Université Grenoble Alpes **2019-2020**
M1 BÉÉ Biodiversité, écologie, évolution
Modélisation des systèmes écologiques 1

TD1 : Systèmes 1D élémentaires à temps discret

A. Systèmes linéaires

1. L'échiquier indien La masse d'un grain de riz est 0,02 grammes et un volume de 1 cm^3 contient 50 grains de riz. Calculer le volume total et la masse totale du riz placé sur l'échiquier. Calculer la proportion de ce volume total et de cette masse totale qui est placée sur la dernière rangée de l'échiquier.

2. (Le paradis des rennes) [1] En 1944, 29 rennes ont été importés sur l'île de Saint Mathieu (St. Matthew Island) dans la mer de Bering. Dix-neuf ans plus tard, faute de prédateurs, on en comptait 6000. Puis, les ressources s'épuisant rapidement, la population s'effondra au point qu'en 1966, il ne restait que 42 survivants et d'innombrables carcasses. Les renards arctiques (entre 2,5 et 3,2 kg chacun) étaient de nouveau les plus grands mammifères présents sur l'île.

À partir de ces données, et en supposant que la croissance de la population de 1944 à 1963 est malthusienne, calculer le coefficient de croissance r de cette population.

3. (Croissances comparées) Au début de l'année 2019, la population urbaine u_0 et la population rurale r_0 du canton de Thunder-ten-tronckh valent $u_0 = r_0 = 12.000$. On prévoit que dans les vingt années qui suivent la population urbaine va augmenter régulièrement de 5% par an, alors que la population rurale diminuera de 7% par an. On note respectivement u_n et r_n les populations prévues au début de l'année 2019+n.

a) Exprimer u_{n+1} et r_{n+1} en fonction de u_n et r_n.

b) Exprimer u_n et r_n en fonction de n.

c) Calculer l'année pendant laquelle la population urbaine du canton de Thunder-ten-tronckh dépassera pour la première fois le double de la population rurale cette même année.

d) Calculer les effectifs urbain et rural du canton au début de l'année 2040.

B. Systèmes affines

4. (Malthus avec immigration) En Cacanie, depuis l'an 2000, on observe un taux annuel de natalité de 13‰, un taux annuel de mortalité de 9‰, et environ 100.000 nouveaux arrivants chaque année. On note x_n la population totale du pays l'année 2000+n, exprimée en millions, et on suppose que $x_0 = 60$.

Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. On note $y_n = x_n + 25$. Montrer que $(y_n)_n$ est une suite géométrique dont on calculera la raison. Estimer la population de Cacanie prédite par le modèle pour 2050.

5. (Malthus avec migration) Une population $(x_n)_n$ évolue selon un modèle malthusien avec migration, c'est-à-dire que les nombres de naissances et de morts entre les temps n et $n+1$ valent bx_n et dx_n respectivement et que le solde migratoire (immigrants moins émigrants) sur cette période vaut m, donc

$$x_{n+1} = x_n + (b-d)x_n + m$$

1. http://www2.gi.alaska.edu/ScienceForum/ASF16/1672.html

a) On suppose que $b = 0.04$, $d = 0.02$ et $m = -1000$ (donc il y a plus de naissances que de morts et plus d'émigration que d'immigration). Étudier le comportement asymptotique de x_n.

b) Même question si $b = 0.01$, $d = 0.02$ et $m = 1000$.

c) Même question si $b > d$ et $m > 0$. Même question si $b < d$ et $m < 0$. Commenter ce dernier cas.

6. (Système poumons-sang) Un exemple de diffusion concerne le passage de l'oxygène des poumons vers le sang et le passage du dioxide de carbone du sang vers les poumons. Considérons que les poumons constituent un compartiment où la concentration en oxygène vaut p_n et que le système sanguin constitue un second compartiment, de même volume pour simplifier, où la concentration en 'oxygène vaut s_n. On considère que, pendant un temps court, la quantité totale q_{tt} d'oxygène présente dans les poumons et le système sanguin est constante, donc, pour tout n,

$$p_n + s_n = q_{\mathrm{tt}}$$

Pendant un temps encore plus court, la variation de s_n est proportionnelle à la différence des concentrations, donc

$$s_{n+1} - s_n = r(p_n - s_n)$$

a) Écrire les variations de la suite $(s_n)_n$ en fonction de $(s_n)_n$ seulement.

b) En comparant les positions respectives de s_n, s_{n+1} et $\frac{1}{2}q_{\mathrm{tt}}$, montrer que les valeurs biologiquement pertinentes du paramètre r sont $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$.

c) Décrire la dynamique dans les deux cas limites $r = 0$ et $r = \frac{1}{2}$.

d) On suppose désormais que $0 < r < \frac{1}{2}$, et on note $x_n = s_n - \frac{1}{2}q_{\mathrm{tt}}$. Écrire la dynamique de $(x_n)_n$, en déduire x_n pour tout n, en enfin s_n et p_n pour tout n.

7. (Modèle de Beverton-Holt) [2] Comme Malthus lui même l'avait remarqué, la croissance de toute population est limitée par les ressources du milieu où elle évolue. Pour modéliser de telles populations de façon plus réaliste, on considère la dynamique $x_{n+1} = f(x_n)$ avec

$$f(x) = \frac{R_0 x}{1 + x/M}$$

où $R_0 > 0$ et $M > 0$ sont des paramètres du modèle. Le but de l'exercice est de montrer que ces modèles sont « quasi-affines », au sens où leur étude se ramène à celle d'un système affine.

a) Représenter graphiquement quelques valeurs de x_n pour $R_0 = 0,5$ et $M = 5$ puis pour $R_0 = 2$ et $M = 5$, dans chaque cas pour au moins deux valeurs de $x_0 > 0$. Préciser le comportement apparent de la suite $(x_n)_n$ dans chacun de ces cas.

b) Afin de résoudre ce modèle dans le cas général et de démontrer rigoureusement les observations de la question 1, on pose

$$y_n = \frac{1}{x_n}$$

Montrer que $(y_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique. Calculer explicitement y_n pour tout n. En déduire le comportement asymptotique de x_n quand $n \to \infty$ selon la valeur des paramètres (R_0, M).

c) Expliquer pourquoi, quand $R_0 > 1$, on appelle $K = (R_0 - 1)M$ la capacité biotique du milieu.

2. `http://en.wikipedia.org/wiki/Beverton-Holt_model`