Université Grenoble Alpes **2019-2020**
M1 BÉÉ Biodiversité, écologie, évolution
Modélisation des systèmes écologiques 2

Systèmes 2D linéaires en temps continu : un algorithme de résolution

L'algorithme permet de résoudre tout système dynamique $x'(t) = ax(t) + by(t)$, $y'(t) = cx(t) + dy(t)$ avec toutes conditions initiales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

1. Réécrire le système dynamique comme $X'(t) = MX(t)$, $X(0) = X_0$, pour la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et les vecteurs $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

2. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix}$.

3. Résoudre l'équation caractéristique $\chi_M(\lambda) = 0$.

Cas « réel » : Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes.

4. Calculer des vecteurs propres U et V, c'est-à-dire des vecteurs non nuls tels que $MU = \lambda U$ et $MV = \mu V$, où λ et μ sont les racines de l'équation caractéristique.

5. Décomposer X_0 comme $X_0 = uU + vV$.

6. Alors la solution vaut $X(t) = ue^{\lambda t}U + ve^{\mu t}V$, dont on déduit $x(t)$ et $y(t)$ en repassant aux coordonnées de $X(t)$, U et V.

Exemple : $x'(t) = -5x(t) + 5y(t)$, $y'(t) = x(t) - 9y(t)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$

1. $M = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\chi_M(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda + 9) - 5 = \lambda^2 + 14\lambda + 40$

3. $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 + 2 \cdot 7\lambda + 49 - 9 = (\lambda + 7)^2 - 3^2 = (\lambda + 4)(\lambda + 10)$ donc les racines de $\chi_M(\lambda) = 0$ sont $\lambda = -4$ et $\mu = -10$

4. $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou des multiples non nuls de ces vecteurs)

5. $X_0 = \frac{1}{6}U + \frac{1}{6}V$

6. $X(t) = \frac{1}{6}e^{-4t}U + \frac{1}{6}e^{-10t}V$ donc $x(t) = \frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{5}{6}e^{-10t}$ et $y(t) = \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{1}{6}e^{-10t}$

Cas « complexe » : Les racines de l'équation caractéristique sont complexes.

4. Écrire ces racines comme $\lambda = \nu + i\omega$ et $\mu = \nu - i\omega$ (si nécessaire, utiliser le fait que $\nu = \frac{1}{2}\mathrm{tr} M$ et $\nu^2 + \omega^2 = \det M$).

5. Alors la solution vaut $X(t) = e^{\nu t}\cos(\omega t)X_0 + e^{\nu t}\sin(\omega t)Y$, pour un certain vecteur Y dépendant de X_0, dont on déduit $x(t)$ et $y(t)$.

6. Pour calculer Y, si besoin, utiliser le fait que $MX_0 = \nu X_0 + \omega Y$.

Exemple : : $x'(t) = x(t) + 9y(t)$, $y'(t) = -2x(t) + 7y(t)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\chi_M(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 7) + 18 = \lambda^2 - 8\lambda + 25$

3. $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - 2 \cdot 4\lambda + 16 + 9 = (\lambda - 4)^2 + 3^2 = (\lambda - 4 + 3i)(\lambda - 4 - 3i)$ donc $\lambda = 4 + 3i$ et $\mu = 4 - 3i$

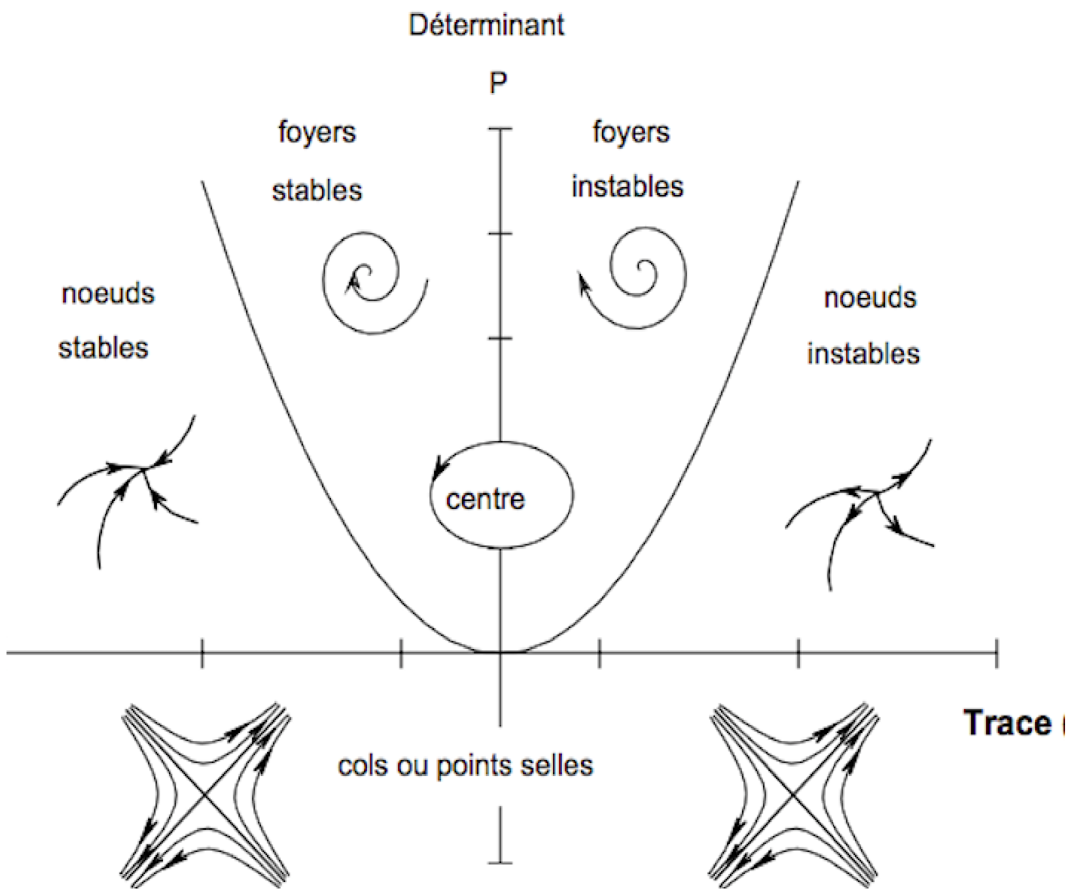
4. $\nu = 4$ et $\omega = 3$

5. $X(t) = e^{4t}\cos(3t)X_0 + e^{4t}\sin(3t)Y$

6. $MX_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $3Y = MX_0 - 4X_0$ donc $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, d'où on déduit que $x(t) = e^{4t}\cos(3t) - e^{4t}\sin(3t)$ et $y(t) = -\frac{2}{3}e^{4t}\sin(3t)$

Université Grenoble Alpes 2019-2020
M1 BÉÉ Biodiversité, écologie, évolution
Modélisation des systèmes écologiques 2

Systèmes 2D en temps continu : une typologie des points fixes



Équation de la parabole : $(\mathrm{tr} M)^2 = 4 \det M$