Université Joseph Fourier
Mathématiques

UE MAT 127
année 2011-2012

Chapitre 4
Equations différentielles couplées

1 Champs de vecteurs et trajectoires :

1.1 Définitions :

Définition 1.1 *Un champ de vecteurs* $\overrightarrow{F}$ *sur le plan est une application qui, à tout point* (x, y) *du plan associe un vecteur* $\overrightarrow{F}(x, y)$ *dont les coordonnées sont donc deux fonctions notées* $f_1(x, y)$ *et* $f_2(x, y)$ *, ce qu'on note*

$$\overrightarrow{F}(x,y) \;=\; (\,f_1(x,y)\,,\,f_2(x,y)\,) \tag{1}$$

Quand on le dessine dans le plan, le vecteur $\overrightarrow{F}(x, y)$ *est représenté avec son origine au point* (x, y) *.*

Exercice 1 .– On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ défini sur le plan par :

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (\frac{y}{2}, -\frac{x}{2})$$

Donner la valeur de ce champ de vecteurs (et le dessiner) aux points :

$$(1,0)\ ;\ (1,1)\ ;\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\ ;\ (0,1)\ ;\ (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\ ;\ (-1,1)\ ;\ (-1,0)\ ;\ (-1,-1)\ ;\ (0,-1)\ ;\ (1,-1)\,.$$

Définition 1.2 *Une équation différentielle couplée est un système d'équations simultanément vérifiées par un couple de fonctions* $t \mapsto x(t)$ *et* $t \mapsto y(t)$ *de la forme :*

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

ce qui signifie que, à chaque instant t *, les dérivées* $x'(t)$ *et* $y'(t)$ *vérifient en même temps les équations :*

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(x(t),y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t),y(t)) \end{cases} \tag{3}$$

On définit le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ *associé à cette équation couplée par l'égalité* $\overrightarrow{F}(x, y) = (\,f_1(x, y)\,,\,f_2(x, y)\,)$*, on obtient donc*

$$(x'(t), y'(t)) = \overrightarrow{F}(x(t), y(t)) \quad ,$$

ce qui signifie que le vecteur-vitesse du point mobile $(x(t), y(t))$ *est la valeur en ce point du champ de vecteurs.*

Définition 1.3 *Une trajectoire du point mobile* $(x(t), y(t))$ *est l'ensemble des positions de ce point quand* t *parcourt tout l'intervalle des temps*[1]. *Si* $(x(t), y(t))$ *est une solution d'une équation couplée du type (2), alors sa trajectoire est, en chacun de ses points, tangente au champ de vecteurs associé.*
L'ensemble des trajectoires dessine[2] *dans le plan le "portrait de phase"*

Une analogie mécanique : Dans un environnement où le régime des vents serait permanent, la vitesse du vent en chaque point de l'espace serait le champ de vecteurs; si on lâche une plume (supposée de poids nul) à un instant t_0, la position de la plume dans l'espace à cet instant est la condition initiale et la trajectoire est le trajet suivi ensuite par la plume au gré du vent. La plume n'ayant aucune inertie, sa vitesse à un instant t est la vitesse du vent au point qu'elle occupe dans l'espace à cet instant.

Il y a deux manières de présenter graphiquement les solutions d'une équation différentielle couplée :

- Faire un graphique où l'on met t en abscisse et $x(t)$ et $y(t)$ en ordonnées, i. e. on représente sur la même figure (et dans le même système d'axes) les deux graphes des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
- Dessiner les trajectoires, ce qui revient à porter $x(t)$ en abscisse et $y(t)$ en ordonnée.

Le défaut de la représentation par trajectoires réside dans le fait que cette méthode ne restitue pas toute l'information contenue dans l'équation différentielle couplée : en effet, elle ne fait par exemple pas la différence entre deux équations différentielles couplées qui suivent la même trajectoire, mais à des vitesses différentes ou avec un décalage dans le temps[3].
Ce défaut peut devenir un avantage, puisqu'il peut faire apparaître visuellement des relations entre $x(t)$ et $y(t)$ qui ne sont pas évidentes si on considère les deux graphes des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ (voir un exemple dans l'exercice 2 ci-dessous).

Exercice 2 .– Considérons les solutions $(x(t), y(t))$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = \dfrac{y}{2} \\ y' = -\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

1. Calculer $x'(t) \,.\, x(t) + y'(t) \,.\, y(t)$.
2. Que peut-on en déduire pour la fonction $t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2$?

---

[1] Pour ceux qui connaissent ce vocabulaire une solution d'une équation couplée est une courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t))$ et l'image de cette courbe est la trajectoire du point mobile $(x(t), y(t))$.

[2] Comme il est impossible de dessiner toutes les trajectoires, on en dessine quelques unes en commençant par les trajectoires réduites à un point (positions d'équilibre), les trajectoires qui suivent une droite, celles qui sont périodiques, etc.

[3] On peut remédier à cet inconvénient en plaçant quelques points sur la trajectoire et en indiquant à quel instant chacun de ces points est atteint, mais ce n'est encore là qu'une information partielle.

3. Quelle est la trajectoire parcourue par le point $(x(t), y(t))$, sachant que $(x(0), y(0)) = (1, 0)$?

4. Quelle est la trajectoire parcourue par le point $(x(t), y(t))$, sachant que $(x(0), y(0)) = (1, 1)$?

5. Quelle est la trajectoire parcourue par le point $(x(t), y(t))$, sachant que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$? Donnez ainsi toutes les trajectoires.

6. Rajoutez le dessin de ces trajectoires au dessin du champ de vecteurs fait dans l'exercice 1 . Montrez que chacun des vecteurs dessinés dans l'exercice 1 est tangent à une trajectoire.

7. Montrez que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$x'' = -\frac{x}{4}$$

8. Calculez $x(t)$ et $y(t)$ pour tout t
   - quand $(x(0), y(0)) = (1, 0)$,
   - quand $(x(0), y(0)) = (1, 1)$,
   - quand $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$,
   - quand $(x(0), y(0)) = (r.\cos(\varphi), r.\sin(\varphi))$.

1.2 La méthode d'Euler pour le tracé des solutions et des trajectoires

1.2.1 La méthode d'Euler dans le cas d'une équation différenielle ordinaire

On considère l'équation différentielle $u' = f(t, u)$ avec la condition initiale $u(t_0) = u_0$. On cherche à approximer la solution de cette équation différentielle en regardant ce qui se passe sur de petits intervalles de temps de longueur h. Ce paramétre h s'appelle le pas et doit être imaginé petit. Si t (partant de t_0) augmente de ce pas h, on peut supposer que la graphe de la solution reste proche de la tangente en $(t_0, u(t_0))$. Comme $u'(t_0) = f(t_0, x_0)$, l'équation de la tangente est $y = f(t_0, x_0)(x - x_0) - u(t_0)$ et donc $u_1 = u_0 + hf(t_0, u_0)$ est une bonne approximation de $u(t_1)$ où $t_1 = t_0 + h$. On peut recommencer la même opération au temps t_1 et ainsi de suite. On obtient alors une suite de temps $t_n = t_0 + nh$ et une suite de valeurs $u_n = u_{n-1} + hf(t_{n-1}, u_{n-1})$ qui approximent $u(t_n)$. Une solution approchée est obtenue en reliant les points de coordonnées (t_n, u_n) par des segments, c'est à dire par la fonction affine par morceaux qui vaut $u_n + (t - t_n)f(t_n, u_n)$ sur $[t_n, t_{n+1})$. Si f est suffisament régulière, on peut montrer que l'erreur commise dépend de h et donc plus h est petit, plus l'erreur est négligeable.

Exercice 3 .–
1) On considère l'équation (E) $u' = ru$ (avec $r > 0$) avec la condition initiale $u(t_0) = u_0$. En appliquant la méthode d'Euler avec un pas $h = 1/n$, calculer u_n. Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$. Pourquoi ce résultat est naturel (on pourra résoudre (E)) ?
2) On considère l'équation (E) $u' = g(t)$ (où g est une fonction continue d'une seule variable) avec la condition initiale $u(t_0) = u_0$. Résoudre (E). Appliquer la méthode d'Euler avec $h = (t - t_0)/n$ (où l'entier $n > 0$ est fixé). Que retrouve-t-on ?
3) On considère la solution $u(t)$ de l'équation $u' = u^2 - t$ vérifiant $u(0) = 1$. On choisit le pas $h = 1/2$. Calculer à la main les approximations obtenues par la méthode d'Euler sur le segment $[-1, 1]$, c'est à dire les approximations de $u(-1)$, $u(-1/2)$, $u(1/2)$ et $u(1)$. Dire si les valeurs trouvées sont des approximations par défaut ou par exces.

1.2.2 Calcul approché des valeurs $x(t)$ et $y(t)$:

Sachant que $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une solution du système d'équations différentielles (2) de condition initiale *donnée* $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, un calcul approché des valeurs de $x(t)$ et $y(t)$ sur un intervalle $[t_0\,,\; t_0 + T]$ fixé s'obtient de la manière suivante : on choisit une valeur de h "suffisamment petite[4]", après quoi on choisit un entier positif n "suffisamment grand" et on construit une suite de valeurs $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$, où t_i est défini par la formule $t_i = t_0 + i \times h$ (en fait, on choisit n "suffisamment grand" pour que l'intervalle balayé $[t_0\,,\; t_n]$ contienne l'intervalle initial $[t_0\,,\; t_0 + T]$).
L'idée est de calculer tous les (x_i, y_i) en calculant d'abord (x_1, y_1) à partir de (x_0, y_0), puis (x_2, y_2) à partir de (x_1, y_1) et ainsi de suite selon la formule :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \,.\, f_1(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h \,.\, f_2(x_i, y_i) \end{cases} \tag{4}$$

Exercice 4 .– Comment se justifie une telle approximation ? En particulier :

- A partir de quelle valeur de n est-on certain que l'intervalle balayé $[t_0\,,\; t_n]$ contient l'intervalle initial $[t_0\,,\; t_0 + T]$?
- En utilisant le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe une valeur t'_i vérifiant $t_i \leq t'_i \leq t_{i+1}$ et telle que

$$\begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x_i}{h} = f_1(x(t'_i), y(t'_i)) \\ \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_2(x(t'_i), y(t'_i)) \end{cases} \tag{5}$$

- $f_1(x_i, y_i)$ et $f_2(x_i, y_i)$ sont-ils de bonnes approximations de $f_1(x(t'_i), y(t'_i))$ et de $f_2(x(t'_i), y(t'_i))$? Pour améliorer ces approximations, faut-il augmenter ou diminuer h ? Que devient cette approximation quand h tend vers zéro ?

---

[4] Nous verrons plus loin que la taille à choisir pour h dépend de la taille des coefficients de l'équation différentielle et de la précision que l'on désire sur le calcul des $x(t_i)$ et $y(t_i)$.

- Les quantités $f_1(x_i, y_i)$ et $f_2(x_i, y_i)$ sont-elles de bonnes approximations de $\dfrac{x_{i+1} - x_i}{h}$ et $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$? Pour améliorer cette approximation, faut-il augmenter ou diminuer h ? Que devient cette approximation quand h tend vers zéro ?
- Justifier le fait que les valeurs x_i et y_i calculées par la formule de récurrence (4) sont de bonnes approximations[5] de $x(t_i)$ et de $y(t_i)$.

1.2.3 Comment réaliser un programme sur tableur calculant des valeurs approchées x_i et y_i de $x(t_i)$ et de $y(t_i)$:

Nous allons développer ce programme dans un cas particulier[6]: le cas où $(x(t), y(t))$ est solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} x' = 0,1\ x - 0,005\ x\,y \\ y' = -0,5\ y + 0,004\ x\,y \end{cases} \tag{6}$$

ce qui signifie que

$$f_1(x, y) = 0,1\ x - 0,005\ x\,y \quad \text{et que} \quad f_2(x, y) = -0,5\ y + 0,004\ x\,y$$

- On réserve la première ligne pour les commentaires et explications.
- On réserve une cellule (par exemple la cellule $F2$) pour emmagasiner la constante h que nous avons choisie. Nous n'aurons qu'à modifier cette constante pour affiner la simulation.
- On met dans la colonne A les valeurs t_0, t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n ($n + 2$ sera donc le nombre total de lignes[7]) : pour cela, on met la valeur t_0 dans $A2$, puis on calcule $A3$ à l'aide de $A2$ par la formule $A3 = A2 + \$F\$2$ $(= A2 + h)$, puis on propage cette formule aux lignes suivantes de la même colonne.
- On met dans la colonne B les valeurs x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n ($n + 2$ sera donc encore le nombre total de lignes) : pour cela, on met la valeur initiale $x_0 = x(t_0)$ donnée dans $B2$, puis on calcule $B3$ à l'aide de $B2$ et de $D2$ par la formule $B3 = B2 + D2 * \$F\$2$, puis on propage cette formule aux lignes suivantes de la même colonne.
- On met dans la colonne C les valeurs y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n : pour cela, on met la valeur initiale $y_0 = y(t_0)$ donnée dans $C2$, puis on calcule $C3$ à l'aide de $C2$ et de $E2$ par la formule $C3 = C2 + E2 * \$F\$2$, puis on propage cette formule aux lignes suivantes de la même colonne.

---

[5] A condition que h soit suffisamment petit, le problème étant de déterminer à partir de quelle valeur h est suffisamment petit.

[6] Le cas général s'obtient en modifiant les formules de calcul des fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$.

[7] Le nombre de lignes nécessaire peut vite être très grand si on désire une bonne précision : par exemple si on désire couvrir un intervalle de temps allant de t_0 à $t_0 + 50$ avec un pas $h = 0,01$, il nous faut 5002 lignes.

- On met dans la colonne D les valeurs $f_1(x_0, y_0)$, $f_1(x_1, y_1)$, $f_1(x_2, y_2)$, ... $f_1(x_n, y_n)$: pour cela on calcule $D2$ à l'aide de $B2$ et de $C2$ par la formule $D2 = 0,1 * B2 - 0,005 * B2 * C2$, puis on propage cette formule aux lignes suivantes de la même colonne.

- On met dans la colonne E les valeurs $f_2(x_0, y_0)$, $f_2(x_1, y_1)$, $f_2(x_2, y_2)$, ... $f_2(x_n, y_n)$: pour cela on calcule $E2$ à l'aide de $B2$ et de $C2$ par la formule $E2 = -0,5 * C2 + 0,004 * B2 * C2$, puis on propage cette formule aux lignes suivantes de la même colonne.

1.2.4 Comment tracer les courbes $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur un même graphique:

La description qui suit est faite avec l'outil "excel"

- Cliquez sur l'assistant graphique; dans "type de graphique", choisir l'option "courbes"

- Porter les t_i (contenu de la colonne A) en abscisse.

- Porter les x_i (contenu de la colonne B) en ordonnée (en série 1).

- Porter les y_i (contenu de la colonne C) en ordonnée (en série 2).
  Si vous n'arrivez pas à ajouter cette deuxième courbe, allez dans "Données source", puis "série", puis "ajouter une série". Pour ajouter le graphe de y(t), si la colonne C a 5000 lignes (par exemple), tapez dans la plage correspondant aux ordonnées : $Sheet1!\$C\$2$: $\$C\$5000$

1.2.5 Comment tracer les trajectoires :

La description qui suit est faite avec l'outil "excel"

- Cliquez sur l'assistant graphique; dans "type de graphique", choisir l'option "nuage de points", puis choisir "nuage de points avec lissage, sans marquage des données"

- Porter les x_i (contenu de la colonne B) en abscisse.

- Porter les y_i (contenu de la colonne C) en ordonnée.

  Si vous n'arrivez pas à faire ceci automatiquement, allez dans "Données source", puis "série", puis tapez dans la plage correspondant aux abscisses : $Sheet1!\$B\$2$: $\$B\$5000$ et dans la plage correspondant aux ordonnées : $Sheet1!\$C\$2$: $\$C\$5000$.

Exercice 5 .– Considérons l'équation différentielle d'un certain type de loi proies/prédateurs[8] (le temps t est exprimé en années et les populations de proies $x(t)$ et de prédateurs $y(t)$ en millions d'individus) :

$$\begin{cases} x' = 0,1\, x - 0,005\, x\, y \\ y' = -0,5\, y + 0,004\, x\, y \end{cases} \tag{7}$$

---

[8] Nous reviendrons sur ce type d'équations pour en présenter le cadre général dans un autre chapitre

1. A l'aide du programme décrit à la section 1.2, tracer la trajectoire de $t \mapsto (x(t), y(t))$ quand t parcourt l'intervalle des temps $[0, 40]$, quand $(x(0), y(0)) = (60\,,\,10)$ et quand

   – le pas h vaut 2,
   – le pas h vaut 1,
   – le pas h vaut $0,01$.
   – le pas h vaut $0,005$.

   Quel sont les cas où on obtient des valeurs négatives de la population ?
   Dans la mesure où les 4 courbes dessinées représentent la *même* trajectoire, dire si les 3 premières courbes vous semblent cohérentes entre elles; dire si les 2 dernières courbes vous semblent cohérentes entre elles .

2. A l'aide du programme décrit à la section 1.2 tracer, sur une même figure, les 2 graphes des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ quand t parcourt l'intervalle des temps $[0, 40]$ (utiliser un pas $h = 0,005$).

Exercice 6 .– Reprendre l'exercice 2 en traçant les trajectoires par la méthode d'Euler.

Exercice 7 .– Considérons l'équation différentielle vraie du pendule (le temps étant exprimé en secondes):

$$x'' = -a \sin x$$

Supposons que $a = 0,5$.

1. En posant $y = x'$, montrer que $t \mapsto (x(t), y(t))$ est solution d'un système d'équations différentielles couplées que vous écrirez.

2. Adapter le programme décrit à la section 1.2 (en utilisant le pas $h = 0,003$) pour tracer, sur une même figure, les trajectoires de $t \mapsto (x(t), y(t))$ quand t parcourt l'intervalle des temps $[0, 50]$ et lorsque
   – la condition initiale est $x(0) = 1$ et $x'(0) = -0,5$,
   – la condition initiale est $x(0) = 0,8$ et $x'(0) = 0$,
   – la condition initiale est $x(0) = 2,95$ et $x'(0) = 0$,
   – la condition initiale est $x(0) = 3$ et $x'(0) = 0$.
   Est-il normal que ces 4 trajectoires soient différentes ?

3. Adapter le programme décrit à la section 1.2 (en utilisant le pas $h = 0,003$) pour tracer, sur une même figure, les graphes des fonctions $t \mapsto x(t)$ obtenues pour chacune des conditions initiales ci-dessus,quand t parcourt l'intervalle des temps $[0, 50]$.

4. Que devient l'équation quand le temps est exprimé en minutes ?

2 Systèmes linéaires

On appelle système linéaire d'équations différentielles couplées tout système d'équations différentielles couplées de la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où A est une matrice 2×2, c'est à dire de la forme : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
En d'autres termes, le système d'équations différentielles couplées s'écrit alors :

$$\begin{cases} x' = a\,.\,x + b\,.\,y \\ y' = c\,.\,x + d\,.\,y \end{cases}$$

2.1 Le cas où la matrice est diagonale :

Exercice 8 .– Pour les systèmes d'équations différentielles couplées suivants :

$$1.\ \begin{cases} x' = 2\,.\,x \\ y' = 3\,.\,y \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} x' = -2\,.\,x \\ y' = -3\,.\,y \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} x' = 2\,.\,x \\ y' = -3\,.\,y \end{cases}$$

- donner la matrice A, quelle particularité possède-t-elle et pourquoi cette particularité permet-elle de trouver facilement les solutions ?
- recenser leurs positions d'équilibre, i. e. les solutions du type $(x(t), y(t)) = (C_1\,,\,C_2)$, où C_1 et C_2 sont des constantes,
- calculer les autres solutions $t \mapsto (x(t), y(t))$ et donnez l'allure de leurs trajectoires[9] en les orientant par une flèche dans le sens des des temps croissants.
- selon la donnée initiale $(x(t_0), y(t_0))$, dire vers quoi tend le point $(x(t), y(t))$ quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 9 .– Mêmes questions plus généralement pour le système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} x' = \lambda_1\,.\,x \\ y' = \lambda_2\,.\,y \end{cases}$$

- lorsque $0 < \lambda_1 < \lambda_2$,
- lorsque $0 < \lambda_1 = \lambda_2$,
- lorsque $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$,
- lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$,
- lorsque $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.

---

[9] Les solutions étant explicites, les trajectoires peuvent être dessinées à la main, mais on pourra confirmer par un tracé graphique utilisant le programme présenté à la section 1.2.

2.2 Classification et résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires couplées :

On considère donc le système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} x' = a\,.\,x + b\,.\,y \\ y' = c\,.\,x + d\,.\,y \end{cases} \tag{8}$$

où a , b , c et d sont des constantes dont le signe peut, suivant les cas être positif, négatif ou nul.

Exercice 10 .– Donnez les positions d'équilibre du système d'équations différentielles couplées (8), i.e. les points (x_0, y_0) tels que la solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ de condition initiale $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ soit constante

- lorsque le déterminant $ad - bc$ est non nul,
- lorsque le déterminant $ad - bc$ est nul.

Si (x_0, y_0) est une position d'équilibre, quelles sont les trajectoires des solutions $t \mapsto (x(t), y(t))$ de condition initiale $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$?

2.2.1 Si on désire seulement connaître la forme des trajectoires :

1. On écrit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ du système d'équations différentielles couplées (8).

2. On écrit l'équation caractéristique de la matrice A :

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

où $\det M$ désigne le déterminant d'une matrice M ; cette équation s'écrit aussi :

$$\lambda^2 - (a+d)\,\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{9}$$

3. On calcule les solutions λ_1 et λ_2 de l'équation (9), on vérifie[10] que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Les solutions λ_1 et λ_2 de l'équation (9) sont les valeurs propres de la matrice A .

4. Si les solutions λ_1 et λ_2 de l'équation (9) sont des nombres réels distincts (ce qui arrive si et seulement si le discriminant $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc)$ de l'équation (9) vérifie $\Delta > 0$), alors

---

[10] Le cas où $\lambda_1 \neq \lambda_2$ est le seul cas que nous étudierons ici; lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$ soit la matrice A est diagonale, et alors on se trouve dans le deuxième ou le quatrième des cas étudiés dans l'exercice 8, soit la matrice n'est pas diagonale, et alors la résolution est plus difficile.

- lorsque λ_1 , $\lambda_2 < 0$, on a un “puits” centré en l’origine $(0,0)$: toutes les trajectoires tendent vers l’origine[11] (voir figure 1). En d’autres termes $(x(t),y(t))$ tend vers le point $(0,0)$ quand t tend vers $+\infty$. L’origine $(0,0)$ est alors un point d’équilibre stable.

Figure 1: Puits

- lorsque $0 < \lambda_1$, λ_2 , on a une “source” centrée en l’origine $(0,0)$ toutes les trajectoires telles que $(x(t_0),y(t_0)) \neq (0,0)$ semblent partir de l’origine et s’écartent jusqu’à partir à l’infini (voir figure 2). Le portrait de phase est le même que dans le cas précédent, sauf que les trajectoires sont parcourues en sens inverse. L’origine $(0,0)$ est alors un point d’équilibre instable.

Figure 2: Point source

- lorsque λ_1 et λ_2 sont non nuls et de signes contraires, on a une “selle” centrée en l’origine $(0,0)$ (voir figure 3). Il existe deux axes passant par l’origine correspondant aux vecteurs propres de A associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 et 4 trajectoires exceptionnelles portées par les 4 demi-axes correspondants (les deux trajectoires correspondant à la valeur propre négative tendent vers le point $(0,0)$ quand t tend vers $+\infty$, les deux trajectoires correspondant à la valeur propre positive tendent vers le point $(0,0)$ quand t tend vers $-\infty$. L’origine $(0,0)$ est alors appelée “point-selle”.

Figure 3: Point-selle

5. Si les solutions λ_1 et λ_2 de l’équation (9) sont des nombres complexes non réels (ce qui arrive si et seulement si le discriminant $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$ de l’équation (9) vérifie $\Delta < 0$), alors λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes conjugués, donc de la forme $\lambda_1 = \alpha + i.\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i.\beta$, où α et β sont des nombres réels, et alors

---

[11] Nous nous contentons pour l’instant d’énoncer les résultats, des éléments de preuves viendront dans la suite.

- Si $\alpha < 0$, le portrait de phase est celui d'une “spirale-puits” : toutes les trajectoires tendent vers l'origine en spiralant autour de l'origine (voir figure 4). En d'autres termes $(x(t), y(t))$ tend vers le point $(0, 0)$ quand t tend vers $+\infty$ tout en tournant autour de l'origine. L'origine $(0, 0)$ est alors un point d'équilibre stable.

Figure 4: Spirale-puits

- Si $\alpha > 0$, le portrait de phase est celui d'une “spirale-source” : toutes les trajectoires semblent partir de l'origine en spiralant et partent à l'infini, toujours en spiralant (voir figure 5). En d'autres termes $(x(t), y(t))$ tend vers le point $(0, 0)$ quand t tend vers $-\infty$. L'origine $(0, 0)$ est alors un point d'équilibre instable.

Figure 5: Spirale-source

- Si $\alpha = 0$, les trajectoires sont toutes périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$ (dans le cas présent, ce sont des ellipses, voir figure 6). On a donc $(x(t+T)\,,\,y(t+T)) = (x(t)\,,\,y(t))$.

Figure 6: Ellipses

2.2.2 Si on désire connaître les solutions du système d'équations différentielles linéaires couplées:

1) *Si les solutions* λ_1 *et* λ_2 *de l'équation* (9)*sont des nombres réels distincts*, on calcule les vecteurs propres $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 : si la condition initiale s'écrit $(x(t_0)\,,\,y(t_0)) = c_1\,.\,\overrightarrow{v}_1 + c_2\,.\,\overrightarrow{v}_2$, on a, pour tout t,

$$(x(t)\,,\,y(t)) = c_1\,e^{\lambda_1\,(t-t_0)}\,.\,\overrightarrow{v}_1 + c_2\,e^{\lambda_2\,(t-t_0)}\,.\,\overrightarrow{v}_2 \qquad (10)$$

Exercice 11 .– Vérifier que, lorsque $(x(t), y(t))$ est défini par l'égalité (10) :

- c'est bien une solution du système d'équations différentielles (8) de condition initiale $(x(t_0)\,,\,y(t_0)) = c_1\,.\,\overrightarrow{v}_1 + c_2\,.\,\overrightarrow{v}_2$,

- comme annoncé plus haut, les 4 demi-droites portant les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$, $-\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ et $-\overrightarrow{v}_2$ sont des trajectoires rectilignes,
- lorsque λ_1, $\lambda_2 < 0$, $(x(t), y(t))$ tend vers le point $(0,0)$ quand t tend vers $+\infty$.

2) *Si les solutions* λ_1 *et* λ_2 *de l'équation* (9)*sont des nombres complexes non réels*, alors λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes conjugués de la forme $\lambda_1 = \alpha + i.\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i.\beta$.
On recherche alors $x(t)$ et $y(t)$ sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{\alpha\,(t-t_0)}\,(B\,\cos(\beta\,(t-t_0)) + C\,\sin(\beta\,(t-t_0))) \\ y(t) = e^{\alpha\,(t-t_0)}\,(D\,\cos(\beta\,(t-t_0)) + E\,\sin(\beta\,(t-t_0))) \end{array} \right. \tag{11}$$

où B, C, D et E sont des constantes **qui ne peuvent pas être choisies arbitrairement**, mais qui doivent être calculées en fonction des données initiales $x(t_0)$ et $y(t_0)$, comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 12 .– Montrer qu'on a alors

$$B = x(t_0) \quad , \quad C = \frac{(a-\alpha)\,x(t_0) + b\,y(t_0)}{\beta} \quad ,$$

$$D = y(t_0) \quad , \quad E = \frac{c\,x(t_0) + (d-\alpha)\,y(t_0)}{\beta} \quad .$$

Exercice 13 .– Vérifier que, lorsque $\alpha = 0$, alors la solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ est périodique de période $T = \dfrac{2\,\pi}{\beta}$.

2.2.3 Entrainons-nous un peu :

Exercice 14 .– Pour les systèmes d'équations différentielles couplées suivants :
- montrer que $(0\,,\,0)$ est un point d'équilibre,
- déterminer le type de ce point d'équilibre (selle ? source ? puits ? spirale-puits ? spirale-source ? périodique ?),
- dessiner leur portrait de phase.
- donner les solutions $(x(t)\,,\,y(t))$ et confirmer le type et la forme des trajectoires.
- dans les cas (a), (b), (d), (f) et (g), si $(x_0\,,\,y_0)$ est un point donné du plan, donner la solution $(x(t)\,,\,y(t))$ correspondant à la donnée initiale $(x(0)\,,\,y(0)) = (x_0\,,\,y_0)$ (discuter suivant la position du point $(x_0\,,\,y_0)$).

(a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(c) $\left\{ \begin{array}{l} x' = -2\,y \\ y' = -2\,x \end{array} \right.$

(d) $\begin{cases} x' = x + 2\,y \\ y' = -x + 4\,y \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = 2\,x + y \\ y' = -3\,x + 2\,y \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x' = -3\,x + y \\ y' = -4\,x - 3\,y \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x' = -3\,x + 4\,y \\ y' = x - 3\,y \end{cases}$