Université Grenoble Alpes **2019-2020**
M1 BÉÉ Biodiversité, écologie, évolution
Modélisation des systèmes écologiques 1

TD3 : Systèmes 1D affines en temps continu

1. (Citerne) Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température $\Theta(t)$ du contenu de la citerne au temps t vérifie l'équation différentielle $\Theta'(t) = a - b\Theta(t)$ avec $a = 2,088 \cdot 10^{-2}$ et $b = 2,32 \cdot 10^{-4}$ lorsque t est exprimé en secondes et $\Theta(t)$ en °C. On suppose que la température initiale du contenu de la citerne vaut 20°C.

Calculer le temps au bout duquel la température de la citerne atteint 80°C, puis le temps au bout duquel la température de la citerne atteint 92°C.

2. (Nutriments) Des nutriments sont absorbés par une cellule à la vitesse constante de r molécules par unité de temps et en sont éliminés à une vitesse proportionnelle à leur concentration $c(t)$ dans la cellule à l'instant t. Ce processus se traduit par l'équation

$$c'(t) = r - kc(t)$$

Résoudre cette équation si $c(0) = c_0$ avec $c_0 > 0$. Préciser si $c(t)$ va tendre vers un équilibre c^* et si c'est le cas, calculer la valeur de c^*.

3. (Cinétique chimique) On s'intéresse à une réaction chimique réversible $A \underset{\ell}{\overset{k}{\rightleftharpoons}} B$. On note $a(t)$ et $b(t)$ les concentrations de A et de B à l'instant t. La dynamique de cette réaction s'écrit

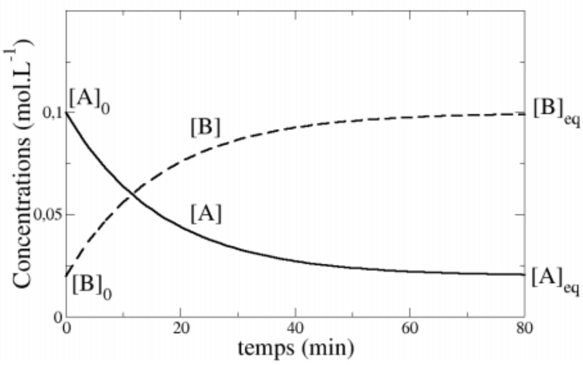
$$a'(t) = -ka(t) + \ell b(t) \qquad b'(t) = ka(t) - \ell b(t)$$

1. Montrer que $a(t) + b(t) = a(0) + b(0)$ en tout temps t.

2. En déduire une équation d'évolution reliant $a'(t)$ et $a(t)$ qui ne fait pas intervenir $b(t)$.

3. En déduire le comportement de $a(t)$ quand $t \to \infty$, puis le comportement de $b(t)$ quand $t \to \infty$.

4. En déduire que les valeurs stationnaires de $a(t)$ et $b(t)$ dépendent des taux de réaction k et ℓ uniquement à travers le ratio k/ℓ, puis expliquer pourquoi on pouvait s'attendre à ce résultat.



4. (Refroidissement d'un solide) Un solide à température 70°C est placé dans une pièce à température 20°C. Les dimensions du solide sont très faibles par rapport à celles de la pièce. On désigne par $\Theta(t)$ la température du solide mesurée en °C à l'instant t mesuré en minutes. La loi de refroidissement de Newtons stipule que la vitesse de refroidissement $\Theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps $\Theta(t)$ et la température ambiante (voir la page `Loi_de_refroidissement_de_Newton` sur Wikipédia).

1. Sachant qu'au bout de $t_1 = 5$ minutes, $\Theta(t_1) = 60°\text{C}$, déterminer $\Theta(t)$ pour tout temps t. On rappelle que $\Theta(0) = 70°\text{C}$.

2. Calculer la température du solide au bout de 20 minutes.

3. Tracer le graphe de Θ.

4. Préciser si la température du solide peut atteindre celle de la pièce.

5. (Thermomètre) Un thermomètre gardé à l'intérieur d'une maison indique 22°C. On place le thermomètre à l'extérieur. Après 5 minutes, il indique 18°C, après 15 minutes il indique 15°C. Calculer la température extérieure.

6. (Chaudière) On note $\Theta(t)$ la température au temps t d'une maison mal isolée et Θ_e la température extérieure, supposée constante.

1. La température $\Theta(t)$ évolue selon la dynamique $\Theta'(t) = k(\Theta_e - \Theta(t))$ pour un paramètre $k > 0$, où Θ_e désigne la température extérieure. Rappeler le comportement de $\Theta(t)$ quand $t \to \infty$.

2. On considère maintenant que la maison est dotée d'une chaudière produisant de la chaleur à un débit constant, de sorte qu'à présent $\Theta'(t) = k(\Theta_e - \Theta(t)) + c$ pour un paramètre $c > 0$ donné. Prédire le comportement de $\Theta(t)$ quand $t \to \infty$ dans cette nouvelle situation.

7. (ARNm) Le nombre de molécules d'ARN messager (ARNm) dans la cellule résulte de deux processus simultanés : d'une part la production de nouvelles molécules d'ARNm par la transcription de gènes, et d'autre part la désintégration des transcrits d'ARNm existants. On note m le nombre de nouveaux transcrits produits par unité de temps et r le taux de dégradation des transcrits existants. Dans les conditions standards, l'évolution du nombre $x(t)$ de molécules d'ARNm dans la cellule est donc donnée par l'équation différentielle $x'(t) = -rx(t) + m$.

1. Calculer l'équilibre x^* du système.

2. En bloquant la production de nouveaux transcrits, avec pour résultat de fixer $m = 0$, Vijay Iyer et Kevin Struhl ont estimé que la demi-vie des transcrits d'ARNm du gène his3 de l'histidine de la levure vaut $\theta = 660$ secondes. En déduire la valeur de r.

3. Iyer et Struhl ont également montré que le nombre normal de transcrits d'ARNm pour his3 dans les cellules de levure vaut environ 7. En supposant que le nombre normal de transcrits est à l'équilibre, estimer le taux d'initiation de la transcription m pour his3. En déduire qu'une molécule d'ARNm pour his3 est synthétisée toutes les 140 secondes environ.

4. À présent, on chauffe la cellule, ce qui a pour effet de dégrader la totalité de son ARNm, de sorte que $x(0) = 0$, puis on revient à la température normale. Calculer le temps T qu'il faut à la cellule pour retrouver environ la moitié de son nombre normal de molécules d'ARNm $x(t) = \frac{1}{2}x^*$. Vérifier si cette durée T dépend du taux de dégradation de l'ARNm r ou du taux d'initiation de la transcription m.

(D'après V. Iyer, K. Struhl. 1996. Absolute mRNA levels and transcriptional initiation rates in *Saccharomyces cerevisiae*. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 93, 5208-5212, disponible à l'adresse `www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC39223/`.)

8. (Thermomètre encore, facultatif) La température à l'intérieur vaut 20°C, celle à l'extérieur vaut −10°C. À 9h, on déplace le thermomètre de l'intérieur vers l'extérieur. À 9h05, le thermomètre indique 7°C. À 9h10, on rapporte le thermomètre à l'intérieur, où la température vaut toujours 20°C. Calculer la température que le thermomètre indique à 9h20.