Université Grenoble Alpes **2019-2020**
M1 BÉÉ Biodiversité, écologie, évolution
Modélisation des systèmes écologiques 2

TD1 : Systèmes dynamiques 1D en temps continu

1. Tracer le diagramme de phase sur $x \geqslant 0$ du modèle logistique avec effet Allee

$$x' = ax\left(\frac{x}{L} - 1\right)\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

pour $a > 0$ et $K > L > 0$. En déduire le sens de variation des solutions et leur limite éventuelle, en fonction de la condition initiale x_0, pour toute valeur $x_0 \geqslant 0$.

2. Trouver les positions d'équilibre et dessiner des solutions stationnaires et des solutions non stationnaires du système dynamique $x' = f(x)$ si le graphe de f correspond à la figure 1. Calculer la limite de $x(t)$ quand $t \to +\infty$, selon la condition initiale $x(0) = x_0$, pour toute valeur réelle x_0.

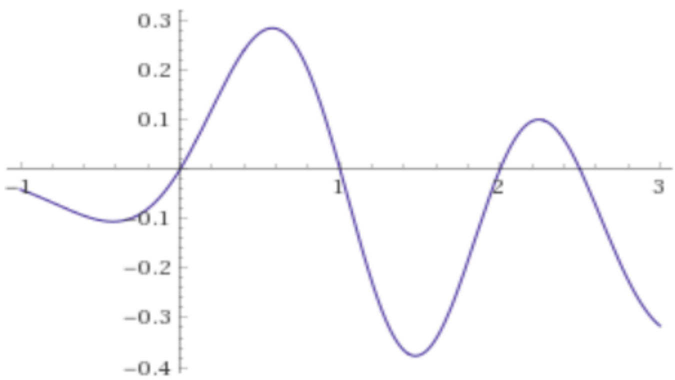

FIGURE 1 – Dynamique pour l'exercice 2

3. Sans chercher à les résoudre, dresser le diagramme de phase de chacun des systèmes dynamiques (SD1) à (SD4). En déduire le comportement de leurs solutions en fonction de la condition initiale $x(0) = x_0$, pour toute valeur réelle x_0.

(SD1) $x' = 2$ (SD2) $x' = 3x + 1$ (SD3) $x' = x^2 + 2$ (SD4) $x' = x - x^3$

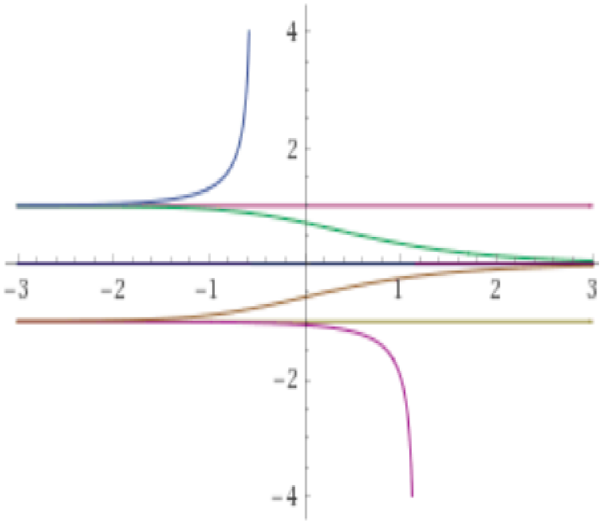

FIGURE 2 – Graphes de solutions pour l'exercice 4

4. Sans chercher à les résoudre, attribuer à chacun des systèmes dynamiques (SD5) à (SD9) l'allure de ses solutions, à choisir parmi les figures 2 à 6.

$$\text{(SD5) } x' = -x^2 + 1 \qquad \text{(SD6) } x' = -x^2 + x \qquad \text{(SD7) } x' = x + 4$$

$$\text{(SD8) } x' = -2x + 5 \qquad \text{(SD9) } x' = x^3 - x$$

5. On considère le système dynamique $x' = ax^2 - bx$ avec $a > 0$ et $b > 0$, qui peut être utilisé pour modéliser la taille d'une population raréfiée. Préciser s'il existe une taille critique de population x_c en dessous de laquelle la population s'éteint et si c'est le cas, calculer la valeur de x_c en fonction des paramètres (a, b) du modèle.

6. Dans cet exercice, on s'intéresse à diverses modifications du modèle logistique classique $x' = \ell(x)$ et $x(0) = x_0$, où

$$\ell(u) = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

avec $x_0 \geqslant 0$, $r > 0$ et $K > 0$.

1. Dans le modèle logistique classique $x' = \ell(x)$, rappeler le comportement asymptotique de la population $x(t)$ quand $t \to \infty$, pour toute valeur initiale $x_0 \geqslant 0$.

2. Dans cette question, $x' = f_h(x)$ où

$$f_h(u) = \ell(u) - h$$

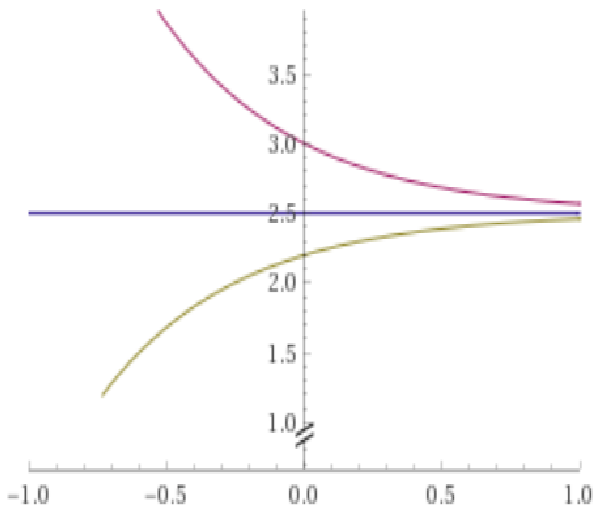

FIGURE 3 – Graphes de solutions pour l'exercice 4

avec $h > 0$. Le terme h peut représenter une récolte, de taille constante. Par exemple, si $x(t)$ représente une population de poissons dans un lac, h mesure la quantité de poissons qui sont pêchés par unité de temps, quantité supposée constante. Pour des valeurs de r et K fixées, on veut savoir s'il existe des valeurs de h qui ne conduisent pas à l'extinction de la population, et si oui, calculer la plus grande valeur $h_{\max}$.

(i) Tracer le graphe de f_h sur $\mathbb{R}_+$ pour $h = \frac{1}{5}rK$, $h = \frac{1}{4}rK$ et $h = \frac{1}{3}rK$ et en déduire le diagramme de phase du système dynamique pour chacune de ces trois valeurs.

(ii) Déterminer le comportement de $x(t)$ lorsque $t \to \infty$, selon les valeurs de h et de la condition initiale $x(0) = x_0$, pour tout $x_0 \geqslant 0$, et en déduire la valeur de $h_{\max}$.

(iii) Si l'on admet que toute population est l'objet de fluctuations aléatoires, préciser le comportement réel du stock de poissons auquel on peut s'attendre pour $h = h_{\max}$.

3. Résoudre les mêmes questions (comportement de $x(t)$ lorsque $t \to \infty$ et valeur de $h_{\max}$) mais avec une récolte proportionnelle à la population, correspondant au système dynamique $x' = f_h(x)$, où

$$f_h(u) = \ell(u) - hu$$

avec $h > 0$.

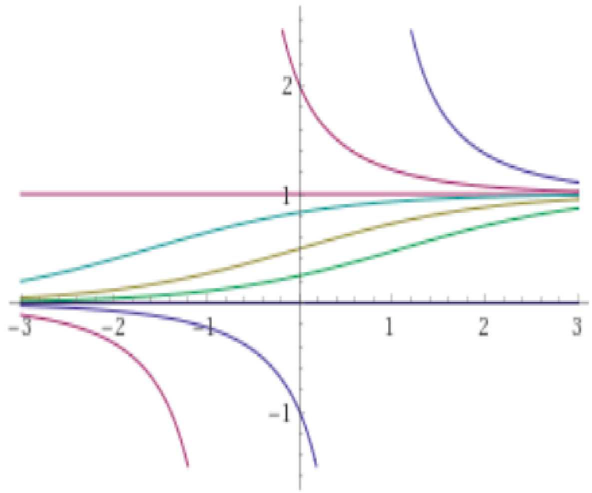

FIGURE 4 – Graphes de solutions pour l'exercice 4

4. Étudier enfin le comportement d'un modèle logistique modifié, avec immigration constante et récolte proportionnelle à la population, donc $x' = f_h(x)$, où

$$f_h(u) = \ell(u) - hu + i$$

avec $h > 0$ et $i > 0$. On pourra remarquer que $f_h = \ell - m_h$, avec $m_h(u) = hu - i$, tracer le graphe des fonctions ℓ et m_h sur une même figure, et conclure.

7. (Modèles SI) On considère qu'une population soumise à une maladie donnée se décompose en des individus susceptibles en nombre $S(t)$ et des individus infectants (contagieux) en nombre $I(t)$. Les contagions s'effectuent par contact et les guérisons à taux constant, donc on suppose que $(S(t), I(t))$ évolue selon la dynamique

$$S'(t) = -bS(t)I(t) + aI(t) \qquad I'(t) = bS(t)I(t) - aI(t)$$

pour des paramètres $a > 0$ de taux de guérison et $b > 0$ de taux de contagion fixés.

Montrer que la population totale $S(t) + I(t) = N$ reste constante, en déduire un modèle autonome de l'évolution de $S(t)$, résoudre ce modèle et en déduire l'asymptotique des populations $S(t)$ et $I(t)$ quand $t \to \infty$.

8. (Beverton-Holt continu) Dans un analogue en temps continu du modèle discret de Beverton-Holt (voir `http://en.wikipedia.org/wiki/Beverton-Holt_model` ou Beverton, R. J. H.; Holt, S. J. (1957), On the Dynamics of Exploited Fish Populations, Fishery Investigations Series II Volume XIX, Great Britain Ministry of Agriculture, Fisheries and Food),

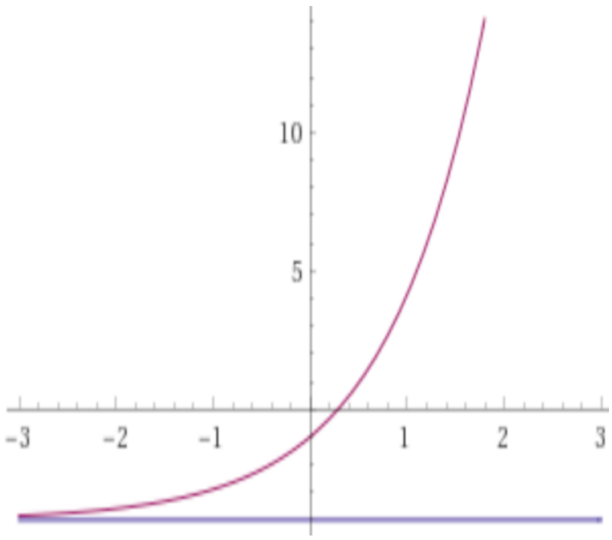

FIGURE 5 – Graphes de solutions pour l'exercice 4

une population évolue selon la dynamique

$$x'(t) = \frac{rx(t)}{1 + (x(t)/K)} - sx(t),$$

pour des paramètres r, s et K strictement positifs qui dépendent de la situation considérée. Décrire le comportement asymptotique du système en fonction de la population initiale $x_0 > 0$ et de la valeur des paramètres. On trouvera deux régimes.

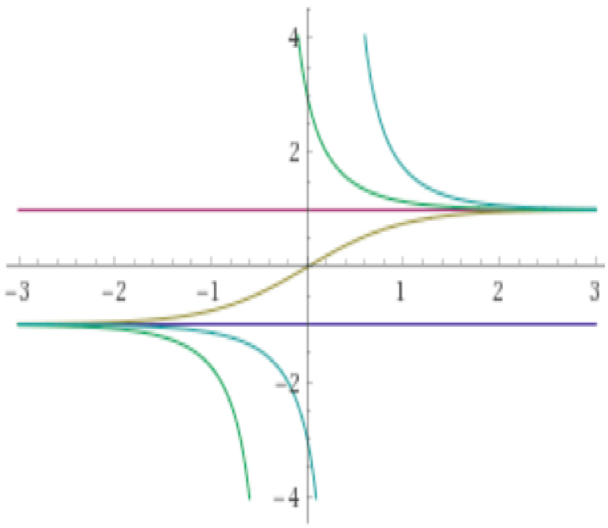

FIGURE 6 – Graphes de solutions pour l'exercice 4