Université Grenoble Alpes **2019-2020**
M1 BÉÉ Biodiversité, écologie, évolution
Modélisation des systèmes écologiques 2

TD2 : Systèmes dynamiques linéaires 2D en temps continu

Exercice 1. (Type d'un point fixe) Identifier le type du point fixe $(0,0)$ sur chaque diagramme des figures 1, 2, 3 et 4, puis vérifier la réponse en calculant les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour les valeurs de (a,b,c,d) indiquées.

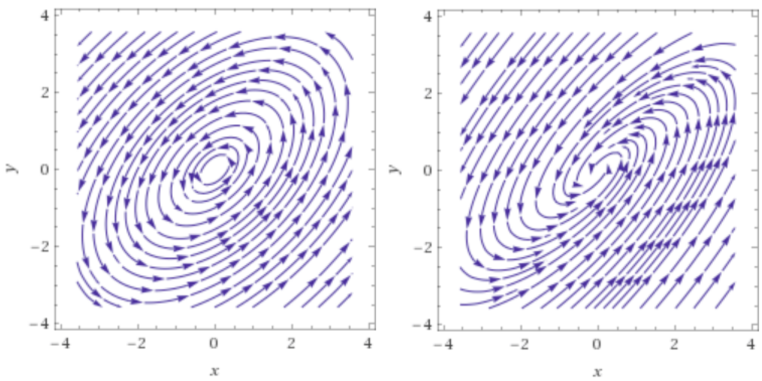

FIGURE 1 – Pour l'exercice 1, $(a,b,c,d) = (1,-2,2,-1)$ (à gauche) et $(a,b,c,d) = (1,-2,2,-2)$ (à droite)

Exercice 2. (Champ de vecteurs) Identifier le champ de vecteurs 1, 2, 3, 4, 5 ou 7 de la figure 5 qui correspond à chacune des matrices A, B, C, D, E et F ci-dessous, dont on déterminera les valeurs propres et les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Déterminer le type de chacun des systèmes dynamiques (a), (b), (c), (d), (e), (f) et (g) suivants, tracer son portrait de phase et, parmi les diagrammes 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 des figures 6, 7 et 8, identifier le diagramme qui donne l'allure de ses solutions.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

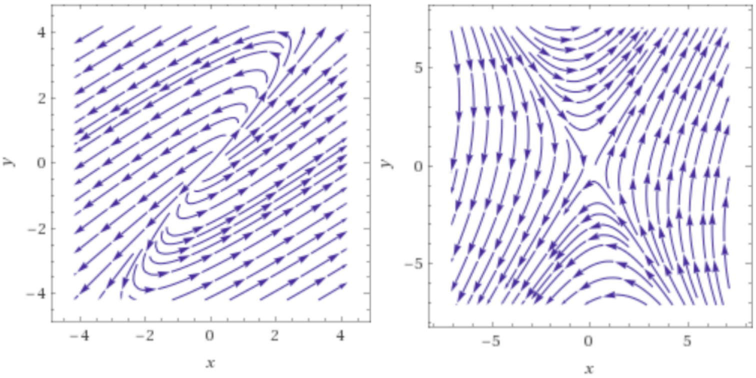

FIGURE 2 – Pour l'exercice 1, $(a, b, c, d) = (3, -2, 2, -1)$ (à gauche) et $(a, b, c, d) = (1, 2, 5, 1)$ (à droite)

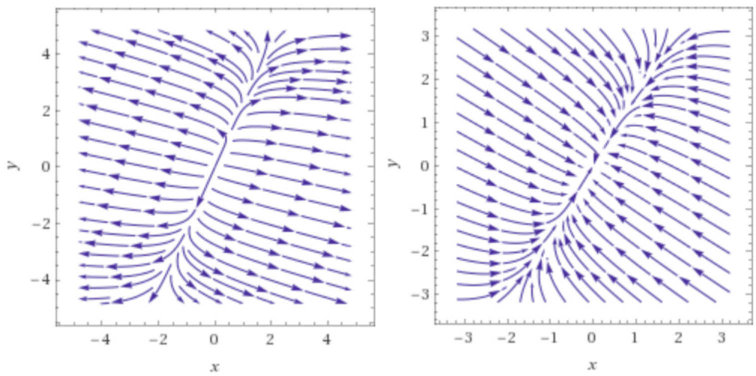

FIGURE 3 – Pour l'exercice 1, $(a, b, c, d) = (5, -2, -1, 1)$ (à gauche) et $(a, b, c, d) = (-2, 1, 1, -1)$ (à droite)

$$(c) \quad \begin{cases} x' = -2y \\ y' = -2x \end{cases} \qquad (d) \quad \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 4y \end{cases} \qquad (e) \quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases} \qquad (g) \quad \begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = x - 3y \end{cases}$$

Exercice 4. (Ruraux, urbains, migrants) On considère que la population d'un pays se compose de ruraux en nombre $R(t)$ au temps t et d'urbains en nombre $U(t)$ au temps t. On note r le taux annuel d'exode rural et u le taux annuel d'exode urbain. Le taux de natalité de chacune de ces populations se trouve en dessous du taux de renouvellement. On note m le taux de décroissance de $R(t)$ et de $I(t)$ en isolation. Enfin, les villes reçoivent l'apport d'un flux migratoire en provenance de l'étranger au taux (absolu) i.

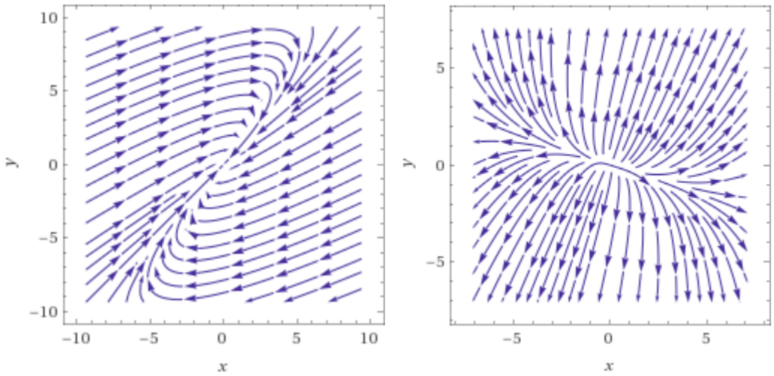

FIGURE 4 – Pour l'exercice 1, $(a, b, c, d) = (-6, 4, -3, 1)$ (à gauche) et $(a, b, c, d) = (2, 1, 1, 5)$ (à droite)

Montrer que cette situation correspond au système différentiel

$$R'(t) = -rR(t) - mR(t) + uU(t) \qquad U'(t) = rR(t) - uU(t) - mU(t) + i$$

On suppose désormais que $r = 2\%$ année^{-1}, $u = 1\%$ année^{-1} et $m = 0,1\%$ année^{-1}. Décrire le comportement des populations $R(t)$ et $U(t)$ quand $t \to \infty$.

Exercice 5. (Créatine[1]**)** On s'intéresse à la diffusion d'un traceur dans l'organisme, organisme que l'on réduit à deux compartiments, correspondant au sang et aux muscles respectivement. Le modèle de Sapirstein et al. correspond aux hypothèses suivantes :

— On injecte au temps $t = 0$ une quantité c de produit dans le sang.

— Les muscles ne contiennent pas de produit au temps $t = 0$.

— Le produit est échangé entre le sang et les muscles à un taux proportionnel à la différence de ses concentrations dans le sang et dans les muscles.

— Le produit est évacué du sang à un taux proportionnel à sa concentration dans le sang.

— Le produit ne peut être évacué des muscles qu'à travers les échanges avec le sang.

On note k le taux des échanges du produit entre le sang et les muscles, e le taux d'évacuation du produit du sang, $S(t)$ la concentration de produit dans le sang et $M(t)$ la concentration de produit dans les muscles au temps t.

1. Écrire le système différentiel linéaire correspondant au bilan de masse décrit ci-dessus et qui décrit l'évolution des concentrations $S(t)$ et $M(t)$.

2. On s'intéresse à la matrice $L = \begin{pmatrix} -k-e & k \\ k & -k \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs propres de L sont réelles et négatives.

1. Référence : L. A. Sapirstein, D. G. Vidt, M. J. Mandel, G. Hanusek (1955), *Volume of distribution and clearances of intravenously injected creatine in the dog*, American J. of Physiology 181, 330-336.

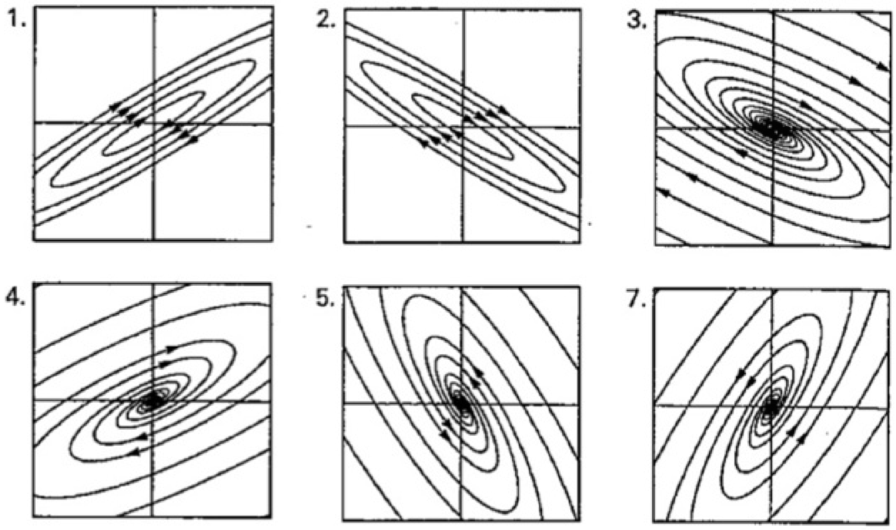

FIGURE 5 – Allure des solutions pour l'exercice 2

3. On suppose désormais que $k = 2$ et $e = 3$. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de L dans ce cas.

4. En déduire des formules explicites pour $S(t)$ et $M(t)$ en fonction de c et t.

5. Calculer enfin la valeur maximale $M_{\max}$ prise par la concentration de produit dans le muscle au cours du temps. On montrera que $M_{\max} = p_{\max} \cdot c$ pour une valeur de $p_{\max}$ indépendante de c, que l'on calculera explicitement et dont on donnera une valeur numérique approchée.

Exercice 6. (Perfusion vs injection) On souhaite modéliser les conséquences de l'administration d'un médicament à un patient, soit par perfusion (en continu), soit par injection (ponctuelle). On considère un modèle à deux compartiments, le sang et les tissus musculaires, et on note $S(t)$ et $M(t)$ les concentrations respectives de médicament dans le sang et dans les tissus au temps t. Le sang est alimenté à un taux constant c. Le produit passe du sang vers les tissus au taux a et des tissus vers le sang au taux b. Et le produit est évacué du sang au taux e.

1. Montrer que la dynamique du système est décrite par les équations

$$S'(t) = -(a+e)S(t) + bM(t) + c, \qquad M'(t) = aS(t) - bM(t).$$

Expliquer pourquoi la perfusion est décrite par un paramètre $c > 0$ et les conditions initiales $S(0) = M(0) = 0$ tandis que l'injection correspond à $c = 0$, $S(0) = s_0 > 0$ et $M(0) = 0$.

2. On suppose désormais que $a = e = 0,04 \text{ min}^{-1}$ et $b = 0,06 \text{ min}^{-1}$. Calculer les valeurs

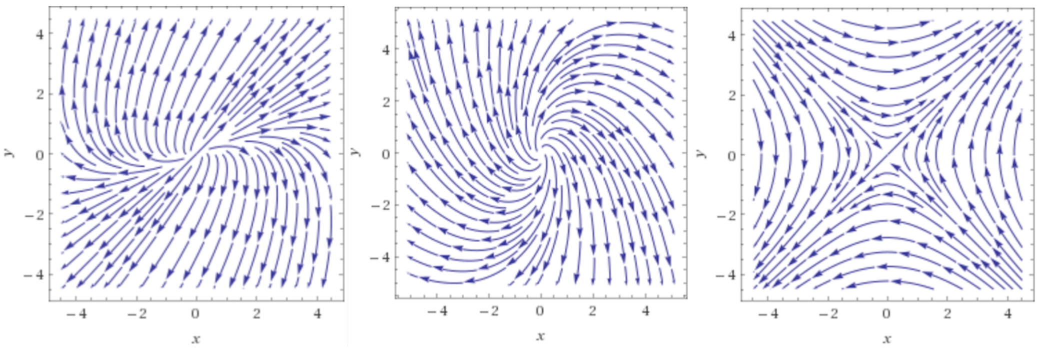

FIGURE 6 – Diagrammes 1, 2 et 3 pour l'exercice 3

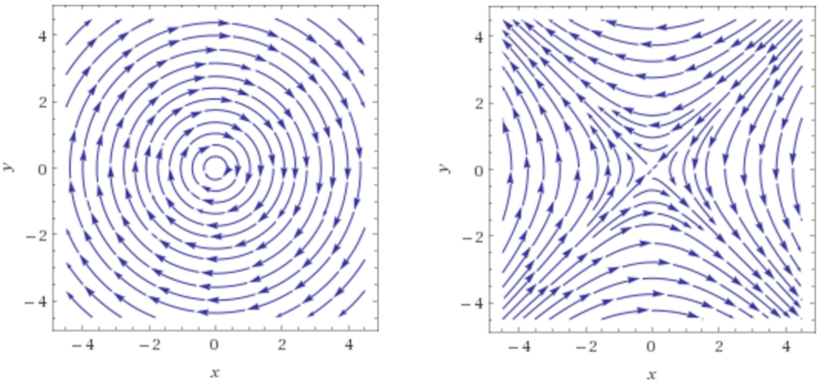

FIGURE 7 – Diagrammes 4 et 5 pour l'exercice 3

propres et des vecteurs propres de la matrice

$$L = \begin{pmatrix} -a-e & b \\ c & -b \end{pmatrix}.$$

3. En déduire les deux résultats suivants :
   (i) Dans le cas de la perfusion, un régime permanent s'établit au sens où $S(t) \to s_\infty$ et $M(t) \to m_\infty$, pour des valeurs de s_∞ et m_∞ que l'on calculera. Pour cela on cherchera d'abord un point fixe (s^*, m^*) de la dynamique puis on décrira l'évolution des quantités $\bar{S}(t) = S(t) - s^*$ et $\bar{M}(t) = M(t) - m^*$.
   (ii) Dans le cas de l'injection, la concentration de médicament dans les tissus musculaires $M(t)$ passe par un maximum $M_{\max}$, dont on calculera la valeur.

Exercice 7. (Cinétique chimique) On s'intéresse à une réaction chimique réversible $A \underset{\ell}{\overset{k}{\rightleftharpoons}} B$. On note $a(t)$ et $b(t)$ les concentrations de A et de B à l'instant t, et $c = a(0)+b(0)$ la quantité totale de A et B au temps $t = 0$. La dynamique de cette réaction s'écrit

$$a'(t) = -ka(t) + \ell b(t) \qquad b'(t) = ka(t) - \ell b(t)$$

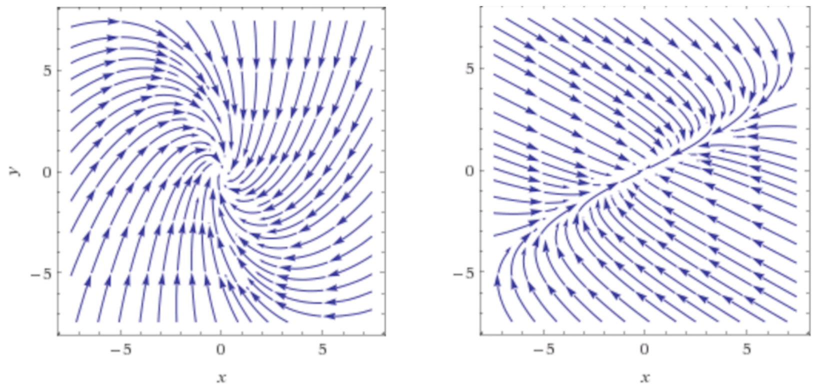

FIGURE 8 – Diagrammes 6 et 7 pour l'exercice 3

1. Rappeler comment l'observation du fait que $a(t) + b(t) = c$ en tout temps t permet de ramener l'étude de ce système à celle d'une équation scalaire et d'en déduire le comportement de $a(t)$ et $b(t)$ quand $t \to \infty$.

2. On veut désormais retrouver ce résultat en résolvant directement le système. On considère donc la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -k & \ell \\ k & -\ell \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de M et en déduire $a(t)$ et $b(t)$ en fonction de (a_0, b_0, k, ℓ), pour tout temps t.

3. Retrouver enfin le comportement asymptotique de $a(t)$ et $b(t)$ déjà expliqué et décrire le paramètre régissant la vitesse de convergence de la réaction vers son équilibre.