, c'est-à-dire que $\limsup_n |S_n| = +\infty$ presque sûrement.
1) Montrer que la suite $(\mathbb{E}|S_n|)_n$ est croissante. On pourra utiliser la convexité de $x \mapsto |x|$ et l'indépendance de S_n et X_{n+1}.
2) Imiter la preuve de l'inégalité de Kolmogorov inverse pour montrer

$$\mathbb{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant a) \geqslant 1 - (a+c)/(\mathbb{E}|S_n|).$$

On pourra introduire le temps

$$T = \inf\{k \geqslant 1\,;\, |S_k| \geqslant a\},$$

puis majorer $\mathbb{E}(|S_n|\,\mathbf{1}(T \leqslant n))$ en traitant séparément chaque ensemble $\{T = k\}$, et enfin remarquer que $|S_n| < a$ sur $\{T > n\}$.
3) On suppose dans cette question que la suite $(\mathbb{E}|S_n|)_n$ tend vers l'infini. Pour $a > 0$ et $n \geqslant p \geqslant 1$, on introduit l'ensemble

$$A^a_{n,p} = \{\exists k,\, p < k \leqslant n,\, |S_k - S_p| \geqslant 2a\}.$$

Appliquer le lemme de Borel–Cantelli à certains des $A^a_{n,p}$ pour construire une suite $(k(n))_n$ strictement croissante telle que l'on a presque sûrement à partir d'un certain rang :

$$\exists k \leqslant k(n), \quad |S_k| \geqslant n.$$

4) On suppose dans cette question que la suite $(\mathbb{E}|S_n|)_n$ ne tend pas vers l'infini. On fixe deux réels $a < b$ et on définit une suite $(t_k)_{k\geqslant 0}$ d'instants (aléatoires) en posant $t_0 = 0$ et :

$$t_{2k+1} = \inf\{n \geqslant t_{2k}\,;\, S_n \leqslant a\}, \qquad t_{2k+2} = \inf\{n \geqslant t_{2k+1}\,;\, S_n \geqslant b\}.$$

On appelle les intervalles $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$ les intervalles de traversées montantes de $[a, b]$. On note M_n le nombre de traversées montantes complétées avant n et Δ_n la somme des sauts effectués pendant les traversées montantes avant n, soit :

$$M_n = k \Leftrightarrow t_{2k} \leqslant n < t_{2k+2}, \qquad \Delta_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{n} X_l\,\mathbf{1}(t_{2k-1} < l \leqslant t_{2k}).$$

Montrer que l'événement $\{t_{2k-1} < l \leqslant t_{2k}\}$ ne dépend que de $(X_i)_{i\leqslant l-1}$ et en déduire que $\mathbb{E}(\Delta_n) = 0$. Faire un dessin pour démontrer la relation :

$$\Delta_n \geqslant (b-a)\, M_n - (S_n - a)^-.$$

En déduire une majoration de $\mathbb{E}(M_n)$ indépendante de n puis montrer que le nombre total M_∞ de traversées montantes de $[a,b]$ est presque sûrement fini. En déduire que $(S_n)_n$ converge presque sûrement dans $[-\infty,+\infty]$ puis utiliser le lemme de Fatou pour montrer qu'en fait, $(S_n)_n$ converge presque sûrement vers une limite finie.
Montrer enfin que cette dernière affirmation est absurde.
5) Montrer que la suite $(S_n)_n$ est presque sûrement non bornée et donc que $\limsup_n |S_n| = +\infty$ presque sûrement.

IV) Dans cette partie, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi intégrable et centrée. On veut montrer que $\liminf |S_n|$ est finie presque sûrement et on raisonne par l'absurde ; on suppose donc jusqu'à la fin de l'exercice que

$$\mathbb{P}(\liminf_n |S_n| = +\infty) > 0.$$

1) Montrer que dans ce cas, $|S_n|$ tend vers l'infini presque sûrement.
2) On veut montrer que $\mathbb{P}(\forall n \geqslant 1,\, |S_n| > 0) > 0$. Pour cela, on suppose le contraire et on introduit, pour tout $n \neq m$, l'événement

$$A_{n,m} = \{S_n = S_m\}.$$

a) Montrer que $\mathbb{P}(\bigcup_{m>n} A_{n,m}) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$.
b) Pour $k \geqslant 1$, exprimer l'événement « il y a au moins k indices strictement positifs n_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, distincts tels que $S_{n_i} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ » en fonction des $A_{n,m}$, $n \neq m$. On appelle cet événement « au moins k retours en 0 ».
c) En déduire la probabilité de « au moins k retours en 0 » puis de « une infinité de retours en 0 ».
d) Conclure à une contradiction. (On rappelle que l'on a démontré au (1) que $|S_n|$ tend vers l'infini presque sûrement.)

On a donc montré $\mathbb{P}(\forall n \geqslant 1,\, |S_n| > 0) > 0$.

3) Déduire du (2) qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \varepsilon, \qquad A = \{\forall n \geqslant 1,\, |S_n| \geqslant \varepsilon\}.$$

4) Pour $n \geqslant 0$, on pose

$$T_n = \sum_{k=2}^{n+1} X_k, \quad E_n = \bigcup_{k=1}^{n}]S_k - \frac{\varepsilon}{2}\,;\, S_k + \frac{\varepsilon}{2}[, \quad F_n = \bigcup_{k=1}^{n}]T_k - \frac{\varepsilon}{2}\,;\, T_k + \frac{\varepsilon}{2}[.$$

Enfin, K_n, resp. L_n, est la mesure de Lebesgue de E_n, resp. de F_n, et B est l'ensemble analogue de A pour la suite des $(T_n)_n$ c'est-à-dire

$$B = \{\forall n \geqslant 1,\, |T_n| \geqslant \varepsilon\}.$$

Montrer que : $K_{n+1} - L_n \geqslant \varepsilon \mathbf{1}_B$.
5) Montrer que $\mathbb{E}(L_n) = \mathbb{E}(K_n)$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$.
En déduire successivement que $\varepsilon\, \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{E}(K_{n+1} - K_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.
En déduire que $\varepsilon\, \mathbb{P}(A) \leqslant \liminf \mathbb{E}(K_n/n)$.
6) Montrer en utilisant (3–5) qu'il suffit de prouver que $\mathbb{E}(K_n/n)$ tend vers 0 pour aboutir à une

contradiction.
7) Appliquer la loi des grands nombres à S_n/n pour montrer que K_n/n tend presque sûrement vers 0, et conclure.

[Certaines étapes de la preuve sont tirées de *Probability theory, an analytic view* de David Williams, Cambridge, 1993. L'idée de la démonstration du (IV) est due à Yves Guivarc'h, qui l'utilise dans un cadre plus général.]

Exercice Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs entières et de même loi. Si l'on pose $p_k = 1/(2^k\, k\,(k+1))$ pour tout $k \geqslant 1$, alors la loi des X_n est donnée par

$$X_n(\mathbb{P}) = \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\right)\delta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\,\delta_{2^k}.$$

On notera S_n la somme des n premiers X_k et on se donne enfin une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels positifs.
1) Montrer que $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
2) On fixe un entier $n \geqslant 2$ et pour $k \leqslant n$, on note $X_k^{(n)}$ la variable aléatoire tronquée suivante :

$$X_k^{(n)} = X_k\,\mathbf{1}(X_k \leqslant a_n).$$

Estimer la probabilité que $(X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}) = (X_1, \ldots, X_n)$.
On note $\log_2$ le logarithme de base 2.
Montrer que pour $a_n = n/\log_2(n)$, cette probabilité tend vers 1.
3) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ et un réel $a > 0$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \mathbb{E}(X_1^{(n)}) \leqslant 1 - 1/\log_2(n), \quad \mathrm{var}(X_1^{(n)}) \leqslant a\,n/(\log_2(n))^3.$$

4) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k^{(n)} - n\,\mathbb{E}(X_1^{(n)})\right| \leqslant \varepsilon \frac{n}{\log_2(n)}\right)$$

tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
5) En déduire que

$$\mathbb{P}(S_n - n \leqslant -(1-\varepsilon)\,n/\log_2(n))$$

tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
6) Pensez-vous que le jeu consistant à miser 1 et à gagner X_n est équitable ?

4.8 Examen partiel de mars 1995

L'énoncé est composé d'exercices indépendants, à l'exception du résultat de l'exercice 4.8 qui est utilisé dans la question (2) de l'exercice 4.8 : on pourra donc admettre ce résultat pour résoudre l'exercice 4.8. La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction des copies.

On se donne un espace de probabilité $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$.

1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X + Y$ est intégrable. Montrer que X et Y sont intégrables.

2 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois de Bernouli de paramètres p_n avec $0 \leqslant p_n \leqslant 1$ données par

$$X_n(\mathbb{P}) = p_n\,\delta_{-1} + (1-p_n)\,\delta_1.$$

On pose alors :

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

Sous quelle condition portant sur la suite $(p_n)_n$, la suite $(Y_n)_n$ converge-t-elle presque sûrement ? Même question pour la convergence en probabilité et la convergence dans L^1.

3 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que la loi du couple (X, Y) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, densité donnée par

$$\mathrm{e}^{-y}\,\mathbf{1}_D(x,y), \quad \text{avec} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leqslant x \leqslant y\}.$$

1) Vérifier que la formule ci-dessus définit bien une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2) Donner la loi de X. Donner la loi de Y.
3) Parmi les couples suivants, préciser quels sont ceux qui sont constitués de deux variables aléatoires indépendantes : (X, Y), $(X, Y - X)$ et $(X/Y, Y)$.

4 Soit X une variable aléatoire de carré intégrable telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{E}(X^2) = a^2$. Montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1/2) \geqslant 1/(4a^2).$$

On pourra commencer par démontrer que

$$2 \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant 1/2) + 2\,\mathbb{E}(X\,;\, X \geqslant 1/2).$$

5 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements et c un réel positif. On suppose que pour toute paire d'indices $n \neq m$, on a :

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_m) \leqslant c\,\mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(A_m).$$

On suppose également que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge et on veut montrer un analogue du *lemme de Borel–Cantelli,* à savoir que l'événement « A_n est réalisé une infinité de fois » est de probabilité strictement positive. Pour cela, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}(A_k).$$

1) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}(S_n^2)$ en fonction des A_k.
2) Utiliser le résultat de l'exercice 4.8 pour en déduire une minoration de

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \mathbb{E}(S_n)/2).$$

3) Montrer que si $\mathbb{P}(S_n \to +\infty) = 0$, alors $\mathbb{P}(\exists n \geqslant 1,\, S_n \geqslant t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.
4) En déduire que $\mathbb{P}(S_n \to +\infty) = 0$ est impossible et conclure.
5) Généraliser la méthode de l'exercice 4.8 afin de montrer, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, que l'on a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant t) \geqslant (1-t)^2/a^2.$$

6) Déduire du résultat de la question (5) que la probabilité de l'événement « A_n est réalisé une infinité de fois » vaut au moins $1/c$.

6 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires et N une variable aléatoire à valeurs entières strictement positives. On pose

$$S_N : \omega \to \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

1) Montrer que S_N est une variable aléatoire.

Dans le reste de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de carré intégrable et que N est de carré intégrable et indépendante de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

2) Montrer que S_N est de carré intégrable. Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ et $\mathbb{E}(S_N^2)$.
3) Soit $(N_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les hypothèses de N et qui converge presque sûrement vers l'infini. Étudier la convergence presque sûre de la suite $(S_{N_k}/N_k)_{k\geqslant 1}$.
4) Étudier la convergence dans L^2 de la suite $(S_{N_k}/N_k)_{k\geqslant 1}$.

4.9 Examen final de juin 1995

L'énoncé est composé d'exercices indépendants. La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction des copies. Des dessins pourront, sans remplacer les démonstrations, servir à les appuyer.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Exercice 1 La loi du couple (X, Y) est portée par le disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et admet une densité de la forme $c \cdot (x + 1)$, $c > 0$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur le disque. Calculer c. Donner la loi de Y sachant X. Donner la loi de X sachant Y.

Exercice 2 On note $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ et on définit cent variables aléatoires $(X_n)_{n\leqslant 100}$ prenant leurs valeurs dans S comme suit : la loi de X_1 est uniforme sur S ; la loi de X_2 sachant X_1 est uniforme sur $S \setminus \{X_1\}$; de même, la loi de X_n sachant $X_1, \ldots, X_{n-1}$, est uniforme sur $S \setminus \{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$.

Donner la loi de X_{97}.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire de carré intégrable telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{E}(X^2) = a^2$. Montrer l'inégalité :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1/2) \geqslant 1/(4a^2).$$

On pourra commencer par démontrer : $1 \leqslant (1/2)\,\mathbb{P}(X \leqslant 1/2) + \mathbb{E}(X\,;\, X \geqslant 1/2)$.

Montrer de même, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}(X \geqslant t) \geqslant (1 - t)^2/a^2.$$

Exercice 4 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ et $(B_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note :

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} A_k, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} B_k, \qquad Z_n = (X_n, Y_n).$$

1) La suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ peut modéliser les positions successives d'une marche au hasard sur $\mathbb{Z}^2$ issue de $(0,0)$; on pose $Z_0 = (0,0)$. Montrer alors que les variables aléatoires $Z_n - Z_{n-1}$ sont indépendantes de même loi pour $n \geqslant 1$ et donner une expression de cette loi.
En déduire un modèle pour la marche au hasard sur $\mathbb{Z}^2$ issue de $(0,0)$ telle que l'on marche d'un sommet (x,y) à l'un des quatre sommets voisins $(x+1,y)$, $(x-1,y)$, $(x,y+1)$ et $(x,y-1)$ avec autant de chances de choisir chacun des quatre voisins.
2) Dans ce qui suit, on fixe un entier $a \geqslant 0$ et on note

$$\tau_a = \inf\{n \geqslant 0,\, Y_n = a\},$$

si cet ensemble n'est pas vide et $\tau_a = +\infty$ sinon. On va prouver que τ_a est fini presque sûrement. Montrer que dans le cas contraire, $\sup_{n\geqslant 1} Y_n$ est fini presque sûrement.
En déduire l'existence d'un réel k tel que tout $n \geqslant 1$ vérifie :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant k) \geqslant 3/4.$$

Appliquer un théorème de la limite centrale à la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ pour aboutir à une contradiction.
3) On pose $H_a = X_{\tau_a}$ et pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{F}_n$ la sous–tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les A_k et B_k pour $k \leqslant n$. Montrer que τ_a et H_a sont des variables aléatoires. On pourra commencer par montrer que $\{\tau_a = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

La variable aléatoire H_a représente l'abscisse du point où la marche au hasard $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ issue de $Z_0 = (0,0)$ atteint pour la première fois la droite horizontale d'équation $\{y = a\}$. Le but du problème est d'étudier, quand a devient grand, le comportement asymptotique de la loi de H_a convenablement renormalisée.

4) Soit $c \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un réel $d \geqslant 0$ tel que $M_n = \exp(cY_n - dn)$ vérifie :

$$\mathbb{E}(M_p \,|\, \mathcal{F}_n) = M_n,$$

pour tout $p \geqslant n$ et donner une expression de d. On pourra commencer par traiter le cas $p = n+1$.
5) Montrer que, pour la valeur de d trouvée en (4), on a : $\mathbb{E}(M_{n\wedge\tau_a}) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. On pourra découper cette intégrale suivant les valeurs de τ_a.
6) Calculer $\mathbb{E}(\exp(-d\tau_a))$ pour tout $d \geqslant 0$. On pourra démontrer que la suite des $M_{n\wedge\tau_a}$ converge presque sûrement et utiliser la relation du (4) donnant l'espérance conditionnelle de M_p ainsi que la propriété $\{\tau_a = n\} \in \mathcal{F}_n$ démontrée au (3).
7) Déduire de (6) la valeur de $\mathbb{E}(\exp(itH_a))$ pour t réel. On pourra exprimer le résultat sous la forme $\exp(-ca)$ et montrer comment on obtient c à partir de t.
8) On fixe un réel $\alpha > 0$ et on note $[n\alpha]$ la partie entière de $n\alpha$. Montrer enfin que les variables aléatoires $n^{-1}\, H_{[n\alpha]}$ convergent en loi vers une loi de Cauchy de paramètre α.
9) On note $\theta_a \in]0,\pi[$ la valeur de l'angle formé par l'axe Ox et la droite OH_a. Montrer que θ_a converge en loi quand a tend vers l'infini vers une loi que l'on précisera.
10) Pour $a \geqslant 1$ entier, on note τ_{-a} le temps d'atteinte de $-a$ par Y_n et $K_a = X_{\tau_a\wedge\tau_{-a}}$ l'abscisse du lieu d'atteinte de la double barrière formée des droites $\{y = \pm a\}$. Imiter les questions (5–8) pour montrer que les variables aléatoires $n^{-1}\, K_{[n\alpha]}$ convergent en loi vers une loi dont on donnera simplement la fonction caractéristique.

4.10 Examen partiel d'avril 1996

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les exercices sont indépendants les uns des autres et on peut résoudre une question en utilisant les résultats des questions précédentes.

Exercice 1 Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $[x]$ est la partie entière de x. On note log la fonction logarithme de base 2. On a donc $\log(2^x) = x$ pour tout x réel. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $b(n) = [n \log n]$.

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli donnée par :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2.$$

Pour $n \geqslant 1$, on considère la longueur L_n du segment formé de signes 1 dans la suite des $(X_k)_k$ considérée à partir du temps n. Ainsi, $L_n : \Omega \to \mathbb{N}$ est définie par $L_n(\omega) = 0$ si $X_n(\omega) = 0$ et, pour un entier $p \geqslant 1$, $L_n(\omega) = p$ si $X_k(\omega) = 1$ pour $n \leqslant k < n + p$ et si $X_{n+p}(\omega) = 0$.

(1) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que L_n est presque sûrement finie, et que L_n est une variable aléatoire. Pour un entier $p \geqslant 0$, calculer $\mathbb{P}(L_n = p)$ et $\mathbb{P}(L_n \geqslant p)$. En déduire que les variables aléatoires L_n, $n \geqslant 1$, ont toutes la même loi et donner cette loi.

On se propose désormais de démontrer la propriété suivante :

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{L_n}{\log n} = 1 \text{ presque sûrement.} \tag{i}$$

(2) Pour $a > 1$, on note $A_n(a)$ l'événement :

$$A_n(a) = \{L_n \geqslant a \log n\}.$$

Montrer que : $\mathbb{P}(A_n(a)) \leqslant n^{-a}$. (On pourra se contenter de : $\mathbb{P}(A_n(a)) \leqslant 2\, n^{-a}$.)

(3) En déduire que la limite supérieure de $L_n / \log n$ est presque sûrement inférieure à a, puis qu'elle est presque sûrement inférieure à 1.

(4) Pour $a < 1$, soit $C_n(a)$ l'événement suivant :

$$C_n(a) = \{L_{b(n)} = [a \log b(n)] + 1\}.$$

Montrer que : $\mathbb{P}(C_n(a)) \geqslant \frac{1}{4}\, (n \log n)^{-a}$.

(5) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $b(n+1) > b(n) + [a \log b(n)] + 1$, pour tout $n \geqslant n_0$.

(6) En déduire que les événements $(C_n(a))_{n \geqslant n_0}$ sont indépendants.

(7) Montrer que, presque sûrement, $C_n(a)$ est réalisé pour une infinité d'indices n.

(8) En déduire que la limite supérieure de $L_n / \log n$ est presque sûrement supérieure à a, puis qu'elle est presque sûrement supérieure à 1, ce qui termine la preuve de l'assertion (i).

Exercice 2 Une boîte contient n jetons blancs et n jetons noirs. On choisit un des jetons au hasard et on le place dans une deuxième boîte. Puis on choisit à nouveau un jeton au hasard parmi les $2n - 1$ restants et on le place dans la deuxième boîte. On répète l'opération jusqu'à ce que la première boîte soit vide. Montrer que la probabilité pour qu'il y ait toujours eu au moins autant de jetons blancs que de jetons noirs dans la deuxième boîte au cours du transfert vaut $1/(n + 1)$.

On pourra représenter l'opération totale par un chemin du plan reliant les points $(0, 0)$ et $(2n, 0)$, et dénombrer certains ensembles de chemins.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et telle que $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_1^n X_k$. Pour tout $t \geqslant 0$, on définit $N_t = \sup(n \geqslant 0, S_n \leqslant t)$. On appelle $(N_t)_{t \geqslant 0}$ le processus de comptage associé.

(1) On fixe $t \geqslant 0$. Montrer l'égalité entre ensembles $\{N_t = n\} = \{S_n \leqslant t < S_{n+1}\}$. Montrer que N_t est presque sûrement fini et que N_t est une variable aléatoire.

(2) Montrer que l'application $t \mapsto N_t$ est croissante et que, presque sûrement, N_t tend vers l'infini quand t tend vers l'infini.

(3) On suppose que X_1 est intégrable. Montrer que, presque sûrement, N_t/t tend vers $1/E(X_1)$ quand t tend vers l'infini. Que se passe-t-il quand X_1 n'est pas intégrable ?

(4) Dans le reste de l'exercice, on étudie la convergence de N_t/t au sens de la convergence L^1. Soit $0 < p < 1$ et $(X_n^0)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli avec $\mathbb{P}(X_1^0 = 0) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1^0 = 1)$ et soit N^0 le processus de comptage associé. Calculer les quantités $\mathbb{P}(N_t^0 = n)$, $\mathbb{E}(N_t^0 + 1)$ et $\mathbb{E}((N_t^0 + 1)(N_t^0 + 2))$.

(5) Soit $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_1 \geqslant a) = p > 0$. On pose $X'_n = a\,\mathbf{1}_{X_n \geqslant a}$ et on note $(N'_t)_t$ le processus de comptage associé. Montrer que $N_t \leqslant N'_t$.

(6) En déduire que $\mathbb{E}(N_t^2)/t^2$ est borné. On suppose que X_1 est intégrable ; montrer que N_t/t tend vers $1/\mathbb{E}(X_1)$ dans L^1. On suppose que X_1 n'est pas intégrable ; montrer que N_t/t tend vers 0 dans L^1.

4.11 Corrigé de l'examen partiel d'avril 1996

Exercice 1 (1) Soit $k \geqslant 0$. Par définition : $\{L_n > k\} = \{X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+k} = 1\}$. On en déduit que $\{L_n > k\}$ est mesurable pour tout $k > 0$, donc que L_n est mesurable. On en déduit aussi :

$$\mathbb{P}(L_n > k) = \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\ldots\mathbb{P}(X_{n+k} = 1) = 1/2^{k+1},$$

ce qui montre que $\mathbb{P}(L_n > k)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, donc que L_n est fini presque sûrement, et qui donne les valeurs cherchées :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = 1/2^{k+1}, \qquad \mathbb{P}(L_n \geqslant k) = 1/2^k.$$

On voit que les L_n ont la même loi.

(2) $\mathbb{P}(A_n(a)) \leqslant \mathbb{P}(L_n \geqslant [a \log n]) = 1/2^{[a \log n]} \leqslant 1/2^{a \log n - 1} = 2/n^a$, d'après ce qui précède et parce que $a \log n \geqslant [a \log n]$, puis parce que $[a \log n] \geqslant a \log n - 1$.

Remarque : en fait, $A_n(a) = \{L_n \geqslant n(a)\}$ pour un entier $n(a) \geqslant a \log n$ donc $\mathbb{P}(A_n(a)) \leqslant 1/2^{n(a)} \leqslant 1/n^a$.

(3) La somme des $2/n^a$ converge car $a > 1$ donc le lemme de Borel–Cantelli (partie facile) montre que la limite supérieure des $A_n(a)$ est négligeable. Presque sûrement, $A_n(a)$ n'est pas réalisé, à partir d'un certain rang, donc, pour tout ω en dhors d'un négligeable, il existe $n_0(\omega)$ tel que $L_n(\omega) < a \log n$ pour tout $n \geqslant n_0(\omega)$. En particulier, la limite supérieure de $L_n(\omega)/\log n$ est inférieure à a.

On applique ce qui précède à $a_p = 1 + 1/p$. Ceci fournit un négligeable N_p sur le complémentaire duquel $\limsup L_n/\log n \leqslant a_p$. Sur le complémentaire du négligeable réunion des N_p, on a donc :

$$\limsup L_n/\log n \leqslant 1.$$

(4) $\mathbb{P}(C_n(a)) = 1/2^{[a \log b(n)]+1} \geqslant 1/2^{a \log b(n)+1} = 1/(2b(n)^a) \geqslant 1/(2(n \log n)^a)$ grâce aux majorations élémentaires $[a \log b(n)] \leqslant a \log b(n)$ et $b(n) \leqslant n \log n$.

Remarque : l'énoncé est donc vrai avec $1/(2(n \log n)^a)$ au lieu de $1/(4(n \log n)^a)$.

(5) $b(n+1) - b(n) \sim \log n$, $\log b(n) \sim \log n$ et $a < 1$ donc la différence entre les deux membres de l'inégalité demandée est équivalente à $(1-a)\log n$ qui tend vers l'infini, donc la différence est strictement positive à partir d'un certain rang.

(6) $C_n(a)$ est mesurable par rapport à la famille des X_k pour k dans l'intervalle $[b(n), b(n)+[a\log b(n)]+1]$. Les ensembles d'indices sont disjoints pour $n \geqslant n_0$ donc le théorème des coalitions donne la conclusion.

(7-8) La somme des $1/(4(n\log n)^a)$ diverge car $a < 1$ donc le lemme de Borel-Cantelli (partie difficile) appliqué aux $(C_n(a))_{n\geqslant n_0}$ montre que la limite supérieure des $C_n(a)$ est presque sûrement réalisée. On copie le raisonnement de la question (4) pour conclure. En effet, sur $C_n(a)$, on a $L_k/\log k \geqslant a - 1/\log k$ pour un entier $k = b(n)$. De plus $\log b(n)$ tend vers l'infini, donc sur la limite supérieure des $C_n(a)$, la limite supérieure de $L_k/\log k$ vaut au moins a. Le reste est sans changement.

Exercice 2 Il s'agit d'imiter la démonstration du théorème de Kolmogorov-Smirnov. Une réalisation du transfert des $2n$ jetons est un chemin affine par morceaux reliant les points $(0,0)$ et $(2n,0)$ dans le plan. Si (x_k, k) est un point du chemin et si le $k+1$-ème jeton transféré est blanc (resp. noir), alors $(x_{k+1}, k+1)$ est un point du chemin avec $x_{k+1} = x_k + 1$ (resp. $x_{k+1} = x_k - 1$). Il faut compter les chemins ne touchant pas la droite $\{y = -1\}$. Les cas défavorables sont donc en bijection, par la réflexion habituelle, avec les chemins reliant les points $(0,0)$ et $(2n,-2)$. Il s'agit de choisir $n+1$ descentes parmi $2n$, donc le cardinal est $\binom{2n}{n+1}$. Le nombre total de chemins est $\binom{2n}{n}$ donc la probabilité de succès est : $1 - \binom{2n}{n+1}/\binom{2n}{n} = 1/(n+1)$.

Exercice 3 (1) Soit $x > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_1 \geqslant x) > 0$. Par Borel-Cantelli non-trivial, il existe presque sûrement une infinité de n tels que $X_n \geqslant x$, donc S_n tend vers l'infini presque sûrement.

Or, $\{N_t = +\infty\} = \{\sup_n S_n \leqslant t\}$ donc N_t est fini presque sûrement. La mesurabilité est immédiate à partir de $\{N_t \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\}$.

(2) Si $N_t \geqslant n$, $S_n \leqslant t$ donc $S_n \leqslant s$ pour tout $s \geqslant t$, donc $N_s \geqslant n$. D'où la croissance. Si N_t ne tend pas vers l'infini, $N_t \leqslant k$ pour un entier k donné et pour tout t. Donc $S_{k+1} > t$ pour tout t. Or, S_{k+1} est fini presque sûrement, donc l'événement $\{\forall t \geqslant 0,\, N_t \leqslant k\}$ est négligeable pour tout k.

(3) Si X_1 est intégrable, la LGN indique que S_n/n tend vers $c = \mathbb{E}(X_1)$. Ainsi, $c - \varepsilon \leqslant S_n/n \leqslant c + \varepsilon$ pour n grand, ce qui signifie que N_t/t appartient à l'intervalle $[1/(c+\varepsilon), 1/(c-\varepsilon)]$ pour t grand.

Si X_1 n'est pas intégrable, X_1 est positive donc S_n/n tend vers l'infini et le même raisonnement montre que N_t/t tend vers 0 presque sûrement.

(4) Les quantités demandées ne dépendent que de la partie entière de t. Soit t un entier. S_n^0 est une variable binômiale donc

$$\mathbb{P}(N_t^0 = n) = \mathbb{P}(S_n^0 = t, X_{n+1}^0 = 1) = \binom{n}{t} (1-p)^{t+1} p^{n-t}.$$

En particulier, la somme sur $n \geqslant t$ des membres de droite vaut 1. Il vient :

$$\mathbb{E}(N_t^0 + 1) = (t+1)/(1-p), \quad \mathbb{E}((N_t^0+1)(N_t^0+2)) = (t+1)(t+2)/(1-p)^2,$$

grâce à la remarque ci-dessus et aux changements de variables suivants :

$$(n+1)\binom{n}{t} = (t+1)\binom{n+1}{t+1}, \quad (n+1)(n+2)\binom{n}{t} = (t+1)(t+2)\binom{n+2}{t+2}.$$

(5) $X_n' \leqslant X_n$ donc $S_n' \leqslant S_n$ donc $\{N_t \geqslant n\} = \{S_n \leqslant t\} \subset \{S_n' \leqslant t\} = \{N_t' \geqslant n\}$.

(6) N' correspond à un N^0. D'après (4), $\mathbb{E}((N'_t+1)(N'_t+2))$ est borné par un multiple de $(t+1)(t+2)$. D'après (5), $\mathbb{E}(N_t^2)$ aussi donc $\mathbb{E}(N_t^2)/t^2$ est borné pour t grand.

Cas intégrable : $(N_t/t)_{t\geqslant 1}$ est bornée dans L^2 donc uniformément intégrable donc converge dans L^1.

Cas non intégrable : N_t/t est majoré par N_t^x/t où N^x est associé aux $X_n^x = \inf(X_n, x)$. Donc la limite supérieure de $\mathbb{E}(N_t/t)$ est au plus $1/\mathbb{E}(\inf(X_1, x))$, qui tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

4.12 Examen final de juin 1996

Question de cours Différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires ont été introduits dans le cours. Énoncer (ou représenter par un dessin clair) les implications et les implications partielles qui les relient.

Dans la suite de l'énoncé, on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sur lequel toutes les variables aléatoires sont définies.

Problème Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi d'ordre 2, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

On fixe un réel $a > 0$ et on définit une application $\tau : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ en posant :

$$\tau(\omega) = \min\{n \geqslant 1\,;\, S_n(\omega) \geqslant a\}$$

si cet ensemble n'est pas vide, et $\tau(\omega) = +\infty$ sinon. On pose ensuite $S_\tau(\omega) = S_n(\omega)$ si $\tau(\omega) = n$ et $S_\tau(\omega) = 0$ si $\tau(\omega) = +\infty$.

(1) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que les variables aléatoires X_n et $\mathbf{1}_{\{\tau\geqslant n\}}$ sont indépendantes.

(2) Dans cette question, on suppose que τ est intégrable.

(i) Montrer que τ est finie presque sûrement.

(ii) Montrer l'égalité : $S_\tau = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\, \mathbf{1}_{\{\tau\geqslant n\}}$ presque sûrement.

(iii) Montrer que : $\mathbb{E}(|S_\tau|) \leqslant \mathbb{E}(|X_1|)\, E(\tau)$ et $\mathbb{E}(S_\tau) = m\, \mathbb{E}(\tau)$.

(3) On suppose $m > 0$. Montrer que, presque sûrement, Z_n tend vers $+\infty$.
Quel résultat obtient-on si $m < 0$?

Dans les questions (4) et (5), on suppose $m = 0$.

(4) (i) Montrer que $Z = \limsup Z_n$ est presque sûrement constante.

(ii) Déduire du théorème de la limite centrale que $Z = +\infty$ presque sûrement.

(5) (i) Montrer en utilisant (4) (ii) que τ est fini presque sûrement.
(ii) Montrer en utilisant (2) (iii) que $\mathbb{E}(\tau) = +\infty$.

Dans la question (6), on revient au cas général : m peut être non nul.

(6) On étudie à présent le temps de sortie de $]-a, +a[$, défini par :

$$\varrho(\omega) = \min\{n \geqslant 1\,;\, |S_n(\omega)| \geqslant a\}$$

si cet ensemble n'est pas vide, et $\varrho(\omega) = +\infty$ sinon. On va montrer que ϱ est intégrable.

(i) Montrer que ϱ est fini presque sûrement.

(ii) Pour $n \geqslant 1$, montrer que : $\{\rho > n\} \subset \{\max\{|X_k|\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\} < 2a\}$.

(iii) En déduire que ϱ est intégrable si $\mathbb{P}(|X_1| \geqslant 2a) > 0$.

(iv) Modifier l'argument de (ii) et (iii) pour montrer que ϱ est intégrable dans tous les cas.

On a en fait montré un résultat plus fort : pour $c > 0$ suffisamment petit et dépendant de la loi de X_1, $\exp(c\varrho)$ est intégrable. Le temps de sortie bilatère ϱ est donc beaucoup plus petit en loi que le temps de sortie unilatère τ.

Exercice 1 Soit $x \geqslant 0$ un réel et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 : on suppose donc que $\mathbb{P}(X \geqslant t) = \mathrm{e}^{-t}$ pour tout $t \geqslant 0$.

Calculer $\mathbb{E}(X|\min(X,x))$ et $\mathbb{E}(X|\max(X,x))$.

Exercice 2 On note $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ la loi gaussienne réelle de moyenne m et de variance σ^2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que la loi de X_1 est $\mathcal{N}(0,1)$, et que, pour $n \geqslant 1$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, …, $X_n = x_n$, est $\mathcal{N}(x_n, 1)$.

(1) Déterminer la loi de X_n. On pourra utiliser des fonctions caractéristiques.

(2) Montrer que le vecteur $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,C)$, où C est la matrice $n\times n$ de terme général $C_{k,i} = \min(k,i)$.

(3) En déduire que la variance de $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. On rappelle que cette somme vaut $n(n+1)(2n+1)/6$.

(4) Montrer que $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n^{3/2}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1/3)$.

(5) Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n(\mathbb{P}) = Y_n(\mathbb{P})$. Montrer que $(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)/n^{3/2}$ converge en loi et dans L^2 vers 0.

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X, Y et $X+Y$ ont la même loi μ.

Déterminer μ.

Exercice 4 Pour toute variable aléatoire X, on note : $N(X) = \mathbb{E}\left(\dfrac{|X|}{1+|X|}\right)$.

Montrer que $N(X)$ existe toujours.

Soit X et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires. Montrer que X_n converge vers X en probabilité si et seulement si $N(X_n - X) \to 0$.

Exercice 5 On fixe un entier $n \geqslant 1$ et on note $N_k = [1,k] \cap \mathbb{N}$. On se donne 100 variables aléatoires $(X_k)_{k\in N_{100}}$ à valeurs dans N_{100} telles que :

– la loi de X_1 est uniforme sur N_{100} ;

– pour $k \in N_{99}$, la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant X_1, X_2, ..., X_k est uniforme sur l'ensemble :

$$N_{100} \setminus \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}.$$

Calculer la loi de X_{94}.

4.13 Supplément à l'examen de juin 1996

Problème 2 (Théorème de Choquet–Deny)

Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On rappelle que le support de μ est constitué des réels x tels que $\mu(V) > 0$ pour tout voisinage V de x. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on note Tf la fonction :

$$Tf(x) = \int f(x+y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

On dit que f est μ–harmonique si f est mesurable, bornée, et si $Tf = f$.

Étant donnée une suite croissante $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\geqslant 0}$, une suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires intégrables est une $\mathcal{G}$–martingale si et seulement si M_n est $\mathcal{G}_n$–mesurable et $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{G}_n) = M_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Partie A

Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une $\mathcal{G}$–martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}(M_n^2)$ est fini.

(1) Montrer que $\mathbb{E}(M_{n+p}|\mathcal{G}_n) = M_n$ pour n et $p \geqslant 0$. Montrer que :

$$\mathbb{E}((M_{n+p} - M_n)^2) = \mathbb{E}(M_{n+p}^2) - \mathbb{E}(M_n^2).$$

(2) Montrer que la suite des $\mathbb{E}(M_n^2)$ converge. En déduire qu'il existe une variable aléatoire $M_\infty \in L^2(\Omega)$ telle que M_n converge vers M_∞ dans $L^2(\Omega)$ et telle que $\mathbb{E}(M_\infty) = \mathbb{E}(M_0)$.

[Et la suite ?]

Suite du problème du sujet

On suppose désormais que $|X_1| \leqslant 2a$ presque sûrement.

(iii) Calculer : $\mathbb{E}(S_{n+1}^2 \,|\, X_1, X_2, \ldots, X_n)$. On pourra exprimer le résultat comme une fonction de S_n.

(iv) En déduire, pour $n \geqslant 0$: $\mathbb{E}(S_{\min(n,\varrho)}^2 - \min(n,\varrho)\,\sigma^2) = 0$.
On pourra montrer que ϱ vérifie la propriété démontrée au (1) pour τ, puis raisonner par récurrence sur $n \geqslant 0$.

(v) Montrer enfin que : $\mathbb{E}(\varrho) \leqslant 9a^2/\sigma^2$.

4.14 Examen partiel d'avril 1997

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les exercices sont indépendants les uns des autres et on peut résoudre une question en utilisant les résultats des questions précédentes.

Exercice 1 On modélise la rupture d'une chaîne moléculaire de longueur aléatoire X par le choix d'un nombre aléatoire Y de loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendant de X. Les longueurs des tronçons issus de la rupture sont alors $X_1 = YX$ et $X_2 = (1 - Y)X$.

(a) On suppose que la loi de X admet une densité f sur $\mathbb{R}^+$. Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?

(b) Dans le cas particulier où $f(x) = a^2\, x\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathbf{1}_{x \geqslant 0}$ avec $a > 0$, que peut-on dire du couple (X_1, X_2) ? Ce phénomène peut-il se produire pour d'autres lois de X ?

(c) Soit X_0 la plus petite des deux longueurs X_1 et X_2. Calculer l'espérance de X_0 en fonction de celle de X.

(d) On itère le procédé. On introduit donc une suite $(Y_n)_n$ de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendantes de X, puis on pose $L_0 = X$ et $L_{n+1} = Y_{n+1}\, L_n$. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.

(e) On note $Z_n = -\log Y_n$. Montrer que $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi L^4 que l'on précisera. En déduire un équivalent presque sûr de $Z_1 + \cdots + Z_n$, puis que,, presque sûrement, $L_n \leqslant (\frac{2}{5})^n$ pour n assez grand.

(f) Les résultats de (d) et (e) sont-ils compatibles ?

Exercice 2 Montrer que pour toute suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles, il existe une suite de réels $a_n > 0$ telle que $(a_n\, X_n)_n$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 3 Pour toute variable aléatoire X, on note : $N(X) = E\left(\dfrac{|X|}{1 + |X|}\right)$.

(a) Montrer que $N(X)$ existe toujours.
(b) Soit X et $(X_n)_{n \geqslant 1}$ des variables aléatoires. Montrer que X_n converge vers X en probabilité si et seulement si $N(X_n - X) \to 0$.

Exercice 4 On veut simuler une variable aléatoire dont la loi admet pour densité la fonction f à partir d'une infinité de variables aléatoires dont la loi admet pour densité la fonction g, dans le cas où il existe $c \geqslant 0$ tel que $f \leqslant c \cdot g$. Une situation typique où cette procédure est appliquée est celle où la fonction f est plus compliquée que la fonction g.
(a) Montrer que : $c \geqslant 1$.
On définit deux suites indépendantes de variables aléatoires $(U_n)_{n \geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant les propriétés suivantes. Les variables aléatoires U_n sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Les variables aléatoires Y_n sont indépendantes et leur loi admet pour densité la fonction g. On pose alors :

$$T = \inf\{n \geqslant 1\, ;\, f(Y_n) > c \cdot U_n \cdot g(Y_n)\}$$

si cet ensemble n'est pas vide, et $T = +\infty$ sinon.
(b) Montrer que T est presque sûrement fini et que T est une variable aléatoire.
(c) On pose $X(\omega) = Y_{T(\omega)}(\omega)$ si $T(\omega)$ est fini et $X(\omega) = 0$ sinon. Montrer que X est une variable aléatoire et que sa loi admet pour densité la fonction f.
(d) Calculer la moyenne de T.

Exercice 5 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives données par : $X(\mathbb{P}) = \frac{1}{3}(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)$ et $Y(\mathbb{P})(\mathrm{d}x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\, \mathrm{d}x$.
Donner la loi de $X + Y$.

Exercice 6 Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire indépendante égale à $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$. La suite des X_n peut modéliser les résultats d'un jeu de pile ou face. Au temps n, on note $T(n)$ la longueur de l'intervalle de temps pendant lequel on vient de tirer des 1. Ainsi, on pose :

$$T(n) = \max\{k \in [1, n]\, ;\, \forall l \in [n - k + 1, n],\, X_l = 1\}$$

si cet ensemble n'est pas vide, et $T(n) = 0$ sinon.
(a) Montrer que $T(n)$ est une variable aléatoire et donner sa loi.
(b) Montrer que $\liminf T(n) = 0$ presque sûrement.
(c) Montrer que $\limsup T(n)/\log n = 1$ presque sûrement, où log désigne le logarithme de base 2. On pourra introduire les événements :

$$A_n = \{T(n \log n) \geqslant \log n - 5\}, \quad B_n = \{T(n \log n) \geqslant c \log n\}.$$

Exercice 7 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires positives et intégrables. Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$M_n = \max\{X_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

(a) Montrer que M_n est une variable aléatoire intégrable.
(b) Dans cette question, on suppose que les variables aléatoires $(X_n)_n$ sont i.i.d. Montrer que M_n/n tend presque sûrement vers zéro. (On pourra commencer par montrer que X_n/n tend presque sûrement vers zéro.)
(c) Dans cette question, on suppose que les variables aléatoires $(X_n)_n$ sont uniformément intégrables. Montrer que $\mathbb{E}[M_n]/n$ tend vers zéro.

Exercice supplémentaire

Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire indépendante uniforme sur le disque unité $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}^2$. On note :

$$Z_n = \min\{\|X_k\|\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

(a) Montrer que Z_n est une variable aléatoire. Donner sa loi. Calculer son espérance.
(b) Montrer que $\limsup Z_n \sqrt{n/\log n} \leqslant 1$ presque sûrement. On pourra introduire une constante $c > 1$ et les ensembles

$$A_n = \{Z_n^2 \geqslant c \log n/n\}.$$

4.15 Examen final de juin 1997

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Dans le problème, les parties B et C sont indépendantes entre elles. La plus grande attention sera portée à la rédaction des copies.

PROBLEME Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que les X_n sont positives et que $\mathbb{P}[X_1 > 0] > 0$. Soit $S_0 = 0$. Pour $n \geqslant 1$ entier et $t \geqslant 0$ réel, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant t\}.$$

Le processus $(N_t)_{t \geqslant 0}$ est le processus de comptage associé à la suite $(X_n)_n$.

Partie A

(a) Pour t fixé, montrer l'égalité : $\{N_t = n\} = \{S_n \leqslant t < S_{n+1}\}$.

Montrer que N_t est presque sûrement fini et que N_t est une variable aléatoire.

(b) Montrer que l'application $t \mapsto N_t$ est croissante et que N_t tend presque sûrement vers l'infini quand t tend vers l'infini.

Partie B

(c) On suppose que X_1 est intégrable. Montrer que N_t/t tend presque sûrement vers $1/\mathbb{E}[X_1]$ quand t tend vers l'infini. Que se passe-t-il si X_1 n'est pas intégrable ?

(d) Dans le reste de cette partie, on étudie la convergence de N_t/t au sens de la convergence L^1. Soit $(X_n^0)_{n\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoire indépendante de Bernoulli $p\delta_0 + (1-p)\delta_1$ avec $p \in (0,1]$ et soit $(N_t^0)_t$ le processus de comptage associé.

Pour t fixé, donner la loi de N_t^0. Calculer l'espérance des variables aléatoires $N_t^0 + 1$ et $(N_t^0 + 1)(N_t^0 + 2)$.

(e) Soit $a > 0$ tel que $\mathbb{P}[X_1 \geqslant a] = p > 0$. Pourquoi a existe-t-il ?

On pose $X'_n = a\,\mathbf{1}_{\{X_n \geqslant a\}}$ et on note $(N'_t)_t$ le processus de comptage associé. Montrer que $N_t \leqslant N'_t$.

(f) En déduire que $\mathbb{E}[N_t^2]/t^2$ est borné. Si X_1 est intégrable, montrer que $\mathbb{E}[N_t]/t$ tend vers $1/\mathbb{E}[X_1]$. Si X_1 n'est pas intégrable, montrer que $\mathbb{E}[N_t]/t$ tend vers 0.

Partie C

(g) **Théorème de Wald.** Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes intégrable et soit N une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que, pour tout $n \geqslant 1$, $\{N \leqslant n\}$ appartient à la tribu engendrée par $(Y_k)_{k\leqslant n}$ et on pose :

$$T_N(\omega) = \sum_{n=1}^{n=N(\omega)} Y_n(\omega).$$

Montrer que T_N est une variable aléatoire et que $\mathbb{E}[T_N] = \mathbb{E}[Y_1]\,\mathbb{E}[N]$.

(h) Montrer que $N = N_t + 1$ vérifie les hypothèses du théorème de Wald. Donc $\mathbb{E}[S_{N_t+1}] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[N_t + 1]$.

(i) On reprend les notations de (d). A-t-on $\mathbb{E}[X^0_{N_t+1}] = \mathbb{E}[X^0_1]$?

Remarque Le phénomène du (i) est général. Si la loi des X_n est exponentielle de paramètre a, on peut montrer que X_{N_t+1} suit asymptotiquement, quand n est grand, la loi de la somme de deux variable aléatoire indépendante exponentielle de paramètre a. En particulier, $\mathbb{E}[X_{N_t+1}]$ tend vers $2/a$ et non pas vers $\mathbb{E}[X_1] = 1/a$ (on parle souvent de paradoxe de l'autobus).

EXERCICE 1 La loi du couple (X, Y) est la mesure de densité $\mathrm{e}^{-y}\,\mathbf{1}_D(x,y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leqslant x \leqslant y\}$.

(a) Donner la loi de X et la loi de Y.

(b) Donner la loi conditionnelle de X sachant Y, et celle de Y sachant X.

(c) Le couple (X, Y) est-il formé de variables aléatoires indépendantes ? Répondre à la même question pour le couple $(X, Y - X)$, puis pour le couple $(Y, X/Y)$.

EXERCICE 2 Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, on dit que X est inférieure à Y en loi et on note $X \prec Y$ si et seulement si $\mathbb{E}[f(X)] \leqslant \mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction réelle croissante positive et bornée.
(a) Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si la fonction de répartition F de X et la fonction de répartition G de Y vérifient $G \leqslant F$.
On dit que X et Y sont égales en loi et on note $X \sim Y$ si $X \prec Y$ et $Y \prec X$.
(b) Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si on peut trouver deux variables aléatoires X' et Y' telles

que $X \sim X'$, $Y \sim Y'$ et $X' \leqslant Y'$ presque sûrement.
(c) On suppose que $X \leqslant Y$ presque sûrement et $X \sim Y$. Montrer que $X = Y$ presque sûrement. Indication : $\{X < Y\}$ est la réunion des $\{X < q < Y\}$ sur tous les rationnels q.

EXERCICE 3 On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ comme suit : la loi de X_1 est uniforme sur $[0, 1]$ et, sachant $(X_k)_{k \leqslant n}$, la loi de X_{n+1} est uniforme sur $[X_n, 1]$.

Donner la loi de X_n. Calculer directement $\mathbb{E}[X_n]$.

EXERCICE 4 À l'origine des temps, un nombre $p \in [0, 1]$ a été choisi au hasard. Depuis, le soleil se lève chaque jour avec la probabilité p, et les jours précédents n'influent pas sur le lever du soleil du jour présent. Laplace a posé la question suivante : sachant que depuis l'origine des temps le soleil s'est levé N fois, quelle est la probabilité p_N pour qu'il se lève demain ?

Répondre à la question de Laplace si p est de loi uniforme sur $[0, 1]$.

EXERCICE 5 (a) Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que si S_n/n converge en probabilité vers une variable aléatoire S, celle-ci est presque sûrement constante.

(b) On suppose désormais que la loi de X_1 est une loi de Cauchy de densité $(a/\pi)/(a^2 + x^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que la loi de S_n/n est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer la transformée de Fourier de la densité de la loi de X_1. En déduire la loi de S_n/n.

(c) Montrer que S_n/n ne converge pas en probabilité.

4.16 Session de septembre 1997

Les exercices sont indépendants les uns des autres. La plus grande attention sera apportée à la rédaction des copies.

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$. On note S_n la somme des X_k, c'est-à-dire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

EXERCICE 1 On suppose que les X_n sont des variables aléatoires indépendantes et que la loi de X_n est $\frac{1}{2}(\delta_{4^{-n}} + \delta_{-4^{-n}})$.

(a) Montrer que la suite S_n converge presque sûrement vers une limite S.

(b) La limite S est-elle presque sûrement constante ? Ceci contredit-il la loi du zéro-un de Kolmogorov ?

(c) Quelles sont les variables aléatoires X_n qui sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par S ?

EXERCICE 2 On suppose que les X_n sont des variables aléatoires indépendantes et que la loi de X_n est $(1-n^{-3})\delta_1 + n^{-3}\delta_{-n^3+1}$.

(a) Montrer que X_n est intégrable et calculer $\mathbb{E}[X_n]$.

(b) Montrer que la suite S_n/n admet une limite presque sûre et la calculer.

EXERCICE 3 On suppose que les X_n sont des variables aléatoires de carré intégrable, centrées et non corrélées. Pour tout $n \neq m$, on a donc : $\mathbb{E}[X_n X_m] = 0$. On suppose de plus que $c = \sup_{n\geqslant 1} \mathbb{E}[X_n^2]$ est fini et on note

$$M_n = \max\left\{|S_k - S_{n^2}|\,;\, n^2 \leqslant k \leqslant (n+1)^2\right\}.$$

On considère un réel $\alpha > 3/4$ et on veut étudier la suite S_n/n^α.

(a) Montrer que M_n est une variable aléatoire de carré intégrable.

(b) Montrer que la suite $S_{n^2}/n^{2\alpha}$ tend presque sûrement vers 0.

(c) Montrer que la suite $M_n/n^{2\alpha}$ tend presque sûrement vers 0.

(d) En déduire que la suite S_n/n^α tend presque sûrement vers 0.

EXERCICE 4 Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$. Montrer que tout $A \in \mathcal{F}$ vérifie :

$$\mathbb{P}[G|A] = \int_G \mathbb{P}[A|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}\mathbb{P} \Big/ \int_\Omega \mathbb{P}[A|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}P.$$

Donner un contrexemple quand $G \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$.

EXERCICE 5 Soit (X,Y) une variable aléatoire de loi uniforme sur le disque D de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

(a) Donner la densité de la loi de (X,Y) par rapport à la mesure de Lebesgue.

(b) Donner la loi conditionnelle de X sachant Y.

EXERCICE 6 On suppose que les X_n sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $\frac{1}{3}(\delta_0+\delta_1+\delta_2)$. On fixe $n \geqslant 1$ et, pour $i \in \{0,1,2\}$, on note :

$$T_i = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k = i\}}.$$

(a) Pour $k \in [1,n]$, quelle est la loi conditionnelle de X_k sachant (T_0, T_1) ?

(b) Pour $k \in [1,n]$, quelle est la loi conditionnelle de X_k sachant $T_0 + T_1$?

4.17 Examen partiel de mars 1998

Question de cours Donner deux énoncés significativement différents de lois des grands nombres.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Toutes les variables aléatoires introduites sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Un insecte pond des œufs. Le nombre X d'œufs pondus suit une loi de Poisson de moyenne λ. Chaque œuf éclôt (ou n'éclôt pas) indépendamment de tous les autres et la probabilité p d'éclosion d'un œuf est la même pour chaque œuf. Quelle est la loi du nombre d'œufs éclos ?

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois

$$X_n(\mathbb{P}) = (1/2n)\delta_{-1} + (1-1/n)\delta_0 + (1/2n)\delta_{+1}$$

et soit S_n la somme des n premiers X_k.

(1) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

(2) Montrer que la suite $S_n/\log(n)$ tend vers zéro. En quels sens cette convergence a-t-elle lieu ?

(2) Pour $n \geqslant 1$, on note $Y_n = X_{2n-1}X_{2n}$. Donner la loi de Y_n.

(3) Soit $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k Y_k$. Montrer que T_n converge presque sûrement vers une limite finie T.

(4) Montrer que la suite $\mathbb{E}[|T_n|]$ n'est pas bornée.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$. On note $R_n = \|X_n\|$ et $\Theta_n = \arg(X_n)$.

(1) Donner la loi du couple (R_n, Θ_n).

(2) On pose $Y_n = \inf\{R_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Donner la loi de Y_n. Quelle est la limite de Y_n ? En quels sens la convergence a-t-elle lieu ?

(3) Montrer que presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = +1, \quad \text{où } Z_n = \sqrt{\frac{n}{\log(n)}}Y_n.$$

(4) Que vaut $\liminf_{n\to\infty} Z_n$?

Exercice 4 Trois personnes A, B et C arrivent en même temps à la poste pour téléphoner. Il n'y a que deux cabines téléphoniques que A et B occupent immédiatement. C attend à l'intérieur du bureau de Poste et il remplace la première personne qui sort d'une cabine. Chacun quitte la poste aussitôt après avoir téléphoné. On note X, Y et Z les durées respectives des coups de téléphones de A, B et C.

On suppose que X, Y et Z sont trois variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle et de moyenne $a > 0$.

(1) Calculer la variance de X.

On pose $U = \max\{X, Y\}$ et $V = \min\{X, Y\}$ et on considère l'événement

$$D = \{\text{C sort le dernier de la poste}\}.$$

(2) Exprimer le temps total T passé par C à l'intérieur du bureau de poste, en fonction de V et Z. En déduire une expression de D en fonction des variables aléatoires X, Y et Z.

(3) Calculer la loi de $|X - Y|$.

(4) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(D)$.

(5) Calculer la loi du couple (U, V).

(6) Calculer l'espérance de T, puis sa loi. Que remarque-t-on ?

4.18 Corrigé de l'examen partiel de mars 1998

Question de cours – LGN avec convergence presque sûre et L^1 pour des v.a.i.i.d. L^1,
– LGN avec convergence presque sûre et L^2 pour des v.a.i. L^2 quand une série formée de variances converge,
– LGN L^4 pour des v.a.i. bornées dans L^4.

Exercice 1 Le nombre N d'œufs éclos conditionné par $\{X = n\}$ suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$. Loi de $N = \mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 2 (1) $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\mathrm{var}(X_n) = 1/2n$.

(2) LGN On utilise la L^2 : la somme des variances des $X_n/\log(n)$ converge donc la somme des $(X_n - \mathbb{E}[X_n])/\log(n) = X_n/\log(n)$ converge presque sûrement et dans L^2 vers zéro. Par Kronecker et comme $\log(n)$ tend vers l'infini, $S_n/\log(n)$ tend vers zéro, presque sûrement et dans L^2.

(2) Masses $1/(4n(2n-1))$ en $+1$ et en -1, le reste en 0.

(3) Par Borel–Cantelli facile, un nombre fini de Y_k n'est pas nul.

(4) Pour $n \geqslant 1$, $|T_{n-1}| \leqslant 3^n/2$ et $\mathbb{E}[|Y_n|] \sim 1$ donc $\mathbb{E}[|T_n|] \geqslant 3^n\mathbb{E}[|Y_n|] - 3^n/2$ est au moins équivalent à $3^n/2$.

Exercice 3 (1) Loi $2r\mathbf{1}_{[0,1]}(r)\mathrm{d}r\,\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(\theta)\mathrm{d}\theta/(2\pi)$, donc indépendance.

(2) $\{Y_n \geqslant y\} = \cap_{k\leqslant n}\{R_k \geqslant y\}$ donc la loi est

$$2ny(1-y^2)^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\mathrm{d}y.$$

Si Y_n ne tend pas vers zéro, tous les R_k sont supérieurs à $\varepsilon > 0$. Par Borel-Cantelli facile, $\limsup\{R_k < \varepsilon\}$ est de probabilité 1 donc Y_n tend presque sûrement vers zéro. Tous les Y_n sont bornés par 1 donc convergence dans tous les L^p, $p \in]0,+\infty[$.

(3) $\mathbb{P}[Z_n \geqslant a] = (1 - a^2\log(n)/n)^n \sim n^{-a^2}$ est sommable pour tout $a > 1$ donc Borel-Cantelli facile implique $\limsup Z_n \leqslant 1$ presque sûrement.

Erreur d'énoncé : on n'obtient pas l'inégalité $\limsup Z_n \geqslant 1$ presque sûrement.

(4) Pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}[R_n^2 \leqslant a\log(n)/n] = a\log(n)/n$ est une série divergente donc Borel-Cantelli difficile entraîne que $R_n^2 \leqslant a\log(n)/n$ une infinité de fois. Donc $\liminf Z_n \leqslant \sqrt{a}$ presque sûrement, donc $\liminf Z_n = 0$ presque sûrement.

Exercice 4 (1) $\mathbb{E}[X] = a$, $\mathbb{E}[X^2] = 2a^2$ donc $\mathrm{var}(X) = a^2$.

(2) $T = V + Z$, $D = \{T > U\} = \{|X - Y| < Z\}$.

(3) Loi exponentielle de moyenne a.

(4) $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{2}$.

(5) Loi $2a^2\mathrm{e}^{-a(u+v)}\mathbf{1}_{0\leqslant v\leqslant u}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

(6) Loi $2a(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-2at})\mathbf{1}_{t\geqslant 0}\mathrm{d}t$. Donc $\mathbb{E}[T] = 3/(2a) = \mathbb{E}[U]$. Donc C attend en moyenne autant, mais pas plus, que l'un des deux premiers clients servis.

4.19 Examen final de mai 1998

Question de cours Donner une définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires réelles.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Toutes les variables aléatoires introduites sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ et soit X_1 une variable aléatoire indépendante des ε_n, de loi $f(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour $n \geqslant 1$, on pose : $X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + \varepsilon_n)$.

(1) Pour $n \geqslant 1$, montrer que la loi de X_{n+1} est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Exprimer sa densité f_{n+1} en fonction de la densité f_n de la loi de X_n.

(2) Montrer que X_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1[$.

(3) On choisit $f(x) = 2\,\mathbf{1}_{[0,1/2[}(x)$. Exprimer $f_n(x)$ en fonction du développement dyadique $x = 0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$, $x_n \in \{0, 1\}$, de x. En déduire que f_n ne converge pas presque partout vers $\mathbf{1}_{[0,1[}$. Ce résultat est-il en contradiction avec la question (2) ?

Exercice 2 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Montrer que X_1 est intégrable si et seulement si $p = 0$, avec :

$$p = \mathbb{P}[|X_n| \geqslant n \text{ une infinité de fois}].$$

Que vaut p quand X_1 n'est pas intégrable ?

Exercice 3 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles qui convergent en loi vers Y. La suite $(X_n + 6)_n$ converge-t-elle en loi vers $Y + 6$?

Exercice 4 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi centrée, de carré intégrable, et telle que $\mathbb{P}[X_1 = 0] = 0$. On note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

(1) Montrer que $T_n > 0$ presque sûrement et que T_n tend vers l'infini presque sûrement.

(2) Étudier la convergence en loi de $R_n = S_n/\sqrt{T_n}$.

(3) La suite $(R_n)_n$ converge-t-elle presque sûrement ? Et en probabilité ?

Exercice 5 Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \geqslant 1$, on note :

$$M_n = \min\{U_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

(1) Montrer que M_n converge presque sûrement et dans L^1. Donner la valeur de la limite.

(2) Calculer la loi de M_n.

(3) Soit N une variable aléatoire indépendante des U_n et de loi de Poisson de paramètre $a > 0$. On pose :

$$Y(\omega) = M_{N(\omega)+1}(\omega).$$

Montrer que Y est une variable aléatoire et calculer sa loi.

(4) Calculer $m(n) = \mathbb{E}[M_n]$, $\nu = \mathbb{E}[N+1]$ et $y = \mathbb{E}[Y]$. Comparer $m(\nu)$ et y.

Exercice 6 (Knuth, D., *The Art of Programming*, Volume 2) Soit $n \geqslant 1$ un entier et $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.
On note $X_{n+1} = 1$ et on définit $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ par la formule de récurrence descendante :

$$X_k = U_k^{1/k}\, X_{k+1}.$$

Montrer que la loi du vecteur $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ coïncide avec celle de l'échantillon $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ réordonné de façon croissante, c'est-à-dire avec la loi du vecteur $(U_k^*)_{1\leqslant k\leqslant n}$ dont les coordonnées énumèrent les valeurs prises par les coordonnées du vecteur $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et tel que :

$$U_1^* < U_2^* < \ldots < U_n^* \quad \text{presque sûrement.}$$

4.20 Devoir à la maison de mars 1999

Soit $\beta \geqslant 0$ et $(X_k)_k$ une suite de v.a.i.i.d. de loi normale centrée réduite. On rappelle que la loi des X_n admet la densité $x \mapsto (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour $n \geqslant 1$, on appelle respectivement *fonction de partition* et *énergie libre* du modèle d'énergie aléatoire de volume 2^n à température $1/\beta$, les quantités

$$Z_n(\beta) = \sum_{k=1}^{2^n} \exp(\beta\sqrt{n}X_k) \qquad \text{et} \qquad f_n(\beta) = n^{-1}\log Z_n(\beta).$$

On note $f_-(\beta)$ et $f_+(\beta)$ les limites supérieure et inférieure de $f_n(\beta)$ quand n tend vers l'infini. Quand $f_-(\beta) = f_+(\beta)$, on appelle *énergie libre en volume infini* la valeur commune $f(\beta)$. Le but du problème est d'étudier $f(\beta)$ et de montrer que son comportement est différent selon que $\beta \leqslant \beta_c$ ou $\beta \geqslant \beta_c$ pour $\beta_c = \sqrt{\log 4}$.

(1) Montrer que $Z_n(\beta)$ et $f_n(\beta)$ sont des variables aléatoires.

(2) Calculer $\mathbb{E}[\exp(tX_1)]$ pour tout nombre réel t.

(3) Calculer $\mathbb{E}[Z_n(\beta)]$.

(4) [Majoration de $f_+(\beta)$ pour tout $\beta \geqslant 0$]

On rappelle que $\beta_c = \sqrt{\log 4}$. Soit $t > \frac{1}{2}(\beta^2 + \beta_c^2)$. Majorer $\mathbb{P}[Z_n(\beta) \geqslant \exp(nt)]$ par le terme général d'une série convergente. En déduire, pour tout $\beta \geqslant 0$, $f_+(\beta) \leqslant \frac{1}{2}(\beta^2 + \beta_c^2)$ presque sûrement.

(5) Montrer que, pour $t \geqslant 0$,

$$(2\pi)^{-1/2} t(1+t^2)^{-1}\exp(-t^2/2) \leqslant \mathbb{P}[X_1 \geqslant t] \leqslant (2\pi)^{-1/2} t^{-1}\exp(-t^2/2).$$

En déduire, pour tous $0 < t < s$, que $\mathbb{P}[X_1 \geqslant t\sqrt{n}]\exp(ns^2/2)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

(6) [Minoration de $f_-(\beta)$ pour tout $\beta \geqslant 0$]

Pour $\lambda > 0$, on note

$$N_n(\lambda) = \mathrm{Card}\{k \leqslant 2^n\,;\, X_k \geqslant \lambda\sqrt{n}\}.$$

Quand $\lambda < \beta_c$, évaluer $\mathbb{P}[N_n(\lambda) = 0]$ en utilisant la question (5). En déduire qu'il existe un rang aléatoire n_0 à partir duquel $N_n(\lambda)$ n'est pas nul.

Montrer que, pour tout $\beta \geqslant 0$, $f_-(\beta) \geqslant \beta\beta_c$ presque sûrement.

En déduire que $f(\beta_c)$ existe et donner sa valeur.

(7) Soit $p \in]\frac{1}{2}, 1[$, $q \in [0, 2p[$ et B_n une v.a. de loi binômiale $\mathcal{B}(2^n, p^n)$, c'est-à-dire la somme de 2^n v.a.i.i.d. de Bernoulli de loi $p^n\delta_1 + (1-p^n)\delta_0$. Si $t \geqslant 0$, montrer que

$$\mathbb{P}[B_n \leqslant q^n] \leqslant \exp(tq^n)\,\mathbb{E}[\exp(-tB_n)].$$

Evaluer $\mathbb{E}[\exp(-tB_n)]$ et en déduire que la série de terme général $\mathbb{P}[B_n \leqslant q^n]$ converge.

(8) [Minoration de $f_-(\beta)$ pour $\beta < \beta_c$]

Décrire la loi de $N_n(\beta)$ pour $\beta \geqslant 0$. On suppose maintenant que $\beta < \beta_c$ et on fixe $\varepsilon \in]0, 1[$. Utiliser la question (7) pour montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$N_n(\beta) \geqslant (1-\varepsilon)^n 2^n \exp(-n\beta^2/2).$$

Toujours pour $\beta < \beta_c$, en déduire une minoration asymptotique et presque sûre de $Z_n(\beta)$, puis que $f(\beta)$ existe presque sûrement et vaut presque sûrement $f(\beta) = \frac{1}{2}(\beta^2 + \beta_c^2)$.

(9) [Majoration de $f_+(\beta)$ pour $\beta > \beta_c$]

Soit $\beta > \beta_c$ fixé et $\lambda \in]\beta_c, \beta[$. Utiliser la question (5) pour montrer que la somme des $\mathbb{P}[N_n(\lambda) \geqslant 1]$ converge. En déduire que, pour $n \geqslant n_1$ aléatoire, $X_k \leqslant \lambda\sqrt{n}$ pour tout $k \leqslant 2^n$.

Soit $Q = (q_i)_{0 \leqslant i \leqslant I}$ une partition de $[0, 1]$ et $q_{-1} = -q_1/2$. Pour tout $i \in [1, I]$, soit $N_{i,n}$ le nombre d'indices $k \leqslant 2^n$ tels que $X_k \in]q_{i-1}\lambda\sqrt{n}, q_i\lambda\sqrt{n}[$. Montrer que

$$\mathbb{P}[X_1 \in]q_{i-1}\lambda\sqrt{n}, q_i\lambda\sqrt{n}[] \leqslant (q_i - q_{i-1})\lambda\sqrt{n}\exp(-n\lambda^2 q_{i-1}^2/2).$$

Utiliser l'inégalité de Markov pour en déduire que $\mathbb{P}[N_{i,n} \geqslant 2^n \exp(-n\lambda^2 q_{i-2}^2/2)]$ est majoré par

$$\exp(n\lambda^2 q_{i-2}^2/2 - n\lambda^2 q_{i-1}^2/2 + o(n)).$$

En déduire que la série de terme général

$$\mathbb{P}[\exists i \in [1, I]\,;\, N_{i,n} \geqslant 2^n \exp(-n\lambda^2 q_{i-2}^2/2)]$$

est sommable. Montrer qu'il existe $n_Q \geqslant n_1$ aléatoire tel que, pour $n \geqslant n_Q$,

$$\begin{aligned} Z_n(\beta) &\leqslant 2^n + \sum_{i=1}^{I} N_{i,n}\exp(n\beta\lambda q_i) \\ &\leqslant 2^n + c(Q)\exp(n\max_{i\in[1,I]}\{\beta\lambda q_i - \lambda^2 q_{i-2}^2/2 + \log 2\}). \end{aligned}$$

Faire tendre le pas de Q vers zéro pour obtenir

$$f_+(\beta) \leqslant \sup_{0\leqslant q\leqslant 1}\{\beta\lambda q - \lambda^2 q^2/2 + \log 2\}.$$

En déduire que $f_+(\beta) \leqslant \beta\lambda - \lambda^2/2 + \log 2$ presque sûrement pour tout $\lambda \in]\beta_c, \beta[$, et enfin que $f(\beta)$ existe presque sûrement et vaut presque sûrement $f_(\beta) = \beta\beta_c$.

(10) Conclusion : $f(\beta)$ existe pour tout $\beta \geqslant 0$; sa valeur est $f(\beta) = \frac{1}{2}(\beta^2 + \beta_c^2)$ si $\beta \leqslant \beta_c$ et $f(\beta) = \beta\beta_c$ si $\beta \geqslant \beta_c$. Le paramètre $\beta_c = \sqrt{\log 4}$ est une *transition de phase*.

4.21 Examen partiel de mars 1999

Questions de cours

– Donner l'énoncé de la loi du zéro-un.

– Qu'est-ce qu'une famille uniformément intégrable ? Énoncer un théorème faisant intervenir cette notion.

Exercice 1 Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de lois normales centrées de paramètre $\sigma^2 > 0$. On rappelle que la loi de X_n admet une densité de la forme $x \mapsto (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/2\sigma^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

(1) Calculer la variance de X_1.

(2) Calculer la limite supérieure et la limite inférieure de X_n. Même question pour $|X_n|$.

(3) Montrer que $\limsup X_n/\sqrt{2 \log n} = \sigma$ presque sûrement. Que vaut $\liminf X_n/\sqrt{2 \log n}$?

Exercice 2 Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $A \subset [0,1]$ un borélien de mesure a. Pour $n \geqslant 1$, on note

$$\nu_n(A) = \mathrm{Card}\{k \in [1,n]\,;\, X_k \in A\}.$$

(1) Montrer que $\nu_n(A)$ est une variable aléatoire. Donner sa loi.

(2) Soit $B \subset [0,1]$ un borélien de mesure b. On suppose que <u>A et B sont disjoints</u>. Les variables aléatoires $\nu_n(A)$ et $\nu_n(B)$ sont-elles indépendantes ?

(3) Soit T une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, indépendante de la suite $(X_n)_n$. On note $\nu(A) = 0$ si $T = 0$ et $\nu(A) = \nu_n(A)$ si $T = n$ avec $n \geqslant 1$, et de même pour B.

Montrer que $\nu(A)$ et $\nu(B)$ sont des variables aléatoires.

(4) Donner la loi de $\nu(A)$, puis la loi de $(\nu(A), \nu(B))$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3 Soit X et $(X_n)_n$ des variables aléatoires. Montrer que X_n converge en probabilité vers X si et seulement si, de toute suite extraite $(X_{\phi(n)})_n$, on peut extraire une suite $(X_{\phi(\psi(n))})_n$ qui converge presque sûrement vers X.

Exercice 4 Si X est une variable aléatoire, on pose $N(X) = \mathbb{E}[|X|/(1 + |X|)]$.

(1) Montrer que $N(X)$ existe toujours.

(2) Montrer que X_n converge en probabilité vers X si et seulement si $N(X_n - X) \to 0$.

Exercice 5 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de loi $c\,\mathrm{e}^{-y}\mathbf{1}_{0 \leqslant x \leqslant y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(1) Calculer c.

(2) Donner la loi de X et la loi de Y.

(3) Parmi les couples suivants, indiquer lesquels sont formés de v.a. indépendantes : (X,Y), $(X + Y, 0)$, $(X, Y - X)$, $(X, Y/X)$.

4.22 Examen final de mai 1999

Les exercices sont indépendants les uns des autres. L'examen pourra être noté sur plus de 20 points. Cependant, la plus grande attention sera portée à la rédaction des copies.

Questions de cours

– Donner une définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires réelles.

– Enoncer une condition portant sur les fonctions caractéristiques associées qui entraîne la convergence en loi.

Dans les trois premiers exercices ci-dessous, on se donne une suite $(X_n)_n$ de v.a.i.i.d. On note $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 1 On suppose que X_1 est intégrable et $\mathbb{E}(X_1) \neq 0$. Montrer que

$$Y_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k|/|S_n|$$

converge vers 0 presque sûrement. On pourra commencer par montrer que Y_n est presque sûrement bien définie à partir d'un certain rang.

Exercice 2 On suppose que X_1 est centrée, de carré intégrable et de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer que

$$\limsup |S_n|/\sqrt{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf |S_n|/\sqrt{n} = 0 \text{ presque sûrement.}$$

Exercice 3 On suppose que X_1 est centrée, de carré intégrable et de variance $\sigma^2 > 0$. Soit $(T(k))_k$ des variables aléatoires entières, indépendantes de la suite $(X_n)_n$, et telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \mathbb{P}(T(k) \geqslant n) \longrightarrow 1.$$

Montrer que $S_{T(k)}/\sqrt{T(k)}$ converge en loi vers une loi gaussienne centrée et de variance σ^2.

Exercice 4 (Loi des petits nombres) Pour tout $n \geqslant 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi binômiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ avec $\lambda > 0$.

1) Rappeler une construction simple de X_n à l'aide de variables aléatoires de lois de Bernoulli sur $\{0, 1\}$ bien choisies. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

2) Montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 5 Si X et Y sont deux variables aléatoires, on définit leur distance en variation $\varrho(X, Y)$ par

$$\varrho(X, Y) = \sup |\mathbb{E}(u(X)) - \mathbb{E}(u(Y))|$$

où u parcourt l'ensemble $C_{b,1}$ des fonctions continues bornées telles que $|u| \leqslant 1$.

1) Montrer que ϱ définit une distance sur l'ensemble $\mathcal{M}_1^+$ des lois de variables aléatoires. Quel est le diamètre de $(\mathcal{M}_1^+, \rho)$?

2) Si X et Y sont des variables aléatoires de lois discrètes $\sum_n p_n \delta_{x_n}$ et $\sum_n q_n \delta_{x_n}$ avec $x_n \neq x_m$ pour $n \neq m$, montrer que

$$\varrho(X, Y) = \sum_n |p_n - q_n|.$$

On pourra commencer par le cas où $\{x_n\}_n$ est fini.

3) Si X et Y sont des variables aléatoires de lois absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et de densités f et g, montrer que

$$\varrho(X, Y) = \int |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

On pourra commencer par le cas où f et g sont continues.

4) Calculer $\varrho(X, 0)$ quand X est une variable aléatoire constante égale à x, puis quand X est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance σ^2, puis quand X est une variable aléatoire quelconque.

5) Montrer que si $\varrho(X_n, Y)$ tend vers zéro, alors X_n converge en loi vers Y.

6) Utiliser la question 4) pour exhiber un contrexemple de la réciproque du résultat de la question 5) où les lois des X_n sont discrètes, puis un contrexemple où les lois des X_n sont continues.

7) Soit X, X', Y et Y' des variables aléatoires. On suppose que X et X' sont indépendantes, ainsi que Y et Y'. Montrer que

$$\varrho(X + X', Y + Y') \leqslant \varrho(X, Y) + \varrho(X', Y').$$

8) Si X suit une loi de Bernoulli $b(p) = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ et si Y suit une loi de Poisson de paramètre p et de même espérance que X, montrer que $\varrho(X, Y) \leqslant 2p^2$.

On pourra démontrer puis utiliser le fait que $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$ pour tout x réel.

9) Soit X la somme de n variable aléatoire indépendante de lois de Bernoulli $b(p_k)$ et soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$. Montrer que

$$\varrho(X, Y) \leqslant 2(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2).$$

10) En déduire une majoration de $\varrho(X_n, Y)$ pour les variables aléatoires X_n de l'exercice « Loi des petits nombres » et leur limite en loi Y et retrouver ainsi le résultat de la question 2) de cet exercice.

11) Énoncer une généralisation de la question 2) de l'exercice « Loi des petits nombres » utilisant la question 9).

Exercice non posé (Fractals aléatoires) Soit $((X_n, V_n))_n$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants de même loi à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, vérifiant l'hypothèse (ii) ci-dessous :

$$\log|X_1| \text{ et } \log(1 + \|V_1\|) \text{ sont intégrables} ; \ \mathbb{E}(\log|X_1|) = a < 0. \tag{ii}$$

1) On note $Y_0 = 1$ et $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que $\limsup |Y_n|^{1/n} < 1$ presque sûrement.

2) Montrer que $\limsup \|V_n\|^{1/n} \leqslant 1$ presque sûrement.

3) En déduire que la série $\sum_n |Y_n|\, \|V_{n+1}\|$ converge presque sûrement. On note S la somme

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} Y_n\, V_{n+1}.$$

4) Soit (X, V) un vecteur aléatoire de même loi que (X_1, V_1) et indépendant de S. Montrer que S et $V + XS$ ont la même loi, notée m_0. En déduire que la transformée de Fourier ϕ_0 de m_0 vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \qquad \phi_0(t) = E(\phi_0(Xt)\exp(i\langle V, t\rangle)). \tag{iii}$$

5) Réciproquement, soit m une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ dont la transformée de Fourier ϕ vérifie (iii). Montrer que $m = m_0$.

On pourra itérer l'équation (iii) et utiliser un théorème de convergence dominée.

6) Soit $(Z_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. sur $\mathbb{N}$ donnée par $(p(k))_{k\geqslant 0}$ avec $p(k) = P(Z_1 = k)$. On suppose que $p(k) < 1$ et on note $q(k) = P(X_1 < k)$ pour tout $k \geqslant 0$. Montrer que la variable aléatoire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(Z_1)\cdots p(Z_n)\, q(Z_{n+1})$$

est uniformément répartie sur $[0, 1]$.

7) On suppose que la loi de (X_1, V_1) est $p\delta_{(1/3,0)} + (1-p)\delta_{(1/3,2/3)}$ avec $p \in]0, 1[$. Expliciter le support de m_0. Montrer que les mesures obtenues our deux valeurs distinctes de p sont étrangères l'une à l'autre.

8) On se restreint au cas où X est une constante $X = r \in]0, 1[$ et V prend un nombre fini de valeurs $\{v_k\}_{1\leqslant k\leqslant K}$ avec $\|v_k - v_j\| > r$ pour $k \neq j$. Montrer que le support M de m_0 est fractal au sens suivant : il existe K fermés M_k translatés de M tels que M est la réunion disjointe des rM_k.

4.23 Examen partiel de mars 2000 (extrait)

Exercice 3 Soit X et Y des v.a.i.i.d., dont la loi μ ne charge pas $\{0\}$. On note $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $Z = X/Y$ et $U = (X/R, Y/R)$.

(1) Si μ est la loi uniforme sur $[0, 1]$, donner la loi de Z.

(2) Si (X, Y) est de loi gaussienne de densité $(2\pi)^{-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, montrer que X et Y sont i.i.d., puis donner la loi de (R, Z). Que remarque-t-on ?

(3) Si μ est une loi de densité $c/(1 + x^4)$, montrer que Z suit la même loi qu'au (2), et préciser cette loi. En déduire la valeur de c.

(4) Montrer que la loi de U est uniforme sur le cercle unité si et seulement si la loi de Z est celle trouvée au (2) et au (3).

Exercice 4 Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite. Montrer que les v.a. ci-dessous sont presque sûrement constantes et donner leurs valeurs :

$$I = \liminf \frac{\log X_n}{\log n}, \qquad S = \limsup \frac{X_n}{\sqrt{\log n}}.$$

Exercice supplémentaire (1) Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ avec $f \geqslant 0$ et $g > 0$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et M fini tels que $g \geqslant \epsilon$ et $f \leqslant M$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires uniformément bornée, c'est-à-dire telle que $|X_n(\omega)| \leqslant K$ pour tout $n \geqslant 1$ et presque tout $\omega \in \Omega$. Montrer que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\mathbb{E}(|X_n|)$ converge vers 0.

(3) Déduire de (1) et (2) la limite, quand n tend vers l'infini, de $I(n)$ avec

$$I(n) = \int_{[0,1]^n} \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{g(x_1) + \cdots + g(x_n)} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

4.24 Examen final de mai 2000

Questions de cours (1) Exprimer uniquement en termes de fonctions caractéristiques le fait que des variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(2) Énoncer le théorème de Lévy qui relie la convergence en loi et la convergence des fonctions caractéristiques.

(3) Donner un exemple d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ qui ne converge pas en loi et telle que $P(X_n \leqslant x)$ converge pour tout réel x.

Exercice 1 (Formule de Stirling) (1) Soit X une variable aléatoire positive intégrable. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de la fonction $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \geqslant x)$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives de carré intégrable, bornées dans L^2 et convergeant en loi vers X. On suppose donc qu'il existe une constante c telle que $\mathbb{E}(X_n^2) \leqslant c$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que X est intégrable et que $\mathbb{E}(X_n)$ tend vers $\mathbb{E}(X)$.

Désormais, pour $a > 0$, X_a est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a et on pose $Y_a = (X_a - a)/\sqrt{a}$. Enfin, on note $G(a,t) = \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{[at]} a^k/k!$ pour $t \geqslant 0$.

(3) Montrer que Y_a converge en loi quand a tend vers l'infini et préciser la loi limite.

(4) Déterminer la limite de $G(a,t)$ quand a tend vers l'infini.

(5) Calculer $\mathbb{E}((Y_n)^-)$ pour $n \geqslant 1$. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

Exercice 2 (Convergence de séries) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $c\,\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.

(1) Calculer c.

(2) Pour chacun des sens de convergence suivants, préciser si la série $S = \sum_{n\geqslant 1} X_n/n$ converge ou non : convergences L^2, L^1 et presque sûre.

(3) Préciser si S converge presque sûrement absolument, ou non. On pourra utiliser les sommes partielles

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Exercice 3 (Simulation) Soit (X, Y) de densité conjointe $f(x, y) = c\,(x + y)$ si $(x, y) \in [0, 1]^2$ et $f(x, y) = 0$ sinon. (1) Calculer la valeur de c, la loi de X, la moyenne de X et la covariance de X et Y.

(2) Soit (U, V) un couple de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]^2$. Soit Z et T définies par les relations

$$2Z = \sqrt{1 + 8U} - 1, \quad T = -Z + \sqrt{Z^2 + (2Z + 1)\,V}.$$

Montrer que (Z, T) suit la loi de (X, Y).

Exercice 4 (Maxima) On note $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, où $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi μ. On suppose d'abord que μ est la loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Si $a_n = n$, montrer M_n/a_n converge en loi et donner la loi limite.

(2) Si $a_n = \log n$, montrer M_n/a_n converge en loi et donner la loi limite.

(3) Montrer que $M_n - \log n$ converge en loi et donner la loi limite.

On suppose désormais que μ est la loi de Cauchy centrée de paramètre a.

(4) Montrer que $\mathbb{P}(M_n \leqslant 0)$ tend vers 0.

(5) Exhiber une suite $(a_n)_n$ telle que M_n/a_n converge en loi vers une loi non dégénérée et donner la loi limite.

Exercice 5 (Pile ou face) (1) Soit X une variable aléatoire et $t > 0$ tel que e^{tX} est intégrable. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 0) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\,X})$ pour tout $s \in [0, t]$.

(2) Montrer que si X est de plus intégrable avec $\mathbb{E}(X) < 0$, (1) fournit une borne strictement inférieure à 1 pour certaines valeurs de s.

(3) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p., donc $X_1(\mathbb{P}) = p\,\delta_1 + (1 - p)\,\delta_0$. Soit $q > p$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre q. On suppose que la suite des Y_n est indépendante de la suite des X_n. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

Montrer que l'événement $\{S_n \geqslant T_n\}$ n'est réalisé que pour un nombre fini de $n \geqslant 1$, presque sûrement. On pourra utiliser (1) et (2).

4.25 Suppléments à l'examen de mai 2000

Exercice 1 (Simulation à la von Neuman) On veut simuler des variables aléatoires X_n de loi exponentielle de paramètre 1 à partir de variables aléatoires U_n de loi uniforme sur $[0, 1]$.

(1) Rappeler la façon canonique de simuler X_1 à partir de U_1.

Un autre moyen est le suivant. Si $U_1 < U_2$, on pose $X = U_1$. Sinon, soit $N \geqslant 2$ l'entier aléatoire tel que

$$U_1 \geqslant U_2 \geqslant \cdots \geqslant U_N \quad \text{et} \quad U_{N+1} > U_N.$$

Si N est impair, on pose $X = U_1$. Si N est pair, on considère qu'il s'agit d'un échec et on recommence avec les v.a. $(U_k)_{k\geqslant N+2}$. Si la procédure réussit après M échecs, on pose $X = M + U_R$, où U_R est la première variable aléatoire utilisée pendant le cycle réussi, c'est-à-dire le cycle numéro $M + 1$.

(2) Montrer que chaque cycle se termine p.s.

(3) Quelle est la probabilité qu'un cycle se termine par un échec ?

(4) Montrer qu'un cycle finit par réussir.

(5) Quelle est la loi du nombre M de cycles qui échouent avant le premier cycle qui réussit ?

(6) On suppose que le premier cycle réussit, c'est-à-dire que $M = 0$. Calculer $P(U_1 \leqslant x \mid M = 0)$, pour $x \in [0, 1]$.

(7) Déduire de tout ceci que X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

(8) Combien de variables aléatoires $(U_n)_n$ utilise-t-on en moyenne pour simuler X ?

(9) Quel est l'avantage de cette procédure par rapport à celle du (1) ?

Exercice 2 (Théorème de pureté) Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ et C l'ensemble des sommes finies de la forme $\sum_k n_k\, d_k$ avec $n_k \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in D$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes telle que :

- la série $\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire notée S ;
- pour tout $n \geqslant 1$, $X_n \in D$ presque sûrement.

(1) Soit B un borélien et $n \geqslant 1$. Montrer que $A = \{S \in B + C\}$ appartient à la tribu engendrée par les variables aléatoires $(X_k)_{k\geqslant n+1}$. Pour $d_1, \ldots, d_n$ dans D, on pourra calculer $A \cap \{X_1 = d_1, \ldots, X_n = d_n\}$.

(2) Quelles sont les valeurs possibles de $\mathbb{P}(A)$?

(3) Montrer que C est dénombrable et que $C = C + C = C - C$, où par exemple

$$C + C = \{c + c' \,;\, c \in C,\, c' \in C\}.$$

(4) Montrer que si la loi de S n'est pas diffuse, il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(S \in a + C) = 1$.

(5) Montrer que si $\mathbb{P}(S \in N) \neq 0$ pour un borélien N de mesure nulle, alors il existe un borélien M de mesure nulle tel que $\mathbb{P}(S \in M) = 1$.

(6) Montrer que la loi de S est pure, c'est-à-dire que $S(\mathbb{P})$ est discrète, ou singulière, ou absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 3 (Théorème de Shannon) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $I = \{1, 2, \ldots, r\}$ avec $r \geqslant 2$ et $p(i) = P(X_1 = i) > 0$ pour tout $i \in I$.

On note $R_n(i_1, \ldots, i_n) = p(i_1) \cdots p(i_n)$ et $T_n = R_n(X_1, \ldots, X_n)$. Donc T_n est la probabilité qu'un autre expérimentateur obtienne les mêmes n premiers résultats que les résultats observés.

Montrer que $n^{-1} \log T_n$ converge presque sûrement vers une constante $-H$, exprimer H en fonction des données et montrer que $H > 0$.

Exercice 6 On fait 100 parties de pile ou face avec une pièce équilibrée. Indiquer comment estimer facilement la probabilité d'obtenir entre 45 et 55 faces.

Exercice 7 (Fonctions caractéristiques) (1) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.i.i.d. et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itS_n})$ en fonction de la fonction caractéristique de X_1.

(2) Calculer $\mathbb{E}(u^N)$ si $|u| \leqslant 1$ et si N est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a.

(3) En déduire que si ϕ est une fonction caractéristique, alors la fonction $\exp(-a(1 - \phi))$ est une fonction caractéristique pour tout $a > 0$.

Exercice 8 (Loi des grands nombres) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires uniformément bornées, c'est-à-dire telles qu'il existe M fini avec $|X_n(\omega)| \leqslant M$ pour tout n et tout ω.

On ne suppose pas que les X_n sont indépendantes.

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que si S_{n^2}/n^2 converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y, alors S_n/n converge aussi presque sûrement vers Y.

4.26 Examen de septembre 2000

Questions de cours (A) Exprimer uniquement à l'aide des fonctions caractéristiques de X et Y le fait que X et Y sont indépendantes.

(B) Rappeler l'énoncé donné pendant le cours du théorème de Lévy sur la convergence en loi.

(C) Donner un exemple d'une suite de v.a. $(X_n)_n$ qui ne converge pas en loi et telle que $P(X_n \leqslant x)$ converge pour tout x.

Exercice 1 On se donne : D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$; C l'ensemble des sommes $\boxed{\text{finies}}$ de la forme $\sum_k n_k\, d_k$ avec $n_k \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in D$; $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que :

(i) la série $\sum_{k=1}^n X_k$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire notée S ;

(ii) pour tout $n \geqslant 1$, $X_n \in D$ p.s.

(1) Soit B un borélien et $n \geqslant 1$. Montrer que $A = \{S \in B + C\}$ appartient à la tribu engendrée par les variables aléatoires $(X_k)_{k\geqslant n}$.

(2) Quelles sont les valeurs possibles de $\mathbb{P}(A)$?

(3) Montrer que C est dénombrable et que $C = C + C = C - C$, où par exemple

$$C + C = \{c + c' \,;\, c \in C,\, c' \in C\}.$$

(4) Montrer que si la loi de S n'est pas diffuse, il existe un réel a tel que $\mathbb{P}(S \in a + C) = 1$.

(5) Montrer que si $\mathbb{P}(S \in N) \neq 0$ pour un borélien N de mesure nulle, alors il existe un borélien M de mesure nulle tel que $\mathbb{P}(S \in M) = 1$.

(6) Théorème de pureté : montrer que la loi de S est pure, c'est-à-dire qu'elle est discrète, ou singulière, ou absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 2 On fait 100 parties de pile ou face avec une pièce équilibrée. Utiliser un résultat du cours pour estimer facilement la probabilité d'obtenir entre 45 et 55 faces.

Exercice 3 On suppose que les X_n sont des variables aléatoires indépendantes et que la loi de X_n est $(\delta_{4^{-n}} + \delta_{-4^{-n}})/2$.

(1) Montrer que la suite S_n converge presque sûrement vers une limite S.

(2) La variable aléatoire S est-elle presque sûrement constante ? Ceci contredit-il la loi du zéro-un de Kolmogorov ?

(3) Quelles sont les variables aléatoires X_n qui sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par S ?

Exercice 4 On suppose que les X_n sont des variables aléatoires indépendantes et que la loi de X_n est

$$(1-n^{-3})\,\delta_1 + n^{-3}\,\delta_{1-n^3}.$$

(1) Montrer que X_n est intégrable et calculer $\mathbb{E}[X_n]$.

(2) Montrer que la suite S_n/n admet une limite presque sûrement S et calculer S.

Exercice 5 (1) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et X des variables aléatoires de lois respectives $f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $f(x)\,\mathrm{d}x$. On suppose que f_n converge vers f presque partout pour la mesure de Lebesgue. Montrer que X_n converge en loi vers X.

(2) Soit X_1 et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes de lois

$$X_1(\mathbb{P})(\mathrm{d}x) = f_1(x)\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varepsilon_n(\mathbb{P}) = (\delta_0+\delta_1)/2.$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $X_{n+1} = (X_n+\varepsilon_n)/2$.

(a) Déterminer la loi de X_n et montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi. On montrera que les lois de X_n et X sont densitables.

(b) Si f_n est la densité de la loi de X_n, choisir f_1 de sorte que f_n ne converge pas vers la densité de la loi de X presque partout pour la mesure de Lebesgue.

4.27 Contrôle continu d'avril 2006

Énoncé

Durée 2 heures. Pas de documents, de calculatrice, ni de téléphone portable.

On répondra aux questions de cours **avant** d'aborder la résolution des exercices. Les exercices sont indépendants les uns des autres. On peut utiliser les résultats des questions précédentes d'un exercice donné pour résoudre une question.

Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions de l'énoncé pour obtenir la note maximale. On portera une attention particulière à la rédaction des copies et aux justifications des réponses.

Questions de cours **(1)** Définir l'indépendance de de trois événements A, B et C.

(2) Énoncer le lemme de Borel-Cantelli (les deux parties).

(3) Définir la loi d'une variable aléatoire réelle.

(4) Définir la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

(5) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Chebychev.

(6) Définir les trois types de convergence d'une suite de variables aléatoires tels qu'ils ont été étudiés dans le cours.

(7) Énoncer les implications qui existent entre ces trois types de convergence, ainsi que les implications réciproques partielles.

(8) Pour chacune des implications réciproques partielles, donner un exemple montrant que l'hypothèse supplémentaire est nécessaire.

(9) Énoncer la loi des grands nombres pour une suite de variables aléatoires i.i.d. dans L^4.

(10) Soit X une variable aléatoire réelle positive. On suppose qu'il existe des constantes c et a telles que $\mathbb{P}(X \geqslant x) \sim c\, x^a$ quand x tend vers l'infini. Préciser pour quelles valeurs de a la variable aléatoire X est intégrable, respectivement de carré intégrable.

Exercice A Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$ et on s'intéresse principalement au comportement asymptotique de M_n quand n tend vers l'infini.

(0) Montrer que $\liminf X_n = 0$ presque sûrement.

(1) Pour tout a positif, on note $A_n^a = \{X_n \geqslant a \log n\}$.

(a) Préciser pour quelles valeurs de a la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n^a)$ converge.

(b) Montrer que $\limsup X_n / \log n = 1$ presque sûrement.

(c) Montrer que $\limsup M_n / \log n = 1$ presque sûrement.

(2) Pour tout entier $p \geqslant 1$, on note $K(n)$ l'ensemble des entiers k tels que $(p+1)^{n-1} < k \leqslant (p+1)^n$ et B_n^p l'événement

$$B_n^p = \{\,\forall k \in K(n),\ X_k \leqslant n \,\log p\}.$$

(a) Montrer que les événements $(B_n^p)_{n\geqslant 1}$ sont indépendants.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(B_n^p) = (1 - p^{-n})^{p\,(p+1)^{n-1}}$.

(c) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(B_n^p)$ converge.

(d) Montrer qu'il existe un entier ν aléatoire presque sûrement fini tel que, pour tout $n \geqslant \nu$ et tout $k \geqslant (p+1)^n$,

$$M_k / \log k \geqslant (p/(p+1))\, n/(n+1).$$

(3) En déduire finalement que $\lim M_n / \log n = 1$ presque sûrement.

Exercice B Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la fonction f pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue, avec

$$f(x, y) = c \cdot (x^2 + y^2) \cdot \mathbf{1}\{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}.$$

(1) Calculer c.

(2) Calculer la loi de X et celle de Y. On montrera que ces deux lois admettent la même densité g par rapport à la mesure de Lebesgue et on calculera g.

(3) Préciser si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ou non.

(4) Calculer l'espérance de X et de Y et la covariance de X et Y et faire un commentaire.

Exercice C Pour toute variable aléatoire X, on pose $D(X) = \mathbb{E}\left(\dfrac{|X|}{1 + |X|}\right)$.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers X en probabilité si et seulement si la suite de terme général $D(X_n - X)$ tend vers 0.

Exercice D Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}.$$

(1) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, la série qui définit $f_n(x)$ converge.

(2) Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs a et b.

(a) Montrer que Y et Z sont dans L^4.

(b) Calculer la loi de $Y + Z$.

(3) Soit $x > 0$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre x. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Déterminer la loi de S_n. En déduire que $f_n(x) = \mathbb{E}(f(S_n/n))$.

(4) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}^+$. On pourra distinguer les cas $x = 0$ et $x > 0$.

Exercice E Montrer le **théorème de Slutsky** : Soit a un nombre réel et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ et continue en a. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers a. Alors la suite $(\varphi(X_n))_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\varphi(a)$.

On pourra commencer par traiter le cas où φ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, puis traiter le cas général.

Corrigé succinct

Q(10) La variable aléatoire X est dans L^p si et seulement si $a < -p$.

A(0) Si $C_n^a = \{X_n \leqslant a\}$, $\mathbb{P}(C_n^a) = 1-\mathrm{e}^{-a} > 0$ pour tout $a > 0$, donc la série de terme général $\mathbb{P}(C_n^a)$ diverge. Le lemme de Borel-Cantelli partie difficile montre que $X_n \leqslant a$ pour une infinité d'indices n, donc $\liminf X_n \leqslant a$ presque sûrement. CQFD.

(1)(a) $\mathbb{P}(A_n^a) = n^{-a}$ donc la série converge si et seulement si $a > 1$.

(b) Si $a > 1$, le lemme de Borel-Cantelli partie facile montre que $X_n < a \log n$ pour tout entier n à partir d'un certain rang.
Donc $\limsup X_n/\log n \leqslant a$ presque sûrement.
Si $a = 1$, la série diverge et les variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes donc le lemme de Borel-Cantelli partie difficile montre que $X_n \geqslant \log n$ pour une infinité d'indices n, donc $\limsup X_n/\log n \geqslant 1$ presque sûrement. CQFD.

(c) Comme $M_n \geqslant X_n$, (b) entraîne que $\limsup M_n/\log n \geqslant 1$ presque sûrement. D'après la première partie de (b), si $a > 1$, il existe un entier aléatoire ν presque sûrement fini tel que $X_n < a \log n$ pour tout $n \geqslant \nu$. En posant $Y = \max\{X_k \,;\, 1 \leqslant k \leqslant \nu\}$, on obtient $X_n \leqslant Y + a \log n$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $M_n \leqslant Y + a \log n$ pour tout $n \geqslant 1$, et $\limsup M_n/\log n \leqslant a$ presque sûrement. CQFD.

(2)(a) B_n^p appartient à la tribu engendrée par $(X_k)_{k\in K(n)}$ et les ensembles $(K(n))_{n\geqslant 1}$ sont disjoints donc le théorème des coalitions montre que la suite $(B_n^p)_{n\geqslant 1}$ est indépendante.

(b) Par indépendance, $\mathbb{P}(B_n^p)$ est le produit des $\mathbb{P}(X_k \leqslant n \log p) = 1 - p^{-n}$ pour k dans $K(n)$, et $K(n)$ contient $(p+1)^n - (p+1)^{n-1} = c\,(p+1)^n$ éléments avec $c = p/(p+1)$. CQFD.

(c) On écrit $\log \mathbb{P}(B_n^p) = c\,(p+1)^n \log(1-p^{-n})$ et on développe le logarithme, donc $\log \mathbb{P}(B_n^p) \sim -c\,(1+1/p)^n$. Comme $1+1/p > 1$, $(1+1/p)^n \geqslant n$ pour n assez grand, donc la série de terme général $\mathbb{P}(B_n^p) \leqslant \mathrm{e}^{-c\,n+o(n)}$ est sommable. CQFD.

(d) Le lemme de Borel-Cantelli partie facile montre qu'il existe un entier aléatoire ν presque sûrement fini tel que, pour tout $n \geqslant \nu$, il existe un entier k dans $K(n)$ tel que $X_k \geqslant n \log p$. Donc $M_{(p+1)^n} \geqslant X_k \geqslant n \log p$. Pour tout $k > (p+1)^\nu$, il existe $n \geqslant \nu$ tel que k est dans $K(n+1)$, donc $M_k \geqslant M_{(p+1)^n} \geqslant n \log p$. Comme $k \leqslant (p+1)^{n+1}$, $n+1 \geqslant \log k/\log(p+1)$ et $M_k/k \geqslant (\log p/\log(p+1))\,n/(n+1)$.

(3) D'après (2)(d), $\liminf M_k/\log k \geqslant \log p/\log(p+1)$ presque sûrement, pour tout entier $p \geqslant 2$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient $\liminf M_k/\log k \geqslant 1$ presque sûrement, et (1)(c) permet de conclure.

B(1) L'intégrale de f vaut 1 donc $c = \frac{3}{8}$.

(2) On intègre $f(x,\cdot)$, donc $g(x) = \frac{1}{4}\,(3x^2+1)\,\mathbf{1}_{|x|\leqslant 1}$.

(3) Il n'y a pas indépendance puisque $f(x,y) \neq g(x)\,g(y)$.

(4) Comme g est paire, la loi de X et Y est symétrique par rapport à 0 donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$. Pour la covariance de X et Y, on intègre $h(x,y) = xy\,f(x,y)$. Comme $h(-x,y) = -h(x,y)$, la covariance est nulle. Commentaire : covariance nulle n'entraîne pas indépendance.

C Fait en cours.

Pour tous réels x et t positifs, $\mathbf{1}_{x\geqslant t}\,t/(1+t) \leqslant x/(1+x) \leqslant t + \mathbf{1}_{x\geqslant t}$. En intégrant cette double inégalité en x selon la loi de X, on obtient

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,t/(1+t) \leqslant D(X) \leqslant t + \mathbb{P}(|X| \geqslant t).$$

Si $\mathbb{P}(|X_n| \geqslant t)$ tend vers 0, l'inégalité de droite montre que $\limsup D(X_n) \leqslant t$ donc, si $(X_n)_n$ tend vers 0 en probabilité, $\limsup D(X_n) \leqslant t$ pour tout t donc $D(X_n)$ tend vers 0. Réciproquement, si $D(X_n)$ tend vers 0, l'inégalité de gauche montre que $\mathbb{P}(|X_n| \geqslant t)$ tend vers 0, pour tout t. CQFD.

D(1) Si $x = 0$, la série ne comporte qu'un terme non nul donc elle converge et $f_n(0) = f(0)$. Si $x > 0$, comme f est bornée, il suffit de vérifier que la série en k de terme général $(nx)^k/k!$ converge. C'est la série exponentielle donc $f_n(x)$ converge (et $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.)

(2)(a) $\mathbb{P}(Y = k) = \mathrm{e}^{-a}\,a^k/k!$ et $k! \gg k^{p+2}\,a^k$ pour tout p donc Y et Z sont dans tous les L^p.

(b) Soit on calcule $\mathbb{P}(Y+Z = n)$ comme la somme des $\mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}(Z = n-k)$ et on reconnaît $\mathrm{e}^{-(a+b)}\,(a+b)^n/n!$ donc $Y+Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $a+b$.

Soit on utilise la fonction génératrice $\mathbb{E}(s^Y)$, définie pour tout $|s| \leqslant 1$. Alors $\mathbb{E}(s^Y) = \exp(-a\,(1-s))$ et $\mathbb{E}(s^{Y+Z}) = \mathbb{E}(s^Y)\,\mathbb{E}(s^Z) = \exp(-(a+b)\,(1-s))$. Comme la fonction génératrice détermine la loi, on retrouve que la loi de $Y+Z$ est Poisson de paramètre $a+b$.

(3) En itérant (2)(b), la loi de S_n est Poisson de paramètre nx. Donc $f_n(x) = \mathbb{E}(f(S_n/n))$.

(4) Si $x = 0$, $f_n(0) = f(0)$. Si $x > 0$, la loi des grands nombres L^4 montre que S_n/n converge vers x presque sûrement.
Comme f est continue, $T_n = f(S_n/n)$ converge vers $f(x)$ presque sûrement. Comme f est bornée, $(T_n)_n$ est uniformément intégrable donc T_n converge vers $f(x)$ dans L^1. CQFD. (Ou bien on se souvient que dans la loi des grands nombres L^4, on démontre aussi la convergence dans L^4.)

E Fait en cours.

Bêtisier

Chacune des assertions ci-dessous figure dans au moins une copie, en général dans plus d'une copie, et elle est fausse de manière évidente.

La variable aléatoire X est dans L^4 si et seulement si $\sum_n \mathbb{P}(X = n)^4$ converge.

D'ailleurs (?), $\mathbb{E}(X^4) = \sum_n n^4 \, \mathbb{P}(X^4 = n)$.

Et si $X \geqslant 0$, $\mathbb{E}(X^2) = \int \mathbb{P}(X \geqslant x)^2 \, \mathrm{d}x$.

Si f est la densité de la loi de X, alors $\mathbb{E}(X^4) = \int f(x)^4 \, \mathrm{d}x$.

La loi de Poisson de paramètre a admet la densité $a\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathbf{1}\{x \geqslant 0\}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

La loi de Poisson de paramètre a est $\sum_n \mathrm{e}^{-an} \dfrac{a^n}{n!} \delta_n$.

Puisque S_n/n converge vers x (peut-être au sens de la convergence presque sûre, mais ce n'est pas précisé), la loi de S_n est δ_{nx}.

Puisque $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout n, la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge.

Soit $(X_n)_n$ des variables aléatoires de loi exponentielle. Alors $\liminf_n X_n = 0$ si et seulement si $X_n = 0$ pour une infinité d'indices n.

D'après la loi des grands nombres dans L^4, la suite $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ converge vers $\mathbb{E}(X_1^4)$.

Puisque $X_n \to X$ en probabilité, $|X_n - X| \leqslant \varepsilon$ presque sûrement, pour tout n assez grand.

Les dernières assertions n'ont rien à voir avec les probabilités.

La fonction φ est continue en a donc elle est continue sur un intervalle assez petit $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Le domaine du plan défini par les conditions $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$ est le carré dont les quatre sommets sont les points $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$.

Quand $n \to \infty$, $(1 - x^{-n})^{y^n} \sim (-1)^{-n+y^n} \, x^{-n+y^n}$.

Quand $n \to \infty$, $1 - 1/p^n \sim 1/p^{n-1}$.

4.28 Examen final de juin 2006

Énoncé

Durée 3 heures. Pas de documents, de calculatrice, ni de téléphone portable.

On répondra aux questions de cours **avant** d'aborder la résolution des exercices. On portera une attention particulière à la rédaction des copies et aux justifications des réponses.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. On peut utiliser les résultats des questions précédentes d'un exercice donné pour résoudre une question.

Questions de cours **(1)** Énoncer la loi des grands nombres pour une suite de variables aléatoires i.i.d. dans L^1.

(2) Définir la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

(3) Donner si c'est possible un exemple d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires qui converge en loi et telle qu'aucune de ses sous-suites $(X_{\varphi(n)})_n$ ne converge en probabilité. Si c'est impossible, expliquer pourquoi.

(4) Donner si c'est possible un exemple de deux suites $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ de variables aléatoires telles que X_n converge en loi vers X, Y_n converge en loi vers Y, mais $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X + Y$. Si c'est impossible, expliquer pourquoi.

(5) Énoncer le théorème central limite pour une suite de variables aléatoires i.i.d. dans L^2.

(6) Donner la définition de la loi de Poisson de paramètre a.

Exercice A Dans cet exercice, toutes les lois considérées sont composées d'une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et d'une partie somme de masses de Dirac. L'expression « calculer la loi » signifie donc préciser la densité de la partie absolument continue et préciser la décomposition de la partie restante comme une somme pondérée de masses de Dirac.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres a et b.

(1) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

(2) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

(3) Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

(4) On pose $Z = (X - Y)^+$. Calculer la loi de Z. On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$ et, pour tout $z > 0$, $\mathbb{P}(Z \geqslant z)$.

(5) On pose $W = \sup\{X, Y\}$. Calculer la loi de W.

(6) On pose $U = \inf\{X, Y\}$ et $V = |X - Y|$. Préciser si W est indépendante de U ou non. Préciser si W est indépendante de V ou non.

(7) Soit u et v deux réels positifs.

Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant u,\, Y \geqslant X + v)$ et $\mathbb{P}(Y \geqslant u,\, X \geqslant Y + v)$.

(8) Soit u et v deux réels positifs. Calculer $\mathbb{P}(U \geqslant u,\, V \geqslant v)$. En déduire que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes et calculer leur loi.

Exercice B Pour tout nombre réel $a \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, on note $[an]$ la partie entière de an et

$$x_n(a) = \sum_{k=0}^{[an]} \frac{n^k}{k!}.$$

(1) Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a. Pour tout réel t, calculer $h(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tN})$.

(2) Soit N_a et N_b deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres a et b. Calculer la loi de $N_a + N_b$.

(3) Montrer que la loi de Poisson de paramètre n coïncide avec la loi d'une somme de n variables aléatoires i.i.d. dont on précisera la loi.

(4) Montrer que $x_n(a) = \mathrm{e}^n\,\mathbb{P}(X_n \leqslant an)$ pour une variable aléatoire X_n dont on précisera la loi.

(5) Pour tout $a < 1$, utiliser la loi des grands nombres et les questions précédentes pour montrer que $x_n(a) \ll \mathrm{e}^n$ quand $n \to \infty$.

(6) Pour tout $a > 1$, utiliser la loi des grands nombres et les questions précédentes pour montrer que $x_n(a) \sim \mathrm{e}^n$ quand $n \to \infty$.

(7) Soit $a = 1$. Utiliser le théorème de la limite centrale et les questions précédentes pour trouver un équivalent simple de $x_n(1)$ quand $n \to \infty$.

Exercice C Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$. On note

$$V_n = (U_n)^n, \qquad V = \sup\{\,V_n\,;\,n \geqslant 1\,\}, \qquad W = \sup\{\,V_{2^n}\,;\,n \geqslant 1\,\}.$$

(1) Pour tout $n \geqslant 1$, montrer que la loi de V_n est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et préciser sa densité. Calculer $\mathbb{E}(V_n)$.

(2) Pour tout $0 < x \leqslant 1$ et $n \geqslant 1$, montrer l'encadrement suivant :

$$1 - x \leqslant n\,(1 - x^{1/n}) \leqslant \log(1/x).$$

(3) Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on pose $A_x(n) = \{\,V_n \geqslant x\,\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_x(n))$.

(4) Soit $(n_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'entiers et $0 < x < 1$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(A_x(n_k))$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} 1/n_k$ converge.

(5) Montrer que $V = 1$ presque sûrement.

(6) Montrer que $0 < W < 1$ presque sûrement.

(7) Calculer la loi de W.

Corrigé succinct

Q3 C'est possible. On peut considérer une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi commune m non dégénérée. En loi, cette suite est constante. Mais si une de ses sous-suites convergeait en probabilité, une sous-suite de cette sous-suite convergerait presque sûrement. Or cette sous-suite de sous-suite est distribuée comme la suite de départ, c'est-à-dire qu'elle est i.i.d. avec la loi m, donc elle diverge presque sûrement.

Q4 C'est possible. On peut considérer une suite $(X_n)_n$ i.i.d. de loi commune m non dégénérée et symétrique, par exemple la loi de Bernoulli $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$. On pose $Y_n = -X_n$ et $X = Y = X_1$. Alors X_n converge vers X en loi, Y_n converge vers Y en loi, mais $X_n + Y_n = 0$ ne converge pas en loi vers $X + Y = 2X_1$.

A1 $\mathbb{E}(X) = 1/a$ et $\mathbb{E}(Y) = 1/b$.

A2 Comme les variables aléatoires sont indépendantes et qu'une des deux lois n'a pas d'atomes, $\mathbb{P}(X = Y) = 0$ (fait en cours).

A3 Par définition, $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$ vaut l'intégrale de la fonction $ab\,\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-by}$ sur le domaine $y \geqslant x \geqslant 0$, soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x \int_x^{+\infty} b\mathrm{e}^{-by}\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-bx}\mathrm{d}x$, donc $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = a/(a+b)$.

On peut aussi utiliser l'expression $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \displaystyle\int \mathbb{P}(x \leqslant Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$ et le fait que $\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = a\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$, et calculer $\mathbb{P}(x \leqslant Y) = \mathrm{e}^{-bx}$.

A4 Soit $p = a/(a+b)$. Alors $\mathbb{P}(Z = 0) = p$ d'après A3 et, par un calcul similaire, $\mathbb{P}(Z \geqslant z) = (1-p)\,\mathrm{e}^{-az}$ pour tout $z > 0$. Donc la loi de Z est $p\,\delta_0(\mathrm{d}z) + (1-p)\,a\mathrm{e}^{-az}\,\mathrm{d}z$.

A5 $\{\,W \leqslant w\,\} = \{\,X \leqslant w\,\} \cap \{\,Y \leqslant w\,\}$.

Donc $\mathbb{P}(W \leqslant w) = (1-\mathrm{e}^{-aw})\,(1-\mathrm{e}^{-bw})$. En dérivant, on trouve que la loi de W admet la densité $a\mathrm{e}^{-aw} + b\mathrm{e}^{-bw} - (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)w}$.

A6 Par définition, $U \leqslant W$ presque sûrement donc $\mathbb{P}(U \geqslant 2, W \leqslant 1) = 0$ alors que $\mathbb{P}(U \geqslant 2) \neq 0$ et $\mathbb{P}(W \leqslant 1) \neq 0$, donc U et W ne sont pas indépendantes. De même $V \leqslant W$ presque sûrement donc un raisonnement analogue montre que V et W ne sont pas indépendantes.

A7 Par définition, $\mathbb{P}(X \geqslant u,\, Y \geqslant X+v)$ vaut l'intégrale de la fonction $ab\,\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-by}$ sur le domaine $x \geqslant u$, $y \geqslant x+v$, soit

$$\int_u^{+\infty} a\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x \int_{x+v}^{+\infty} b\mathrm{e}^{-by}\mathrm{d}y = \int_u^{+\infty} a\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-b(x+v)}\mathrm{d}x = p\,\mathrm{e}^{-bv}\mathrm{e}^{-(a+b)u}.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(Y \geqslant u,\, X \geqslant Y+v) = (1-p)\,\mathrm{e}^{-av}\mathrm{e}^{-(a+b)u}$ par symétrie entre X et Y et entre a et b.

A8 L'événement $\{\,U \geqslant u, V \geqslant v\,\}$ est la réunion disjointe des deux événements considérés dans la question précédente donc

$$\mathbb{P}(U \geqslant u,\, V \geqslant v) = (p\,\mathrm{e}^{-bv} + (1-p)\,\mathrm{e}^{-av})\,\mathrm{e}^{-(a+b)u}.$$

On obtient le produit d'une fonction de u et d'une fonction de v donc U et V sont indépendantes et $\mathbb{P}(V \geqslant v) = p\,\mathrm{e}^{-bv} + (1-p)\,\mathrm{e}^{-av}$, respectivement $\mathbb{P}(U \geqslant u) = \mathrm{e}^{-(a+b)u}$. En dérivant, on voit que la loi de U est exponentielle de paramètre $a+b$ et que V suit la loi de densité $(ab/(a+b))\,(\mathrm{e}^{-av} + \mathrm{e}^{-bv})$.

B1 Pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbb{P}(N = n) = \mathrm{e}^{-a}a^n/n!$ donc $h(t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-a}(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n/n!$, soit $h(t) = \mathrm{e}^{-a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}$.

B2 Pour tout t, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(N_a+N_b)}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tN_a})\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tN_b}) = \mathrm{e}^{-(a+b)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}$, par indépendance de N_a et N_b. D'après B1, c'est la fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre $a+b$.

B3 D'après B2, la somme de n variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1 suit une loi de Poisson de paramètre n.

B4 On pose $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ avec $(Y_n)_n$ i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1 donc X_n suit la loi de Poisson de paramètre n.

B5–B6 Comme Y_1 est intégrable, la loi des grands nombres pour des variables aléatoires i.i.d. intégrables montre que $X_n/n \to \mathbb{E}(Y_1) = 1$ presque sûrement, donc en probabilité. Donc $\mathbb{P}(X_n \in nB) \to 0$ dès que l'adhérence de B ne contient pas 1.

B7 Le théorème central limite pour des variables aléatoires i.i.d. de carré intégrable montre que $(X_n - n)/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z gaussienne centrée de variance $\sigma^2(Y_1) = 1$, car Y_1 est de carré intégrable et $\mathbb{E}(Y_1) = 1$. Donc $\mathbb{P}(X_n \leqslant n) = \mathbb{P}((X_n - n)/\sqrt{n} \leqslant 0) \to \mathbb{P}(Z \leqslant 0) = \frac{1}{2}$ et $x_n(1) \sim \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$.

C1 Soit U de loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour x dans $[0,1]$, $\mathbb{P}(V_n \leqslant x) = \mathbb{P}(U \leqslant x^{1/n}) = x^{1/n}$ donc, en dérivant, la loi de V_n admet pour densité $a\,x^{a-1}\,\mathbf{1}_{0\leqslant x\leqslant 1}$ avec $a = \frac{1}{n}$. Enfin, $\mathbb{E}(V_n)$ vaut l'intégrale de $\mathbb{P}(V_n \geqslant x) = 1 - x^a$ sur $[0,1]$, soit $1 - 1/(a+1) = 1/(n+1)$.

C2 Soit $\varphi(x) = n\,x^{1/n}$. La dérivée $\varphi'(x) = x^{1/n}/x$ vérifie $\varphi' \geqslant 1$ sur $[0,1]$ donc $\varphi(1)-\varphi(x) \geqslant 1-x$, ce qui donne l'inégalité de gauche.

Soit $\psi(x) = n\,x^{1/n} - \log x$. La dérivée $\psi'(x) = (x^{1/n}-1)/x$ est négative sur $[0,1]$ donc $\psi(1) \leqslant \psi(x)$, ce qui donne l'inégalité de droite.

C3 $\mathbb{P}(A_x(n)) = \mathbb{P}(U \geqslant x^{1/n}) = 1 - x^{1/n}$.

C4 D'après C3, la série des probabilités est la série des $1 - x^{1/n_k}$, qui est encadrée, d'après C2, par deux multiples strictement positifs (et dépendant de x) de $1/n_k$. Donc la série des probabilités et la série des $1/n_k$ sont de même nature.

C5 D'après C3 pour $n_k = k$ et le lemme de Borel-Cantelli, partie difficile, pour tout $x < 1$, $V_n \geqslant x$ pour une infinité de n, presque sûrement. En particulier, $V \geqslant x$ presque sûrement. Comme $x < 1$ est quelconque et comme $0 \leqslant V \leqslant 1$, $V = 1$ presque sûrement.

C6 $W \geqslant V_2 = (U_2)^2$ et $U_2 > 0$ presque sûrement donc $W > 0$ presque sûrement. D'après C3 pour $n_k = 2^k$ et le lemme de Borel-Cantelli, partie facile, pour $x = \frac{1}{2}$, $V_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour un nombre fini de n, presque sûrement. Donc W vaut au plus le maximum de $\frac{1}{2}$ et d'un nombre fini de $V_n < 1$, donc $W < 1$ presque sûrement.

C7 Soit $W_n = \max\{\, V_{2^k}\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n \,\}$.

Alors $W_n \leqslant x$ signifie que $V_{2^k} \leqslant x$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Par indépendance d'un nombre fini d'événements, $\mathbb{P}(W_n \leqslant x)$ vaut le produit des $\mathbb{P}(V_k \leqslant x)$, soit $x\,x^{1/2}\cdots x^{1/2^n} = x^{1-1/2^n}$. Quand $n \to \infty$, $W_n \to W$ presque sûrement, donc en loi, donc $\mathbb{P}(W_n \leqslant x) \to \mathbb{P}(W \leqslant x)$, soit $\mathbb{P}(W \leqslant x) = x$. Donc la loi de W est uniforme sur $[0,1]$.

Bêtisier

Chacune des assertions ci-dessous figure dans les copies et est fausse.

Si $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 1$, alors $x^{1/n} \leqslant x$.

$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X = Y = x)$.

Si $\mathbb{P}(X = Y = x) = 0$ pour tout x, alors $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

$\mathbb{P}(X \geqslant u,\, Y \geqslant X + v) = \mathbb{P}(X \geqslant u,\, Y \geqslant u + v)$.

$\mathbb{P}(V \geqslant v) = \mathrm{e}^{-av} + \mathrm{e}^{-bv}$.

$\mathbb{P}(X \leqslant w) = \mathrm{e}^{-aw}$.

Puisque $\sup_n V_n = 1$, il existe n tel que $V_n = 1$.

Puisque $\sup_n V_n = 1$, $V_n = 1$ pour tout n.

$0 < W < 1$ presque sûrement et $\mathbb{P}_W = \delta_1$.

Puisque $X_n \to 1$ presque sûrement, il existe un événement A tel que $\mathbb{P}(A) = 1$ et $\sup_A |X_n - 1| \to 0$.

$1/v^{(n-1)/n} = v^{n/(n-1)}$.

Puisque $W = U + V$ et puisque U n'est pas indépendante de W, il s'ensuit que V n'est pas indépendante de U.

On sait que si $X_n \to c$ en loi, alors $X_n \to c$ en probabilité. Par conséquent, si $X_n \to X$ en loi et si X n'est pas une variable aléatoire constante, alors il n'existe pas de suite extraite $(X_{\varphi(n)})_n$ qui converge en probabilité vers X.

Soit $(X_n)_n$ une suite i.i.d. de variables aléatoires intégrables avec $\mathbb{E}(X_n) = 1$, et soit $S_n = X_1 +$

$\cdots + X_n$. Alors $\mathbb{P}((S_n/n) = 1) \to 1$.

Soit $(U_n)_n$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$. Alors $(U_n)^n$ et $U_1 U_2 \cdots U_n$ suivent la même loi.

Soit X_n de loi uniforme sur l'intervalle $[n, 2n+1]$. Alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi.

Suppléments

Exercice D Soit $(X_n)_n$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de carré intégrable telles que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{E}(X_n^2) = \sigma^2$. On note

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \qquad C_n = \sum_{k=1}^n X_k^2, \qquad Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{C_n}}, \qquad T_n = \mathrm{e}^{-S_n}\,\mathbf{1}\{S_n \geqslant 0\}.$$

(1) Montrer que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la limite.

(2) Montrer que C_n/n converge presque sûrement quand $n \to \infty$ et préciser la limite.

(3) Montrer que, presque sûrement, $C_n > 0$ à partir d'un certain rang, et donc que Y_n est presque sûrement bien définie à partir d'un certain rang.

(4) Montrer que Y_n converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la limite.

(5) Calculer la limite de $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0)$ quand $n \to \infty$.

(6) Montrer que $0 \leqslant \mathbb{E}(T_n) \leqslant 1$.

(7) Montrer que $\mathbb{E}(T_n)^{1/\sqrt{n}}$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.

On pourra fixer un nombre réel $c > 0$ et considérer les événements

$$A_n(c) := \left\{ 0 \leqslant S_n \leqslant c\sqrt{n} \right\}.$$

Exercice E Soit a un nombre réel $0 < a < 1$ et N une variable aléatoire à valeurs entières telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(N \geqslant n) = (1-a)^{n-1}$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre x. On note

$$S_a = \sum_{n=1}^N X_n, \qquad Y_a = \frac{a\,S_a - 1/x}{\sqrt{a}}.$$

On rappelle que, pour tout nombre complexe z de partie réelle strictement positive,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zv}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{z}.$$

(1) Donner la loi de N. Calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X)$.

(2) Pour tout nombre réel t, calculer $h(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX})$.

(3) Pour tout nombre réel t, calculer $g(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tN})$.

(4) Calculer la loi de S_a. Calculer $\mathbb{E}(S_a)$.

(5) Montrer que S_a converge en loi vers $+\infty$ quand $a \to 0$, au sens où, pour tout nombre réel y, $\mathbb{P}(S_a \geqslant y) \to 1$.

(6) Pour tout nombre réel t, calculer $k(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tY_a})$.

(7) Montrer que Y_a converge en loi quand $a \to 0$ et préciser la loi limite.