Un tour du (Vander)monde en 70 minutes

Stage intensif d'Autrans

Préparation Capes 2008-2009

Université Joseph Fourier

Le prétexte

a_i nombres réels (ou éléments d'un anneau), $a = (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$
Matrice de Vandermonde : $M_{i,j} = a_i^{j-1},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$.

$$M = \mathrm{VdM}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On s'intéresse au déterminant $V(a) = \det(M)$.

Rappels matrices/déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

Idem pour un déterminant de taille $n \times n$ mais avec $n!$ termes signés. Formule explicite :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

$\mathfrak{S}_n$ = groupe des permutations. ε = signature : au choix, nombre de transpositions, ou bien $\varepsilon(\gamma) = (-1)^{\ell(\gamma)-1}$ pour tout cycle γ de longueur $\ell(\gamma)$, puis produit sur des cycles de supports disjoints.

Matrice $A \rightsquigarrow$ application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$L(v) = Av$ pour v dans $\mathbb{R}^n$. $\det(A)$ décrit l'effet de L sur les volumes (au signe près) : pour "tout" $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}(L(K)) = |\det(A)|.\mathrm{vol}(K).$$

Exemples : Rotation/symétrie $\det(A) = \pm 1$, projection $\det(A) = 0$.

Exercice : vérifier la formule classique avec le cube unité K_0. On doit trouver $|\det(A)| =$ volume du parallélotope $L(K_0)$.

Cas plan : $L(K_0)$ est un parallélogramme d'aire égale au produit des longueurs des vecteurs multiplié par le sinus de l'angle. Formule de l'aire d'un parallélogramme = déterminant 2×2.

Application linéaire $\rightsquigarrow$ matrice(s)

$L : E \to E$ linéaire, E espace vectoriel, bases $v = (v_i)_i$ et $w = (w_i)_i$, $A = \mathrm{Mat}_v(L)$, $B = \mathrm{Mat}_w(L)$, alors $\det(A) = \det(B)$.
(Rappel : $B = P^{-1}AP$.)

Attention : si $L : E \to F$, le déterminant de $A = \mathrm{Mat}_{v,w}(L)$ dépend des bases v de E et w de F.

Remarques :
- Pour A et B matrices carrées, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (évident avec les volumes) (morphisme de groupes).
- Si $\det(A) = 0$, $\det(AB) = 0$ pour toute matrice B donc A n'est pas inversible. Réciproque vraie.

La définition classique

On appelle *déterminant* toute application de $\mathbb{R}^{n \times n}$ dans $\mathbb{R}$, multilinéaire, alternée et normée.

Théorème *Il existe un et un seul déterminant.*

Notations : $C_i(A)$ colonne i de A, $L_j(A)$ ligne j de A.

Conséquences directes : Si deux lignes (colonnes) sont égales, alors $\det(A) = 0$. Donc $\det(A)$ inchangé si on ajoute à $C_i(A)$ une combinaison linéaire des $C_j(A)$, $j \neq i$. Idem avec les lignes.

Retour à Vandermonde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \det(M).$$

Cas facile : si $a_i = a_j$ avec $i \neq j$, $V = 0$.

Sinon : comment calculer V ?

Quelques idées à essayer

- Récurrence : $V(a_1, \ldots, a_n)$ à partir de $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$?
- Algèbre : racines, polynômes, degré, etc. ?
- Calcul différentiel : $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto V(a_1, \ldots, a_n)$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, dériver, intégrer ?

Méthode “calcul différentiel”

$A(t)$ matrice fonction de t dans $\mathbb{R}$

$D(t) = \det(A(t))$, $c_i(t) = C_i(A(t))$

$$D'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(c_1(t), \ldots, c_{i-1}(t), c_i'(t), c_{i+1}(t), \ldots, c_n(t))$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} \cos(d+a) & \sin(d+a) & \cos(b-c) \\ \cos(d+b) & \sin(d+b) & \cos(c-a) \\ \cos(d+c) & \sin(d+c) & \cos(a-b) \end{pmatrix}$ avec

(a, b, c, d) réels. Calculer $\det(A)$. (Indication : faire varier d.)

Retour aux méthodes "algébriques"

Proposition *La matrice M est inversible si et seulement si les nombres réels a_i sont deux à deux distincts.*

Proposition *La matrice M est inversible si et seulement si les nombres réels a_i sont deux à deux distincts.*

Preuve : calcul du déterminant (patience), ou bien on résout l'équation

$$MV = 0, \qquad \text{inconnue } V \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Indication :

$V = (v_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$, polynôme $P_V(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} v_i X^i$. Alors...

... donc M est inversible, cqfd.

Première application

Proposition *Les vecteurs propres d'une matrice associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.*

Proposition *Les vecteurs propres d'une matrice associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.*

Preuve : $AV_i = \lambda_i V_i$ avec $V_i = (v_i^k)_k$ vecteurs non nuls et λ_i scalaires distincts. On veut résoudre

$$\sum_i x_i V_i = 0 \qquad \text{(inconnue } (x_i)_i\text{).}$$

En appliquant j fois A : $\sum_i \lambda_i^j x_i V_i = 0$ pour tout entier $j \geqslant 0$.

Pour toute coordonnée k, le vecteur $Y_k = (x_i v_i^k)_i$ est solution de $M^t Y_k = 0$ avec $M =$Vandermonde$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Les λ_i sont distincts donc M est inversible donc M^t aussi donc $Y_k = 0$.

$x_i v_i^k = 0$ pour tous i et k donc $x_i V_i = 0$ pour tout i. Comme $V_i \neq 0$, $x_i = 0$, cqfd.

Seconde application : interpolation polynomiale

$n+1$ points (a_i, b_i), $0 \leqslant i \leqslant n$, dans le plan.

Objectif : *Trouver un polynôme* $P = \sum_{j=0}^{n} c_j X^j$ *de degré au plus* n *qui passe par les points* (a_i, b_i). *Existence, unicité ?*

$n+1$ points (a_i, b_i), $0 \leqslant i \leqslant n$, dans le plan.

Objectif : *Trouver un polynôme* $P = \sum_{j=0}^{n} c_j X^j$ *de degré au plus* n *qui passe par les points* (a_i, b_i)*. Existence, unicité ?*

Il suffit de traduire : $\sum_j c_j (a_i)^j = b_i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ signifie que $MC = B$ avec $C = (c_i)_i$, $B = (b_i)_i$, $M =$VdM$(a_0, a_1, \ldots, a_n)$

Si les abscisses a_j sont deux à deux distinctes, $\det(M) \neq 0$ donc C existe et est unique ($C = M^{-1}B$).

Conclusion *Le polynôme* P *existe et est unique (et en plus on sait le calculer, modulo l'inversion d'une matrice de Vandermonde de taille* $n+1$*).*

Finalement, la valeur de $\det(M)$ **!**

$$\det(M) = \pi_n(a) \text{ avec } \pi_n(a) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Première preuve

On remplace C_i par $C_i - a_1 C_{i-1}$ en partant de C_n et en remontant jusqu'à C_2. Le déterminant reste inchangé. La première ligne vaut $(1, 0, \dots, 0)$. La première colonne vaut $(1, 1, \dots, 1)$. On peut factoriser $(a_i - a_1)$ dans C_i. On développe selon la première ligne :

$$\det(M) = \prod_{2 \leqslant j \leqslant n} (a_i - a_1) \det(M')$$

avec $M' = \mathrm{VdM}(a_2, \dots, a_n)$. Par récurrence, on retrouve le résultat annoncé. (Initialisation ?)

Une autre preuve

V est un polynôme en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ qui s'annule lorsque $a_i = a_j$ avec $i \neq j$ (puisqu'alors deux lignes sont identiques).

Dans $\mathbb{R}[a_1, \ldots, a_n]$, $V(a_1, \ldots, a_n) = \pi_n(a_1, \ldots, a_n) Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ avec Q polynôme. Or le degré en a_n de V est au plus $(n-1)$ (on développe M selon $C_n(M)$), le degré de π_n en a_n est $(n-1)$ pour $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ fixé non "exceptionnel" donc Q est une constante relativement à a_n. Idem pour a_i pour tout i (invariance par $\mathfrak{S}_n$) donc Q est constant. Ainsi $V = k_n \pi_n$ et il reste à calculer la valeur des scalaires k_n.

Calcul de k_n : récurrence sur $n \geqslant 1$.

$V(a_1) = 1 = \pi_1(a_1)$ (produit vide) et $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1 = \pi_2(a_1, a_2)$ donc $k_1 = k_2 = 1$. Pour $n \geqslant 2$, on calcule le terme de plus haut degré en a_n dans $V(a_1, \ldots, a_n)$ en développant selon la dernière colonne : on obtient le cofacteur de a_n^{n-1} soit $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$, donc $k_{n-1}\pi_{n-1}(a_1, \ldots, a_n - 1)a_n^{n-1}$. Le terme de plus haut degré en a_n dans $k_n\pi_n(a_1, \ldots, a_n)$ est $k_n\pi_{n-1}(a_1, \ldots, a_n - 1)a_n^{n-1}$ donc $k_n = k_{n-1}$ donc $k_n = 1$, cqfd.

Preuve de Cauchy (1812)

Définition Polynôme symétrique : invariant par permutation des variables.

Exemple : $P(x,y,z) = x^2y + x^2y^2 + x^2yz + x^2z + x^2z^2 + xy^2 + xy^2z + xyz^2 + xz^2 + y^2z + y^2z^2 + yz^2$.

Définition Fonction alternée : valeur opposée quand on transpose deux variables.

Exemples : $f(x,y) = x - y$,
$f(x,y,z) = (\sin(x) - \sin(y))(\sin(x) - \sin(z))(\sin(y) - \sin(z))$.

Lemmes

(1) Une fonction alternée des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est nulle sur chacun des hyperplans $x_i = x_j$. (Évident.)

(2) V est un polynôme alterné des variables a_i. (Preuve : on échange deux lignes de la matrice.)

(3) π_n est un polynôme alterné de degré $\frac{1}{2}n(n-1)$. (Évident.)

(4) Si P est un polynôme alterné en les variables $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, de degré d, alors $P = \pi_n S$ où S est un polynôme symétrique de degré $d - \frac{1}{2}n(n-1)$.

Preuve de (4)

P/π_n est une fraction rationnelle symétrique de degré (comme fraction rationnelle) $d - \frac{1}{2}n(n-1)$. Reste à montrer que P/π_n est un polynôme.

Le polynôme $a_1 \mapsto P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ s'annule en chaque a_i pour $i \geqslant 2$. Si les a_i sont distincts, ces $n-1$ racines sont distinctes donc $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i \geqslant 2}(a_i - a_1)\, P_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ avec P_1 polynôme en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. (Et si des a_i sont égaux ? Continuité !)

On recommence avec P_1 : le polynôme $a_2 \mapsto P_1(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ s'annule en chaque a_i pour $i \geqslant 3$ donc

$P_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i \geqslant 3} (a_i - a_2)\, P_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ avec P_2 polynôme en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Etc.
Donc $P = \pi_n S$ avec S polynôme, cqfd.

((**Corollaire** Tout polynôme alterné est de degré au moins $\frac{1}{2}n(n-1)$.))

(5) Il reste à calculer le coefficient dominant de V : ici degré$(S) = 0$ donc S est constant. Le terme en $a_1^0 a_2^1 \ldots a_n^{n-1}$ dans π_n revient à choisir le premier terme de chaque parenthèse donc $(j-1)$ fois le coefficient a_j, donc coefficient dominant $+1$.

Application : Un exemple de Jacobien

σ_i polynôme symétrique élémentaire de degré i en les inconnues $(x_1, ..., x_n)$.
$\Sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Proposition *Le Jacobien de l'application* Σ_n *au point* $(x_1, ..., x_n)$ *vaut* $V(x_1, ..., x_n)$ *au signe* $(-1)^{n(n-1)/2}$ *près.*

Preuve

σ_i^j polynôme symétrique élémentaire de degré i en les $(n-1)$ inconnues x_k avec $1 \leqslant k \leqslant n$ mais $k \neq i$.

$\sigma_i = x_j\, \sigma_{i-1}^j + \sigma_i^j$ (convention $\sigma_0^j = 1$)
$(\partial/\partial x_j)\sigma_i = \sigma_{i-1}^j$ donc la matrice jacobienne vaut

$$J_n = (\sigma_{i-1}^j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Par des opérations sur les lignes et colonnes, on peut ramener le calcul de $\det(J_n)$ à celui de V_n (compléter).