Université Grenoble Alpes **2019-2020**
M1 BÉÉ Biodiversité, écologie, évolution
Modélisation des systèmes écologiques 2

TP : Modèles à compartiments

Format du compte-rendu de TP : **fichier PDF** à envoyer par courriel, au plus tard **vendredi 21 février 2020 à 23h59**. Titre du message imposé : `[M1BEE] Compte-rendu TP`. Un compte-rendu par étudiant·e.

Objectifs du TP

On s'aidera de l'outil informatique pour répondre aux questions posées. Il est demandé d'inclure *le code en clair du programme le plus élaboré* utilisé.

À condition de respecter ces contraintes et de répondre aux questions énumérées ci-dessous, le format du compte-rendu est libre, au sens où on peut y inclure les prolongements de son choix : les leçons à tirer de ces modèles, leur pertinence biologique, leurs limitations, etc. De tels prolongements, à condition d'être pertinents, sont en règle générale très appréciés.

Par contre, la reproduction, au mot près ou quasiment, de pages web ou d'autres sources sur le sujet, sera jugée à la mesure de l'effort que cette opération aura demandé, c'est-à-dire comme étant d'une valeur à peu près nulle. On rappelle par ailleurs que ces procédés sont en général détectables.

Contexte

Le fleuve Columbia prend sa source en Colombie Britannique au Canada puis il traverse les États américains de Washington et de l'Oregon avant de se jeter, après un peu plus de 1900 km, dans l'océan Pacifique. Au moment de sa parution en 2000, le rapport *Recovery and Management Options for Spring/Summer Chinook Salmon in the Columbia River Basin*, écrit par

Peter Kareiva, Michelle Marvier et Michelle McClure [1], a été qualifié de « grenade » lancée dans le débat visant à déterminer si le démantèlement de quatre barrages sur le cours inférieur de la rivière Snake, un affluent du fleuve Columbia, permettrait d'assurer, ou non, la survie des saumons chinooks (*Oncorhynchus tshawytscha*, dit aussi saumon royal) de tout ce bassin versant.

Ainsi, d'après le journal *The Oregonian* du 3 novembre 2000, pour les supporters du démantèlement, "Conservationists and scientists who work for Northwest tribes and the Oregon and Idaho fish and wildlife departments have said that the four dams must be breached to save Snake River salmon from extinction. On Thursday, they said the biologists' arguments in Science do not change their opinion", tandis que, pour les opposants au démantèlement cités par le même journal : "Two or three years ago, dam breaching seemed to be the solution. Now based on this report, it seems the problem is more in the estuary and the ocean."

Modélisation

Kareiva et al. proposent d'utiliser des modèles matriciels structurés par âges. La population de saumons pendant l'année t est décrite par un vecteur colonne $\vec{n}(t)$ de taille 5 regroupant le nombre $n_0(t)$ de saumons juvéniles, juste nés, le nombre $n_1(t)$ de saumons âgés d'un an (*yearlings*), le nombre $n_2(t)$ de saumons âgés de 2 ans, le nombre $n_3(t)$ de saumons âgés de 3 ans et le nombre $n_4(t)$ de saumons âgés de 4 ans, donc

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} n_0(t) & n_1(t) & n_2(t) & n_3(t) & n_4(t) \end{pmatrix}^T$$

Donc on néglige la population des saumons âgés de 5 ans ou plus. On note $N(t) = n_0(t)+n_1(t)+n_2(t)+n_3(t)+n_4(t)$ le nombre total de saumons l'année t. Pour $1 \leqslant k \leqslant 4$, on note f_k le taux effectif de fécondité des saumons d'âge k, c'est-à-dire le nombre moyen d'alevins produits par saumon d'âge k, et s_k la probabilité de survie d'un saumon d'âge $k-1$ jusqu'à l'âge k. On note pour simplifier $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ et $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$.

1. Peter Kareiva, Michelle Marvier, Michelle McClure (2000), Recovery and Management Options for Spring/Summer Chinook Salmon in the Columbia River Basin, Science 290 : 977-979.

Questions

1. Montrer que ces hypothèses mènent au modèle de Leslie

$$\vec{n}(t+1) = L \cdot \vec{n}(t)$$

pour une matrice carrée L de taille 5×5 que l'on précisera, dépendant des fécondités effectives f_k et des taux de survie s_k.

2. On souhaite d'abord étudier ce modèle dans une situation hypothétique. On considère donc des fécondités effectives $f = (4, 20, 60, 60)$, des taux de survie $s = (0.05, 0.3, 0.6, 0.4)$ et des populations initiales

$$\vec{n}(0) = \begin{pmatrix} 100 \cdot \xi_0 & 10 \cdot \xi_1 & 5 \cdot \xi_2 & 5 \cdot \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix}^T$$

pour lesquelles on utiliisera les facteurs ξ_k de son choix, entre 2 et 10.

a) Calculer les populations $\vec{n}(t)$ et $N(t)$ sur la période des T premières années, pour $T \geqslant 50$ de votre choix.

b) Représenter les ratios $n_k(t+1)/n_k(t)$ et $N(t+1)/N(t)$ sur la période et vérifier que ces ratios convergent vers des limites r_k et r que l'on mesurera. Que remarque-t-on ?

c) Vérifier expérimentalement que $r^{-t} \cdot n_k(t) \to v_k$ pour une certaine valeur $v_k > 0$, pour tout $0 \leqslant k \leqslant 4$, puis que le vecteur colonne

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}^T$$

vérifie la relation

$$L \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v}$$

On admettra que le résultat de la question 2 est général, au sens où, pour toutes valeurs des taux f et s et toute condition initiale $\vec{n}(0)$,

$$r^{-t} \cdot \vec{n}(t) \to c \cdot \vec{v}$$

pour un certain $c > 0$ dépendant de $\vec{n}(0)$, où r désigne la plus grande valeur propre positive de L et $\vec{v}$ est un vecteur propre de L pour la valeur propre r.

3. Vérifier cette caractérisation de r sur la valeur estimée à la question 2.c. On vérifiera donc que r est la plus grande solution positive de l'équation $\det(\lambda \cdot I - L) = 0$ d'inconnue λ.

4. Kareiva et al. ont mesuré les taux de survie $s = (0.013, 0.8, 0.79, 0.70)$ et les fécondités effectives $f = (0, 0.326, 5.013, 39.65)$. Répéter l'analyse des

questions 2 et 3 pour ces valeurs et en déduire le taux exact d'extinction ou d'explosion de la population de saumons sous ce modèle.

5. Chaque taux de fécondité effective f_k est en fait proportionnel à la probabilité p de survie d'un saumon adulte d'âge k pendant sa migration vers la source de la rivière Snake et à la probabilité s_0 de survie d'un œuf jusqu'à son éclosion. Kareiva et al. estiment que, pour les fécondités effectives mesurées, $s_0 = 2.2\%$ et $p = 70\%$.

Déterminer le pourcentage d'augmentation du paramètre p qui serait nécessaire à la survie de la population si tous les autres paramètres sont inchangés [2].

6. Pour mesurer l'effet du transport de saumons juvéniles par la route pendant leur descente vers l'océan (une pratique que l'on nomme le *barging*), Kareiva et al. supposent que

$$s_1 = (zs_z + (1 - z)s_d) \cdot s_e$$

où z représente la proportion de poissons juvéniles transportés par la route, s_z la probabilité de survie au *barging*, s_d la probabilité de survie à la descente de la rivière sans *barging* et s_e la probabilité de survie dans l'estuaire. Kareiva et al. ont mesuré que $z = 72.9\%$, $s_z = 98\%$, $s_d = 20.2\%$ et $s_e = 1.7\%$.

Expliquer la formule de Kareiva et al. ci-dessus donnant s_1 puis vérifier que, pour les valeurs données, on trouve bien $s_1 = 1.3\%$, comme indiqué dans la question 4.

7. Déterminer enfin si la généralisation du *barging* [3], qui reviendrait à remplacer $z = 72.9\%$ par $z = 100\%$, suffirait à assurer la survie de la population de saumons chinooks, *tous autres paramètres du modèle égaux par ailleurs* [4].

2. Sur cette hypothèse, commencer par la discussion dans l'article de Kareiva et al. lui-même.

3. Une pratique par ailleurs controversée... Pour se faire une idée du problème, taper `barging salmons controversy` dans un moteur de recherche.

4. Voir note 2.