Université Grenoble Alpes **2019-2020**
M1 BÉÉ Biodiversité, écologie, évolution
Modélisation des systèmes écologiques 1

TD2 : Systèmes 1D linéaires à temps continu

1. (Croissance de populations de cellules) On estime que, dans les conditions expérimentales standards, la durée du cycle cellulaire de la levure est de 1 heure et celle de la bactérie *E. coli* de 20 minutes.

Écrire les deux modèles exponentiels (en temps discret et en temps continu) correspondant à ces données et les résoudre.

On part d'une cellule de levure et d'une cellule de bactérie. Calculer le nombre de cellules de chaque type que l'on obtient après une journée selon chacun des deux modèles.

2. Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction $y : t \mapsto y(t)$ à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération des microbes à l'instant t est la dérivée $y'(t)$ de cette fonction. On a constaté que

$$y'(t) = ky(t)$$

où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par y_0 le nombre de microbes à l'instant $t = 0$ et on suppose qu'au bout de 2 heures, le nombre de microbes a quadruplé.

1. Calculer en fonction de y_0 le nombre de microbes au bout de 3 heures.

2. Calculer la valeur de y_0 si la culture contient 6400 microbes au bout de 5 heures.

3. Calculer enfin la valeur de k.

3. Après une injection intraveineuse de glucose, le taux de glycémie d'un individu (c'est à dire son taux de glucose dans le sang) décroît selon la loi

$$g'(t) + Kg(t) = 0$$

Le temps t est mesuré en minutes, $g(t)$ désigne le taux de glycémie excédentaire (la différence entre le taux de glycémie observé et le taux de glycémie du sujet à l'état normal), mesuré en grammes par litre, et K est une constante appelée coefficient d'assimilation glucidique, qui dépend des sujets. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, juste après l'injection, le taux de glycémie d'un sujet vaut 3 grammes par litre alors que son taux de glycémie normal vaut 1 gramme par litre, donc $g(0) = 2$.

1. Préciser le signe de la constante K (à justifier avec soin).

2. Déterminer l'expression de $g(t)$ puis donner l'allure de la courbe représentative de g.

3. On considère un sujet pour lequel la coefficient d'assimilation glucidique vaut $K = 1,5 \cdot 10^{-2}$ min^{-1}. Calculer le temps nécessaire pour que le taux de glycémie excédentaire du sujet diminue de 1%.

4. Soit $g_1 = g(t_1)$ le taux de glycémie excédentaire à un instant $t_1 > 0$ donné. Déterminer la formule donnant le coefficient d'assimilation glucidique K en fonction de g_1 et t_1.

5. La valeur moyenne du coefficient d'assimilation glucidique K chez un individu normal est comprise entre $1,06{\cdot}10^{-2}$ min^{-1} et $2,42{\cdot}10^{-2}$ min^{-1}. Préciser si les résultats d'un sujet présentant un taux de glycémie excédentaire de $1,20$ grammes par litre 30 minutes après l'injection sont normaux.

4. (Malthus lui-même, en temps discret) Entre 1798 et 1826, Thomas R. Malthus (1766-1834) publie et republie édition sur édition de son ouvrage *An essay on the principle of population*, un pamphlet où il souhaite attirer l'attention sur le fait que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduit l'Angleterre à la famine.

En 1800, on estime la population de l'Angleterre à 8 millions d'habitants et on pense que l'agriculture anglaise peut nourrir 10 millions de personnes. En se basant sur les données disponibles, Malthus suppose que la population augmente d'environ 2% chaque année et que l'amélioration des techniques agricoles permettrait de nourrir 500'000 personnes de plus chaque année.

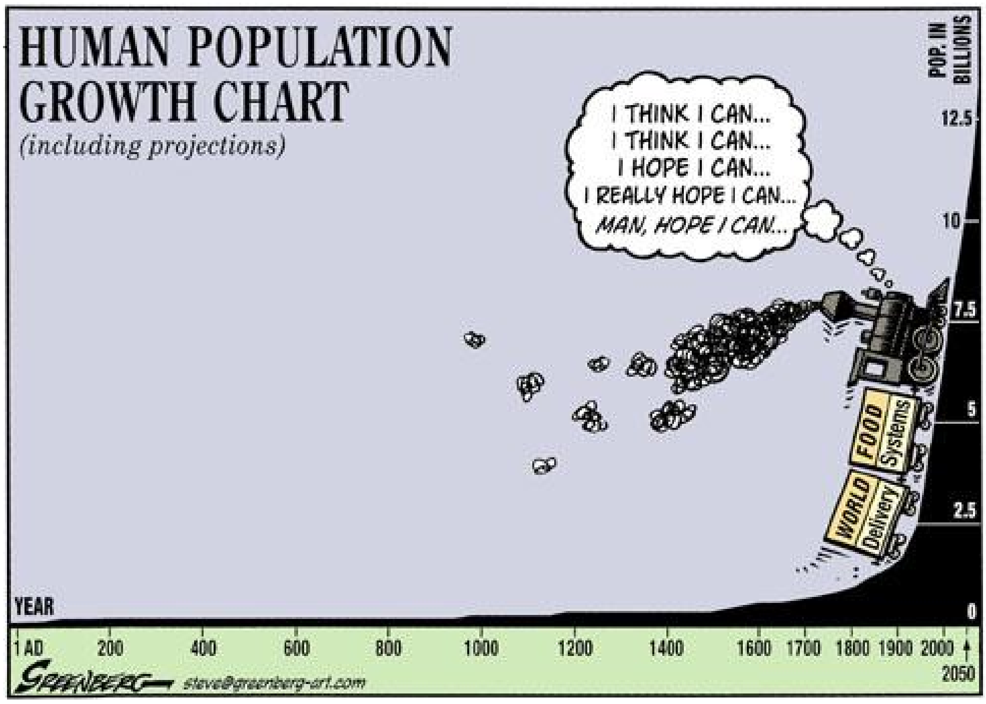
On note P_n la population l'année $1800+n$ et A_n le nombre de personnes que l'agriculture permet de nourrir cette même année, selon les hypothèses de Malthus.

1. Calculer P_n et A_n pour tout n.

2. Calculer les valeurs de P_{100} et A_{100}.

3. Déterminer en utilisant une calculatrice l'année exacte où la situation de famine prédite par Malthus doit se produire selon son modèle.

(La découverte de Malthus le conduisit à proposer de nouveaux remèdes préventifs, au-delà des anciens régulateurs destructifs (les guerres, la misère et les épidémies), comme la limitation de la taille des familles grâce au recul des mariages précoces, à la chasteté jusqu'au mariage et au prélèvement d'un impôt sur les naissances, et également à refuser ce qu'il appelait l'assistance publique de la misère par l'État.)



5. (Radioactivité du radium) L'atome de radium, en se désintégrant, donne de l'hélium et du radon, lui-même radioactif. La masse $m(t)$ d'un échantillon de radium est une fonction décroissante du temps. La vitesse de désintégration $m'(t)$ est proportionnelle à la masse de l'échantillon à l'instant t donc $m' = -km$ où k est une constante réelle.

1. Calculer $m(t)$.

2. On observe que la masse de radium diminue de $0,43‰$ par an. Calculer k.

3. Montrer qu'il existe un temps $t_{1/2}$ tel que, pour tout temps t,

$$m(t + t_{1/2}) = \frac{1}{2}m(t)$$

Calculer la valeur de $t_{1/2}$ en fonction de k.

La durée $t_{1/2}$ s'appelle la demi-vie, dans le cas présent, du radium.

6. (Radioactivité du carbone 14) Dans la haute atmosphère, les noyaux d'azote ^{14}N sont bombardés de neutrons n produits par les rayons cosmiques et produisent du carbone radioactif ^{14}C par la réaction $n + {}^{14}N \to {}^{14}C + p$ où p désigne un proton. Le dioxyde de carbone de l'atmosphère contient en proportions quasiment constantes du carbone ^{12}C et du carbone ^{14}C. La proportion de ces deux isotopes est la même dans les végétaux et dans l'atmosphère, d'environ une part de ^{14}C pour 10^{12} parts de ^{12}C. Lorsqu'une plante meurt, elle cesse d'assimiler le dioxyde de carbone et le ^{14}C qu'elle contient commence à se désintégrer sans être renouvelé. On estime que la demi-vie du ^{14}C vaut 5570 ans.

Dans une tombe égyptienne, on a trouvé un échantillon de bois provenant d'un sarcophage qui produisait 560 désintégrations par seconde alors qu'un échantillon du même bois fraîchement coupé contenant la même masse de carbone produit 816 désintégrations par seconde. Déterminer la date de fabrication du sarcophage.

7. (Radioactivité de l'uranium) L'uranium et ses isotopes sont des éléments radioactifs lourds créés lors de l'explosion des étoiles (super novae). Le but de cet exercice est de déterminer l'époque à laquelle l'uranium présent sur Terre a été créé.

On note $x_8(t)$ et $x_5(t)$ le nombre d'atomes des éléments radio-actifs ^{238}U et ^{235}U dans un échantillon d'uranium donné. La demi-vie de l'uranium 238 vaut $\tau_8 = 4,5.10^9$ années, celle de l'uranium 235 vaut $\tau_5 = 7,0.10^8$ années. On rappelle que la demi-vie d'un modèle exponentiel décroissant désigne le temps nécessaire pour que la population initiale soit réduite de moitié. On suppose que l'uranium a été créé au temps $t = 0$.

1. Calculer $x_8(t)$ et $x_5(t)$ en fonction de t, $x_8(0)$ et $x_5(0)$.

2. En 1946, le ratio $^{238}U/^{235}U$ valait 138 dans n'importe quel échantillon d'uranium. En supposant que ce ratio valait 1 au moment de la création de l'uranium, montrer que l'âge de l'uranium est d'environ $4,1 \cdot 10^9$ années environ.

(L'uranium est présent de l'écorce jusqu'au noyau même de notre planête (il participe à maintenir la chaleur du coeur métallique) donc le résultat de la question 2. fournit une borne inférieure de l'âge de la Terre. Quelques estimations de cette date : en 1640, pour le Cardinal Ussher, création de la Terre en 4004 avant J.-C. ; en 1755, pour Buffon, il y a environ 74'000 ans ; en 1906 (donc 10 ans après la découverte de la radioactivité par Henri Becquerel), pour Ernest Rutherford, 40 millions d'années. En 1950, grâce aux progrès de la spectrométrie de masse, la détermination de la composition isotopique des éléments chimiques présents dans les roches est grandement facilitée. En 1953, Clair Patterson procède à l'analyse de la composition isotopique de météorites, puis il démontre en 1955 que la Terre et les météorites se sont formées en même temps à partir d'un même matériau, il y a 4,55 milliards d'années, chiffre confirmé depuis.)

8. On considère une population dont le nombre d'individus au temps 0 vaut x_0 et qui suit une loi de Malthus de paramètre $k > 0$. Soit $\alpha \geqslant 1$. Déterminer le temps t_α après lequel la population aura été multipliée par α. Préciser si t_α dépend de x_0.

Figure 1 – Une des premières datations par la méthode du carbone 14 a été effectuée en 1950 sur des morceaux de charbon de bois trouvés dans la Grotte de Lascaux (Dordogne, commune de Montignac)

9. (Exercice de révision : datation au carbone 14) Le carbone contenu dans la matière vivante contient une infime proportion de l'isotope radioactif ^{14}C. Ce carbone radioactif provient du rayonnement cosmique de la haute atmosphère. Grâce à un processus d'échanges complexe, toute matière vivante maintient une proportion constante de ^{14}C au sein du carbone qu'elle contient, essentiellement constitué de l'isotope stable ^{12}C. Après la mort de l'organisme, les échanges cessent et la quantité de carbone radio-actif diminue puisque celle-ci perd $1/8000$ de sa masse chaque année. Ce phénomène permet de déterminer la date de la mort d'un individu.

1. Des fragments de squelette humain de type Néanderthal sont retrouvés dans une caverne en Palestine. L'analyse montre que la proportion de ^{14}C n'est que $6,24\%$ de ce qu'elle serait dans les os d'un être vivant. Déterminer la date de la mort de l'individu.

2. Calculer la demi-vie du carbone ^{14}C, c'est à dire le temps au bout duquel la moitié du carbone ^{14}C est desintégrée.

3. En 1868, lors de la construction d'une voie ferrée devant relier Périgueux à Agen, on découvrit des restes humains dans une caverne située à Cro-Magnon (Dordogne, commune des Eyzies-de-Tayac). Philip van Doren, dans son livre *Prehistoric Europe, from Stone Age to the early greeks*, estime que cet homme vivait entre 30 000 ans et 20 000 ans avant J.-C. Calculer la fourchette dans laquelle se situe le rapport entre les proportions de ^{14}C présent dans ce squelette et dans les os d'un être vivant.